Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Coloring in the Topology

Hamid Erfanian Oraei Dhsorkhi[1] ✉, Majid Erfanian Oraei[2]

1. School of Mathematics and Computer Science, Damghan University, Damghan, Iran.

✉ E-mail: hamiderfanian23@yahoo.com

2. Department of Science, School of Mathematical Sciences, University of Zabol, Zabol, Iran.

E-mail: erfaniyan@uoz.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
23 December 2018
Revised form:
6 July 2020
Accepted:
26 August 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:

coloring number;
coloring map;
topological surfaces.

ABSTRACT

Introduction

The aim of this study, is painting of topological surfaces with the least number of colors without the distance, and the colors have a border. For this purpose, we need a color mapping. In this mapping, we have not any fixed point, and we can colorable the map with least colors.

Definition: Let f∶ X ⟶ X be a graph without a fixed point. f is colorable with k colors, if there is C={C_1,…,C_K}, where all C_i do not include {(x, f(x)}. Or similarly, for every i=1,…, k, there is the equation C_i ∩ f(C_i)=∅.

Also, we define some concepts such as Compression, Metric, or non-Compression of space. Also, to achieve the desired result of each space, we change the properties of the maps.

Material and methods

In this work, first, we define the properties and conditions of the color mapping and color number. Also, by the study of properties of each space, we choose the best of space. One of the best conditions of this space is the lowest color number and higher efficiency. Finally, we proved that this number is finite, and we can do coloring space with some maps and conversely.

Results and discussion

In this work, we define the properties and conditions of the color mapping and color number. We presented some theorems and Lemma in the article and proved them for coloring of any space by coloring map, the coloring number is

at least 3 and at most is a n+3. Also, we proved the coloring number finite and we can do coloring space with some maps and conversely.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- the coloring number is at least 3.
- the coloring number is at most n+3.
- coloring number is finite and we can do coloring space with some maps.
- We can do the coloring of any space by the finite coloring map.

How to cite: Erfanian Oraei Dhsorkhi, H., Erfanian Oraei, M; (2022) Coloring in the Topology. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-14

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰۴۶-۲۰۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۰۰٤-۲۰۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

رنگ‌پذیری در توپولوژی

حمید عرفانیان اورعی دهرخی[۱] ✉، مجید عرفانیان اورعی[۲]

۱. نویسندهٔ مسئول، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران. پست الکترونیکی: hamiderfanian23@yahoo.com
۲. گروه ریاضی، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه زابل، زابل، ایران. پست الکترونیکی: erfaniyan@uoz.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۰۲
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۰۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:

نگاشت‌های رنگی،
عدد رنگی،
پوشش نقطه ای،
پیوستگی،
فشردگی.

چکیده

در این مطالعه هدف بیان نحوه رنگ آمیزی سطوح توپولوژِکی به صورتی که رنگ‌ها دارای مرز اما بدون فاصله و با کمترین عدد رنگی است. اینکه یک سطح را می‌توان با حداقل چه تعداد رنگ رنگ‌آمیزی کرد به صورتی که شرایط ایجاد تعریف یک نوع نگا شت با شرط بدون نقطه ثابت بودن را همراه دا شته باشد. این نگاشت را نگاشت رنگی نامیده و در شرایط مختلف فضا مانند فشردگی یا پارافشردگی، نرمال یا متریک بودن و پیو ستگی و... مورد برر سی و تحلیل قرار می‌گیرد و متنا سب با نوع هر فضا خواص مربوط به نگا شت‌ها را تغییر داده تا نتیجه مورد نظر حا صل شود. در ادامه با اثبات ق ضایا و لم‌های متعدد، عدد رنگی منسوب به هر یک از نگا شت‌ها با شرایط مختص به آن به د ست آورده و اثبات می شود که به جز یک استثنا که در متن به آن اشاره شده است این عدد از حداقل ۳ البته و بسته به شرایط خاص هر فضا تا حداکثر $n+3$ افزایش می‌یابد. که n می‌تواند بسته به شرایط متناهی هم باشد.

استناد: عرفانیان اورعی دهرخی، حمید؛ عرفانیان اورعی، مجید؛ (۱۴۰۱). رنگ پذیری در توپولوژی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۴-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

در این مطالعه هدف رنگ آمیزی سطوح توپولوژِکی با بکارگیری نگاشت است، به این صورت که ابتدا با بررسی نوع فضا نگاشتی را متناسب با آن تعریف کرده به طوریکه کمترین عدد رنگی را نتیجه بدهد. این نگاشت‌ها یک سری تعاریف مشخص خواهند داشت مثل نقطه ثابت بودن و باقی خواص مربوط به آنها همچون پیوستگی و ... متناسب با نوع فضا تغییر خواهد کرد. تعریف زیر که به تعریف نگاشت‌های رنگی معروف است یک دید کامل از چگونگی انتخاب و نحوه عمل نگاشت‌های رنگی را نشان می‌دهد.

تعریف ۱.۱. فرض $f : X \to X$ تابع بدون نقطه ثابت باشد. f را با k رنگ، رنگ پذیرگویند اگر پوشش بسته $C = \{C_1, \dots, C_K\}$ وجودداشته باشد، به طوری که C_iها شامل جفت $\{x, f(x)\}$ نباشند. یا به‌طور مشابه برای هر $i = 1, \dots k$ رابطه $C_i \cap f(C_i) = \emptyset$ برقرار باشد.

