Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Existence at least one nontrivial solution for a class of problems involving both p(x)-Laplacian and p(x)-biharmonic

Atieh Ramzannia Jalali[1] ✉; Ghasem Alizadeh Afrouzi[2]

1. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, babolsar, Iran.

✉E-mail: Jalali.atieh@yahoo.com

2. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, babolsar, Iran.

E-mail: afrouzi@umz.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
30 December 2019
Revised form:
31 December 2019
Accepted:
8 July 2020
Published online:
14 May 2022

Keywords:

p(x)-Biharmonic operator;
p(x)-Harmonic operator;
Palais-Smale condition;
Mountain Pass Theorem;
Generalized Lebesgue-Sobolev space.

ABSTRACT

Introduction

Fourth order equations have attracted many author's interest in different area of applied mathematics and physics. The interest in studying such problems arise in many applications such as: Micro Electro Mechanical systems, thin film theory, surface diffusion on solids, interface dynamics and flow in Hele-Shaw cells. The importance of considering such equations is due to many physical examples using mathematical modeling, which is mostly seen in the field of Newtonian fluids and elastic mechanics, in particular, the electro-rheological fluids.

Consider the following p-biharmonic elliptic equation:

$$\{\Delta_p^2 u + \Delta_p u + \lambda V(x)|u|^{p-2}u = f(x,u) \qquad x \in R^N, \quad as \quad \lambda \to \infty \qquad (2)$$

where $\lambda > 0$, $p > 1$, $N > 2p$ and $V \in C(R^N, R^+)$ satisfying some certain conditions. Giri Choudhuri and Pradhan

proved the existence and concentration phenomena of solutions on the set $V^{-1}(0)$. In 2017, the existence at the

least one non-decreasing sequence of positive eigenvalues has been studied by several authors for following problem

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)}^2 u - \Delta_{p(x)} u = \lambda |u|^{p(x)-2}u & \text{in } \overline{\Omega} \\ u \in W^{2,p(x)} \cap W_0^{1,p(x)} \end{cases} \qquad (3)$$

Main Result

The purpose of this paper is to investigate the existence of solution to the following problem involving both p(x)-Laplacian and p(x)-biharmonic.

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)}^2 u + \Delta_{p(x)} u = \lambda |u|^{p(x)-2}u + \mu f(x,u) & \text{in } \overline{\Omega} \\ u \in W^{2,p(x)} \cap W_0^{1,p(x)} \end{cases} \qquad (1)$$

where Ω is a bounded smooth domain R^N. Parameters λ, μ are positive and $p, q: \overline{\Omega} \to R$ are functions that satisfying in the following conditions

$$1 < p^- = \min_{x\in\Omega} p(x) \le p(x) \le p^+ = \max_{x\in\Omega} p(x) < \infty$$

$\Delta^2_{p(x)}u := \Delta(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u)$ is the p(x)-biharmonic operator which is a natural generalization of the p-biharmonic.

In this paper, using the Mountain Pass Theorem, we prove that the problem (1) has at least one nontrivitial solution.

Therefore we can prove our main result.

Theorem1 (Mountain Pass Theorem): Let $(X, \|.\|)$ be a real Banach space and let $I: X \to R$ be a continuously Gateaux differentiable function, such that $I(0) = 0$ and satisfying the (PS) condition. Suppose that

(a) there exist constants $\rho, \alpha > 0$ such that $I(u) \ge \alpha$ if $\|u\| = \rho$,

(b) there exists $e \in X$ with $\|e\| > \rho$ such that $I(e) \le 0$.

Then I possesses a critical value $C \ge \alpha$, which can be characterized as

$$C = inf_{\gamma\in\Gamma} max_{u\in\gamma([0,1])} I(u),$$

where

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \quad ; \quad \gamma(0) = 0 \quad , \quad \gamma(1) = e\}.