نتیجه بسیار ساده اما کلیدی در تعریف بالا این است که در پوشش C هر Ci یک رنگ و به طور مستقیم $f(Ci)$ نیز رنگ خواهد بود و با توجه به شرط‌مذکور به راحتیمی‌توان نتیجه گرفت $f^{-1}(Ci)$ همرنگ است. پس در یک نگاه اجمالی می‌توان بیان کرد که حداقل عدد رنگی یک نگاشت، عدد ۳ است. آن‌چه در رنگ‌پذیری نگاشت‌ها از اهمیت بسیاری برخوردار است نوع فضا و نوع پوشش تعریف شده بر روی آن است، از آن‌جا که امکان بررسی تمام فضاها از حوصله این بحث به دور است لذا برای یکسان سازی در کل بحث تمام فضاها هاسدورف فرض می شود. درصورت استفاده از سایر فضاها در شروع قضیه به آن اشاره خواهد شد.

قضیه۱ معروف به قضیه رنگی یا همان رنگ‌پذیری نگاشت‌ها است. اثبات این قضیه و خوانش‌های ساده‌تر آن، هدف اصلی این مطالعه است.

قضیه ۱. فرض X فضای پارافشرده و $\dim X \leq n$ باشد. در نتیجه هر همسان‌ریختی بدون نقطه ثابت از X به خودش، با $n + 3$ رنگ، رنگ‌پذیر است.

نکته مورد توجه در این قضیه این است که اگرچه فشردگی از پارافشردگی قوی‌تر است، اما در این قضیه به جای همسانریختی‌ها نمی‌تواناز نگاشت‌های پیوسته استفاده کرد. یعنی اگر لازم باشد از نگاشت‌ها پیوسته استفاده شود، باید شکل آن به صورت قضیه شماره ۲ تغییر یابد. این نشان می‌دهد دقت در انتخاب نوع نگاشت از اهمیت بسیاری برخوردار است.

قضیه ۲. فرض X یک فضای فشرده با $\dim X \leq n$ باشد. هر نگاشت پیوسته بدون نقطه ثابت، از X به خودش، رنگ‌پذیر با $n + 3$ رنگاست.

اثبات. [۱] □

با استفاده از تعریف زیر کلیتی از نحوه اثبات قضیه ۱ را می‌توان بیان کرد.

تعریف ۲. بزرگترین عنصر در خانواده $C(x)$ از همه فشرده‌سازی‌ها، از یک فضای تیخونوف مثل X را فشرده‌سازی استون- چخ گویند و با βX نشان می‌دهند.

βX در اصل یک فضای هاسدورف فشرده همراه با یک نگاشت پیوسته از X است، با این شرط که هر نگاشت پیوسته مانند $f: X \to K$ زمانی‌که K یک فضای فشرده هاسدورف باشد، تنها به یک صورت منحصر به فرد قابل ارتقاء به نگاشت پیوسته $\beta f: \beta X \to K$ باشد. باتوجهبه تعریف بالا طرح اثبات قضیه۱ به این صورت خواهد شد که فضایX به فضای استون_چخβX گسترش می‌یابد. همچنین به راحتی می‌تواناثبات کرد که رابطهٔ $\dim X= \dim\beta X$ برقرار است. حال فرض $f: X \to X$ یک همسانریختی وX فشرده باشد و نشان داده می‌شود اینکه نگاشت با یک نگاشت بدون نقطه ثابت(حتی یک همسانریختی) روی یک فضای متریک فشرده که بعد آن نابیشتر از بعد X است، مزدوج است.فضایY بایستی دارای "نمایش والمن" از یک خانواده از صفر-مجموعه‌های X که با دقت انتخاب شده اند، باشد. در واقع رنگ آمیزی$\{A_1, \dots, A_{n+3}\}$ از نگاشت ساخته شده رویYرنگ آمیزی$\{\omega^{-1}(A_1), \dots, \omega^{-1}(A_{n+3})\}$ را برای نگاشت f ایجاد می‌کند که این همان عدد $n+3$ را برای عدد رنگی نگاشت اثبات می‌کند. برای رسیدن به این هدف، نوع فضا و بیان خواص مورد نیاز برای آن ازاهمیت زیادی برخوردار است. لم ۱ این فضا و خواص آن را ارایه می‌دهد.

لم۱. فرض X فضای هاسدورف فشرده باشد، در این صورت احکام زیر برقرار می‌باشند:

(۱). $\dim X \leq n$.

(۲). پایهB از صفر-مجموعه‌ها وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر مجموعه متناهی $\hbar \subseteq B$ به شرط این‌که: $\cap\hbar = \emptyset$مجموعه متناهی $C \subset B$با خواص زیر موجود باشد:

(a) برای هر عنصر $G \in C$، وجود دارد$F \in \hbar$به طوری که$F \in G$

(b) $\cap C = \emptyset$.

(c) هر زیرمجموعه از Gبا بیشتر از $n+3$عنصر، پوششی از X است.

اثبات. [۲].□

لم ۲. برای مجموعه شمارای $S \subset Z(X)$، مجموعه شمارای $T \subset Z(X)$ وجود دارد، به طوری‌که رابطه $S \subset Ʈ$که دارای خواص ۶ - ۱ ازلیست (❋) است، برقرار می‌باشد.

اثبات. [۷]□

لیست(❋):

(۱). $\{\emptyset, X\}$.

(۲). برای $S, T \in Ʈ$ داریم $\{S \cap T, S \cup T\} \subset Ʈ$.

(۳). برای$T \in Ʈ$ رابطه$\{f^{-1}(x), f(x)\} \subset Ʈ$ برقرار است.

(۴). شبکه منظمƮ نرمال است به‌طوری‌که برای هر $S,T \in T$ مجزا، وجود دارد G ،H متعلق بهƮ به‌طوری‌که

$$G \cap S = \emptyset = T \cap H = X$$

(۵). برای هر$T \in Ʈ$ رابطه $T_n \in Ʈ$ به طوری‌که $\{X \setminus T\} = \cup\{T_n : n \in N\}$برقرار است.

(۶). برای هر مجموعه متناهی $\hbar \subset T$ به شرط$\hbar = \emptyset$ مجموعه متناهی $C \subset T$ با خواص زیر وجود دارد:

$C = \emptyset$.(a)

(b).هر زیر مجموعه از C با بیشتر از $n+1$ عنصر پوششی از X است.

(c).برای هر عنصر $G \in C$ وجود دارد یک F در $\hbar$ به طوری که $F \subset \hbar$ برقرار باشد.

(۷). زیر مجموعه متناهی $\{C_1, \dots, C_k\}$ از T وجود دارد و برای هر $1 \le i \le k$ رابطه $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ و $C_1, \dots, C_k = X$ برقرارخواهد شد.

تعریف۳. نگاشت $f^* : Y \to Y$ به طور ضعیف مزدوج گویند اگر نگاشت بدون نقطه ثابت (یا حتی یک همسان‌ریختی) مثل $Y \to X :$ وجود داشته باشد، به قسمی که $o\varphi f = f^* o\varphi$ برقرار باشد. برای این منظورکافی است یک مزدوج‌سازی بین $f^* : Y \to Y$ و $f : X \to X$ ساخته شود.

اثبات قضیه۱: نگاشت $\varphi : X \to Y$ با تعریف $\varphi(x) = \{s \in T : x \in S\}$ را در نظر بگیرید، واضح است که $\varphi(x) \in Y$ توسط X فشرده شده است. همچنین φ پوشا است، بنابراین روابط زیر به سادگی به دست می‌آیند:

$$\varphi^{-1}(S^*) = S \text{ و } \varphi(S) = S^*$$

در نهایت تابع پیو سته $f^*: Y \to Y$ به صورت $f^*(\hbar) = \{f(F): F \in \hbar\}$ تعریف می شود بر این ا ساس رابطه $f^*(\hbar) \in Y$ واضح است. حال تساوی‌های زیر به راحتی قابل اثبات است:

$$f^*(S^*) = (f(S))^* \text{ و } (f^*)^{-1}(S^*) = (f^{-1}(S))^*$$

بدیهی‌ست f^* پیوسته است. به راحتی می‌توان نشان داد که f^* یک همسان‌ریختی بدون نقطه ثابت است. درحقیقت $Y = C_1^* \cup \dots \cup C_k^*$ است و $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ نشان می‌دهد که رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(f(C_i))^* \cap C_i^* = \emptyset \text{ و } f^*(C_i^*) \cap C_i^* = \emptyset$$

در نهایت اگر برای نگاشت‌های تعریف شده φ و f^* در بالا نشان داده شود که:

$$o\varphi f = f^* o\varphi$$

اثبات قضیه به پایان می‌رسد که این امر به سادگی با توضیحات بیان شده قبل بیان اثبات قضیه انجام پذیر است □

۲. استفاده از چند نگاشت روی یک فضا

گاهی یک فضا را نمی‌توان با یک پوشش به تنهایی پوشش داد و لازم است از چند پوشش نا همگون استفاده کرد حال یک سوال این‌جا ذهن را معطوف به خود می‌کند، آیا می‌توان از چند نگاشت همزمان برروی یک فضا بهره برد؟ برای پاسخ به این سوال ابتدا با شرایطی که برای این کار لازم است را ایجاد کرد. به این منظور ابتدا تعریف نگاشت رنگی که در ابتدا متن بیان شده را باید به شکل زیر تغییر داد.

تعریف ۴. فرض برای $j = 1, \dots, l$ نگاشت‌های بدون نقطه ثابت $f_j: X \to X$ موجود باشند، آن‌ها را با k رنگ، رنگ‌پذیر گویند، اگرپو شش بـ سته $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ موجود و شرط $f_j(c_i) \cap c_i = \emptyset$ برای $i \le k$ و $j \le l$ برقرار باشد، آن‌گاه عناصر C را رنگ و خود آن را رنگ‌آمیزی برای $f_1, \dots, f_l$ گویند.

حال با توجه به تعریف بالا قضیه زیر می‌تواند به بیان عدد رنگی این نوع نگاشت‌ها بپردازد.

قضیه ۳. [۹] فرض X یک فضای پارافشرده با $\dim X \le n$ باشد و $f_i : X \to X$ برای $1 \le i \le l$ هم‌سان‌ریختی بدون نقطه ثابت از X باشـد و فرض $g_j: X \to X$ برای $1 \le j \le k$ نگاشـت بدون نقطه ثابت از X به روی خودش باشد، پس $\{f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k\}$ به وسیله $n + 2l + k + 1$ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود.

اثبات. [۷]. □

مانند قضـیه رنگی این‌جا هم اگر لازم باشـد از نگاشـت‌های پیوسـته اسـتفاده شـود ملاحظه زیر از اهمیت خاصـی برخوردار است.

ملاحظه ۱. برای نگاشـــت های پیوســـته، قضـــیه بالا تنها زمانی برقرار اســـت که ترکیب هر دو تابع به شکل $\{f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k\}$ با هم از دوجهت برابر باشند.

حال با استفاده از ملاحظه بالا می‌توان قضیه فوق را برای نگاشت‌ها پیوسته به صورت زیر بازنویسی کرد.

قضیه ۴. فرض X یک فضای فشرده با $\dim X \le n$ و $f_i : X \to X$ برای $i = 1, \dots, l$ نگاشت پیوسته بدون نقطه ثابت از X به خودش باشد و فرض $g_j: X \to X$ برای $j = 1, \dots, k$ نگاشت بدون نقطه ثابت از X به خودش باشد، به طوری که هر دو تابع به شکل $\{f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k\}$ با هم مبدل باشند (ترکیب آنها با هم از دو جهت برابر است). در نتیجه $\{f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k\}$ به وسیله $n + 2l + k + 1$ رنگ، رنگ می‌شود.

اثبات. [۱] □

نکته مهم در دو قضیه بالا این است که برای به دست آوردن کران بالا برای عدد رنگی $n + 2l + k + 1$ بهترین کار انتخاب کران بالا برای n, l است. به شرطی‌که $k= 0$ یا $k= 1$ باشد.

ملاحظه ۲. برای مقادیر دیگر k هیچ نوع مثالی وجود ندارد.

حال این سوال به ذهن متبادر می‌شود که آیا می‌توان با یک نگاشت چند فضا را رنگ‌آمیزی کرد؟

در پاسخ به این سوال باید گفت انتخاب نوع فضا در انتخاب نگاشت متناسب با آن از اهمیت خاصی برخوردار است. در نتیجه تنها زمانی این سـوال پاسـخی مثبت خواهد داشـت که نوع فضـاها با هم یکسـان باشـد، یا دارای خواص مشابهی باشند. در این صورت کافی است اجتماعی از همه پوشش‌ها را به عنوان یک پوشش معرفی کرد و قضیه رنگی را برای آن پوشش پیاده نمود.

لازم به ذکر اسـت عدد رنگی بسـته به نوع توپولوژی معرفی شـده بر روی فضـا نیز متفاوت اسـت. به عنوان مثال از معروفترین فضاهای توپولوژیک، فضای توپولوژیکی گسسته است، قضیهٔ زیر عدد رنگی این نوع فضا را مشخص می‌کند.

قضیه ۵. نگاشت بدون نقطه ثابت $\varphi : D \to D$ روی فضای توپولوژیک گسسته با ۳ رنگ، رنگ‌پذیراست.

اثبات. [۳] □

۳. جایگزینی نگاشت‌های پیوسته با همسان‌ریختی‌ها

در این قسمت هدف استفاده نگاشت‌های پیوسته به جای همسان‌ریختی‌ها است، ایجاد شرایط لازم برای این کار با بیان متفاوتی از قضیه عدد رنگی به شکل زیر میسر می‌شود.

قضیه ۶. فرض X یک فضای نرمال با $\dim X \le n$ و $f : X \to X$ یک همسان‌ریختی بدون نقطه ثابت باشد. اگر f متناهی یا رنگ‌پذیر باشد می‌توان آن را با $n+3$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.

حال با اثبات این قضیه می‌توان فهمید در کدام قسمت اثبات از خواص همسان‌ریختی‌ها استفاده شده است و بررسی کرد که با تغییر همسان‌ریختی به یک نگاشت پیوسته آیا خللی در اثبات ایجاد می شود یا نه. برای اثبات قضیه ۶ ابتدا نیاز به موارد کلیدی هست که با استفاده از اثبات قضیه ۷ به دست می‌آیند.

قضیه ۷. فرض X یک فضای نرمال با $\dim X \le n$ که $n \le \omega$ است و U یک پوشش باز متناهی از X با کاردینال $|U| \ge n+3$ باشد، نیزفرض $f: X \to X$ یک همسان‌ریختی باشد. در نتیجه تحدید باز $V = \{V_U : U \in U\}$ از U وجود دارد به طوری که برای هر تعداد $\hbar \subseteq U$ به شرط $|\hbar| = n+3$ رابطه $\bigcap_{U\in h} V_U \cup f^{-1}(V_U) = \emptyset$ برقرار باشد.

به منظور اثبات این قضیه نیاز به طرح لم و گزاره به شرح زیر است.

لم ۳. فرض $A, A_1, \dots, A_n$ زیرمجموعه‌های بسته از یک فضا باشند. همچنین فرض $V_1, \dots, V_n$ زیرمجموعه‌های بازی از X باشند به این شرط که برای هر $i \le n$ رابطه $A \cap A_i \subseteq V$ برقرار باشد، حال اگر روابط $\widehat{A}_i =$ و $\widehat{A} = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ $A_i \cup \overline{V}_i$ برقرار باشد، آن‌گاه برای $i \le n$ روابط $A \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \widehat{A} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{A}_i$ و $\widehat{A} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \widehat{A}_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Fr} V_i$ برقرار است.

اثبات. [۸] □

گزاره ۳. فرض X یک فضای نرمال با $\dim X \le n$ و برای $i \le m$ رابطه $F_i \subseteq U_j$ برقرار باشد، به‌طوری‌که F_iها بسته و U_iها بازباشند. در نهایت فرض برای $j \le k$ هم رابطه $G_j \subseteq U_j$ برقرار باشد به طوری که G_jها بسته و U_jها باز باشند. اگر $m + k \ge n+3$ آن‌گاه زیرمجموعه‌های بسته $\widehat{F}_1, \dots, \widehat{F}_n, \widehat{G}_1, \dots, \widehat{G}_k$ با خواص زیر وجود دارند:

۱. برای $i \le 1$، $\widehat{F}_i \subseteq U_i$ و برای $j \le k$، $\widehat{G}_j \subseteq U_j$

۲. $\bigcup_{i=1}^{m} F_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \widehat{F}_i$ و $\bigcup_{j=1}^{k} G_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \widehat{G}_j$

۳. $\bigcap_{i=1}^{m} \widehat{F}_i \cap \bigcap_{j=1}^{k} \widehat{G}_j = \emptyset$

اثبات. [۸] □

اثبات قضیه ۷. فرض $\hbar$ تحدید بسته ای از U و شامل $n+3$ عنصر متفاوت از U برای $m + k = n+3$ باشد. فرض روابط $\varphi = \{U_1, \dots, U_m, U'_1, \dots, U'_k\}$ برقرار باشد، در نتیجه عناصری از $\hbar$ متناظر با عناصر φ وجود دارند به طوری که برای $i \le m$ و $j \le k$ با در نظر گرفتن $m + k = n+3$ روابط زیر برقرار است:

$$F_i \subseteq U_i \text{ و } f^{-1}[G_j] \subseteq f^{-1}[U_j]$$

به وسیله گزاره۳ مجموعه‌های بسته $B_1, \dots, B_k$ و $A_1, \dots, A_m$ به دست می‌آیند که دارای خواص زیر می‌باشند:

(۱). برای $i \le m$ ، $\hat{F}_i \subseteq U_i$ و برای $j \le k$ ، $B_j \subseteq f^{-1}[U'_j]$.

(۲). $\bigcup_{i=1}^{m} F_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_j$ و $\bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}[G_i] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_j$.

(۳). $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \bigcap_{j=1}^{k} B_j = \emptyset$

اگر در$\hbar$ برای هر $i \le m$ جایF باA تغییر یابد و برای هر $j \le k$ به جایG ازA'_j استفاده شود و سایر عنا صر ثابت نگه داشـــته شـــوند، برای $j \le k$ رابطه $A'_j = f[B_j]$ به وجود می‌آید. حال می‌توان ادعا کرد که خانواده به دســـت آمده$\hbar'$ پو ش شی برایX ا ست. بنابراین تحدیدی ب سته ازU به شمار می‌آید. عن صر ت صادفی $x \in X$ را جدا کرده اگر $x \in \bigcup_{i=1}^{m} F_i$ برقرار باشد، از قسمت اول خاصیت (۲) استفاده می شود و اگر $x \in \bigcup_{j=1}^{k} G_i$ برقرار باشد، آن‌گاه با استفاده از قسمت دوم خاصیت (۲) نتیجه می‌شود:

$$f^{-1}(x) \in \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}[G_j] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_j$$

بر این اســـاس نتیجه منطقی برای $j \le k$ به ازای هر $x \in A'_j$ به دســـت می‌آید. در نهایت اگرx در هیچ کدام از عنا صر H از $\hbar$ نبا شد درنتیجه متعلق به$\hbar'$ ا ست. همچنین بدیهی ا ست که رابطهٔ $\bigcap_{i=1}^{m} A_i \cap \bigcap_{j=1}^{k} [A'_j] = \emptyset$ برقرار است.

فرضV یک تسعید باز منا سب از$\hbar'$ و همزمان یک تحدید ازU ا ست. با ا ستفاده از قضیه ۱۴.۱.۷در [۸] این نتیجه به د ست می‌آید کهU یک تحدید باز مثلV دارد، به طوری‌کهVها و$f^{-1}(V)$ها درφ با هم ا شتراکی ندارند. با تکرار مکرر این روش با هر خانواده ازVها با کاردینال$n + 3$، تحدیدی ازU به دست خواهد آمد و اثبات تمام است.□

حال به راحتی می‌توان قضیه ۶ را اثبات کرد و جواب سوال مورد نظر را در آن یافت.

اثبات ق ضیه ۶. فرض k کوچکترین مقدار برای عدد رنگ آمیزی f با شد و پو شش$U = \{U_1, \dots, U_k\}$ رنگی برای آن باشد.

فرض خلف: فرض $k > n+3$ با شد. به راحتی می‌توان ن شان داد اگر $i \neq j$ آن‌گاه $U_i \neq U_j$ برقرار ا ست. به و سیلهٔ قضیه۶ می‌توان بدون تغییر در اصل موضوع فرض کرد برای هر$\hbar \in U$ با کاردینال $n+3$ رابطه زیر برقرار است

(۲)

$$\bigcap_{U \in \hbar} f(U) \cup f^{-1}(U) = \emptyset$$

فرض$\hbar = \{F_1, \dots F_k\}$تحدیدی بسته از U باشد. برای $i \le k-1$تعریف می شود:

$$B_i = F_i \cup (F_k \cap f[X \backslash U_i] \cap B_i = \emptyset$$

حال می‌توان ادعا کرد که$J = \{B_1, \dots, B_{k-1}\}$یک رنگ آمیزی برای$f$ است. بنابراین رابطه $f(B_i) \cap B_i = \emptyset$ برقرار اســـت. همچنینمی‌توان رابطه$f(B_i) = f(F_i) \cup [f(F_k) \cap f^{-1}(X \backslash U_i) \cap (X \backslash U_i)]$ را اثبات کرد. این همان نتیجه‌ای است که باید اثبات می‌شد، بنابراین روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$F_i \cap (X \backslash U_i) = \emptyset, F_k \cap f(F_k) = \emptyset, \qquad F_i \cap f(F_i) = \emptyset$$

با توجه به پوشش J اولین نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که رابطه $\bigcup_{i=1}^{k-1} F_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$ برقرار است. حال کافی است اثبات شود که F_k یک پوشش است در این صورت اثبات تمام می‌شود.
با انتخاب عنصر $x \in F_k$ مجموعه $\{f(U_i) \cup f^{-1}(U_i): i \leq k-1\}$ مورد بررسی قرار می‌گیرد، می‌توان نتیجه گرفت که رابطه $k-1 \gneqq n+2$ برقرار است و با استفاده از رابطه (۲) می‌توان نشان داد که $i \leq k-1$ وجود دارد به طوری که:

$$x \notin f(U_i) \cup f^{-1}(U_i)$$

با توجه به اینکه در ابتدا رابطه $x \in B_i$ برقرار بود و تناقض آن با فرض خلف، نتیجه می‌دهد حکم برقرار است. □
اکنون با این داشته‌ها می‌توان به راحتی به سوال مطرح شده پاسخ داد، اینکه آیا در قضیه۶ می‌توان به جای همسان‌ریختی‌ها از نگاشت‌های پیوسته استفاده کرد؟
در پاسخ به این سوال می‌توان گفت تنها زمانی که در اثبات قضیه۶ از همسان‌ریختی‌ها استفاده شده است، اثبات قضیه۷ می‌باشد. با در نظر گرفتن آن برای استفاده از نگاشت‌های پیوسته به جای همسان‌ریختی‌ها برای $n=0$ مشکلی به وجود نمی‌آید. به این صورت که فرض X صفر-بعدی باشد و U یک پوشش باز متناهی از X و $f : X \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد، بنابراین $\dim X = 0$ است. ازاین رو تحدید باز $V = \{V_U : U \in U\}$ از U با $\mathrm{ord}(V) \leq 0$ دارد به طوری که Uها دوبه‌دو مجزا می‌باشند، اما V همچنان وابسته است. با این فرض که اگر $x \in X$ و تنها یک عنصر از V شامل x باشد، آن‌گاه به طور مشابه یک عنصر از $f^{-1}(V)$ شامل x است.
برای n های بزرگتر قضیه ۷ در مورد نگاشت‌های پیوسته کارایی ندارد.
قضیه ۸. فرض X فضای نرمال و $f: X \to X$ تابع پیوسته بدون نقطه ثابت باشد، اگر f متناهی یا رنگ‌پذیر $\dim X \leq n$ باشد، آن‌گاه f را می‌توان به وسیله $n+3$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.
اثبات. فرض U یک رنگ آمیزی متناهی از f باشد، بدون تغییر در اصل مساله می توان X را فشرده فرض کرد و به‌طور مشابه می‌توان $f : X \to X$ را به نگاشت پیوسته $\beta f : \beta X \to \beta X$ گسترش و U را به پوشش باز $ExU = \{ExU : U \in U\}$ از βX گسترش داد و $\dim X = \dim\beta X$ است. همچنین βX نقطه ثابت ندارد، چون U متناهی است. بنابراین یک تحدید خوب از ExU متناظر با βf است که اثر یک تحدید خوب از U متناظر با f است، حال می‌توان از اثبات پل در قسمت۲.۳[۱] برای به دست آوردن نتیجه مورد نظر استفاده کرد.□

۴. تبدیل $n+3$ به عددی متناهی

حال این موضوع مورد توجه قرار می‌گیرد که آیا عدد رنگی $n+3$ را می‌توان به یک عدد متناهی تبدیل کرد؟ یعنی آیا نگاشت‌های رنگ‌پذیرمتناهیارنگ پذیرند؟
اولین بار فان داون [۶] اثبات کرد اگر X متناهی البعد و پارافشرده باشد، آن‌گاه هر نگاشت بدون نقطه ثابت بسته: $X \to X$ که برای مقدار $n < \omega$ و هر $x \in X$ دارای خاصیت $|f^{-1}(x)| \leq n$ باشد، متناهی یا رنگ‌پذیراست [۱۰].
در پاسخ به سوال مطرح شده قضیه زیر ارایه می‌شود تا نشان داده شود که $n+3$ می‌تواند متناهی باشد.

قضیه ۹. فرض X متناهی البعد و پارافشرده باشد پس هر خودسان‌ریختی بدون نقطه ثابت از X به خودش متناهی رنگ‌پذیر است.

لم زیر در اثبات این قضیه از اهمیت بالایی برخوردار است.

لم ۴. فرض X فضای نرمال با $\dim X \leq n$ باشد و $f : X \to X$ یک همسان‌ریختی باشد. حال فرض $\hbar$ مجموعه‌ای مجزا از زیرمجموعه‌های بسته از X باشد به طوری که برای هر $F \in \hbar$ رابطه $f(F) \cap F = \emptyset$ برقرار باشد. در نتیجه زیرمجموعه‌های بسته $A_1, \dots, A_{2n+3}$ از X وجود دارد به طوری که:

(a). برای هر $i \leq 2n+3$، $f(A_i) \cap A_i = \emptyset$

(b). $\bigcup \hbar \subseteq \bigcup_{i=1}^{2n+3} A_i$

اثبات قضیه۹. فرض $f\colon X \to X$ خودسان‌ریختی بدون نقطه ثابت باشد. باید نشان داده شود که f با $(2n+3)*(n+1)$ رنگ، رنگ‌پذیراست، در حالی که $\dim X = n$ است.

بنابراین f بدون نقطه ثابت و X پارافشرده و n-بعدی است. حال پوشش باز موضعی متناهی $U = \{U_s\}_{s\in S}$ از X وجود دارد به طوری که رابطه $\mathrm{ord}(U) \leq n$ برای آن برقرار باشد، علاوه براین برای هر $s \in S$ رابطه $f(U_s) \cap U_s = \emptyset$ نیز برقرار است، پوشش باز V از X وجود دارد به طوری‌که مبین اجتماع $n+1$ خانواده از $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ است و $V_i = \{V_{i,s}\}_{s\in S}$ها جفت به جفت مجزا هستند و برای $s \in S$ و $i \leq n+1$ رابطه $V_{i,s} \subseteq U_s$ برقرار است. قضیه۴.۲.۳ در [۵] مشاهده شود. فرض $\hbar$ تحدید بسته از V باشد. با استفاده از قضیه ۱۸.۵.۱ در [۴] به سادگی نشان داده می‌شود که $\hbar$ اجتماع $n+1$ خانواده‌ای از $\hbar_1, \dots, \hbar_{n+1}$ و $\hbar_i = \{F_{i,s}\}_{s\in S}$ است. به طوری که برای $s \in S$ و $i \leq n+1$ رابطه $F_{i,s} \subseteq V_{i,s}$ برقرار است. در نتیجه برای هر $i \leq n+1$، $\hbar_i$های وجود دارد که مجزا هستند. بنابراین U موضعاً متناهی است. به راحتی می‌توان نشان داد برای هر $F \in \hbar$ رابطه $f(F) \cap F = \emptyset$ برقرار است. این نشان می‌دهد برای هر i، رابطه $f \restriction \bigcup \hbar_i$ به وسیله $2n+3$ رنگ، رنگ‌پذیراست و با استفاده از لم ۴ می‌توان نتیجه گرفت که f به وسیله $(2n+3)*(n+1)$ رنگ، رنگ‌پذیراست.□

۵. رابطهٔ بعد فضا با عدد رنگی

حال قضیه‌ای به نام قضیه الحاقی بیان می‌شود که به بررسی ارتباط عدد رنگی با بعد فضا می‌پردازد.

تعریف۵. فرض $f\colon X \to X$ یک نگاشت بدون نقطه ثابت باشد، عدد رنگی $C(f)$ را کوچکترین کاردینال از رنگ‌آمیزی باز f گویند.

تعریف ۶. اگر $f\colon X \to X$ یک نگاشت بدون نقطه ثابت باشد، آن‌گاه زیرمجموعه A از X را ثابت گویند اگر رابطه $f(A) \subset A$ برقرار باشد.

برای زیرمجموعه ثابت A از X تحدید $f : A \to A$ را به وسیله f_A نشان می‌دهند.

قضیه۱۰. فرض که X یک فضای متریک و $f : X \to X$ یک نگاشت بدون نقطه ثابت باشد. اگر برای زیرمجموعه‌های ثابتA وB از X تساوی $X = A \cup B$ برقرار باشد، در این صورت رابطهٔ $C(f) \leq C(f_A) + C(f_B) - 1$ برقرار خواهد بود.

لم زیر در روند اثبات قضیه بالا از اهمیت زیادی برخوردار هستند.

لم۵. فرض $f: X \to X$ در نتیجه زیرمجموعه بازW از X یک تابع بدون نقطه ثابت و A زیرفضایی ثابت ازX و فرض که زیرمجموعه C از زیرفضای A نیز یک رنگ بسته از f_A باشد. در نتیجه زیرمجموعه باز W از X وجود دارد به طوری‌که درستی رابطه$f_A^{-1}(C) \subset W$ برقرار و W یک رنگ از f خواهد بود.

اثبات. رنگ‌هایC و$f_A^{-1}(C)$ زیرمجموعه‌های بسته و مجزا از زیرفضای A هستند، بنابراین آنها زیرمجموعه‌های جداگانه‌ای ازX هستند. از این‌رو زیرمجموعه‌های مجزایU وV از X وجود دارند به طوری‌که:

$$f_A^{-1}(C) \subset U \text{ و } C \subset V$$

با تعریف$W = U \cap f_A^{-1}(V)$ به راحتی نشان داده می‌شود کهW یک رنگ باز و شامل$f_A^{-1}(C)$ است. □

گزاره۴. فرض $f: X \to X$ نگاشتی بدون نقطه ثابت و C یک مجموعه از n رنگی‌ها از f که باز یا بسته هستند، می‌باشد. در نتیجه یکرنگ‌آمیزی باز از f با کاردینال بیشتر ازn وجود دارد.

اثبات. با استفاده از لم ۵ و قرار دادن $X = A$ می‌توان رنگ بسته B را در رنگ آمیزی$f_A^{-1}(C)$ از f با رنگ بازU جایگزین کرد به طوری که $B \subset A$ باشد. □

گزاره بالا نشان می‌دهد عدد رنگی از یک نگاشت، کوچکترین کاردینال از پوشش های X است که شامل رنگ های باز یا بسته است.

لم زیر رابطه رنگ آمیزی باز از زیرفضای ثابت با یک مجموعه از رنگ‌های باز از فضا را نشان می‌دهد.

لم۶. فرض $f : X \to X$ یک نگاشت بدون نقطه ثابت باشد و زیرمجموعهA ازX یک زیرفضای ثابت، فرضμ یک رنگ آمیزی ازf_A شاملm رنگ که $m \in N$ باشد. در نتیجه مجموعهV شامل بیشتر ازm رنگ باز ازf وجود خواهد داشت به‌طوری‌که$A \subset \bigcup V$ باشد.

اثبات. به طور استاندارد، زیرفضای A شامل تحدید بستهC از μ وجود دارد. در نتیجه C رنگ پذیری بسته ازf_A است و رابطه$\hbar = f_A^{-1}(C)$ به دست می‌آید. به وسیله لم ۵ برای هر عضوH از$\hbar$ یک رنگ بازV ازf وجود دارد به‌طوری‌که $H \subset V$ است. بنابراینV را مجموعه همه اینV ها قرار داده و لم اثبات می شود □

حال به راحتی می‌توان قضیهٔ ۱۰ را اثبات نمود.

اثبات قضیه۱۰. می‌توان فرض کرد کهf_A و f_B هردو عدد رنگی متناهی دارند. با قرار دادن$m = C(f_B)$ و $n = C(f_A)$ به وسیله لم۶ خانواده‌های$V = \{V_j \mid j = 1,2, \dots , m\}$و$\mu = \{U_i \mid i = 1,2, \dots , n\}$ از رنگ‌های بازf به وجود می‌آیند کهμ پوششA وV پوششB است. در نتیجه اجتماع $V \cup W$یک رنگ آمیزی از f با $n + m$ رنگ است.اگر با برداشتن یکی از رنگ‌ها، پوشش $V \cup W$ همچنان رنگ آمیزی f باشد، آن‌گاه اثبات کامل می

شـــود.مجموعه‌ای از مجموعه‌های باز به شـــکل $W = \{U_i | i = 1,2, \dots, n-1\} \cup \{V_j | j = 1,2, \dots, m-1\}$ در نظر گرفته و $R = X \setminus \bigcup W$ تعریف کرده حال می‌توان ادعا کرد که R یک رنگ بسته از f است.

اثبات ادعا:

به این منظور ابتدا باید نشـان داد که R یک رنگ اسـت. قبلا اثبات شـد که $f^{-1}(R) \cap R = \emptyset$ برقرار اسـت، اکنون فرض $y \in f^{-1}(R)$ باشـد، بدون تغییر در اصـل مسـاله می‌توان فرض کرد که $y \in A$ بنابراین A ثابت و $f(y) \in R$ است، در نتیجه $f(y) \in R$ است. بنابراین رابطه $f(y) \in U_n$ برقرار می‌باشد، در نتیجه U_n یک رنگ است و y متعلق به U_n نیســـت، با توجه با اینکه برای هر $i < n$, y متعلق به U_i اســـت، در نتیجه y متعلق به R نیســـت و چون $f^{-1}(R) \cap R = \emptyset$ پس R یک رنگ است و ادعا اثبات می شود.

مجموعه $W \cup \{R\}$ یک رنگ آمیزی از f است و عناصر آن باز یا بسته هستند. طبق گزاره ۴ عدد رنگی f بیشتر از $n+m-1$ است. □

۶. نتایج اصلی

در این مطالعه ابتدا راهی برای رنگ آمیزی سطوح توپولوژیکی پیدا می‌شود و نشان داده می‌شود که سطوح مختلف قابلیت رنگ آمیزی به وسیله نگاشت‌های خاصی را دارا می‌باشند. تعاریف مربوط به نگاشت‌های رنگی متناسب با هر فضا و هر نوع نگاشت را بیان کرد و نشان داد که تعریف نگاشتهای رنگی از انعطاف بسیاری برخوردار است. در ادامه به نحوه تخصیص این نگاشت‌ها به هر فضا بسته به نوع و نیاز آن پرداخت. عدد رنگی برای هر فضا را بسته به نوع و خواص آن بدست آورد به نشان داد که حداقل آن چند و حداکثر تا چه مقدار می تواند باشد. نشان داد که یک فضا را می توان با چند نگاشت رنگ آمیزی کرد اما یک نگاشت را نمی توان همزمان برای چند فضا بکار برد و عدد رنگی مربوط به آن را نیز پیدا کرد. در نهایت رابطه مستقیمی بین عدد رنگی و بعد فضا ایجاد و نشان داد که آنها از هم منفک نیستند.

References

1. Aarts, J. M., Fokkink, R. J., Vermeer, H. (1996). Variations on a theorem of Lusternik and Schnirelmann.Topology, 35(4), 1051-1056

2. Aarts, J. M., Nishiura, T. (1993). Dimension and extensions (Vol. 48). Elsevier.

3. Blsaszczyk, A., Vermeer, J. (1995). Some Old and Some New Results on Combinatorial Properties of Fixed-point Free Maps. Annals of the New York Academy of Sciences, 767(1), 1-16.

4. Engelking, R. (1977). General topology, PWN.

5. Engelking, R. (1995). Theory of dimensions, finite and infinite.

6. Van Douwen, E. K. (1993). X and fixed-point free maps. Topology and its Applications, 51(2), 191-195.

7. Van Hartskamp, M. A., Vermeer, J. (1996). On colorings of maps. Topology and its Applications, 73(2),091-181.

8. Van Mill, J. (1999). Easier proofs of coloring theorems. Topology and its Applications, 97(1-2), 155-163.

9. Wallman, H. (1938). Lattices and topological spaces. Annals of Mathematics, 112-126.

10. Yong, K. D. (1988). The structure of homeomorphisms and embeddings of topological spaces (Doctoral dissertation, Ph. D. Thesis, Silesian University, Katowice, Poland, 1988 (in Polish)).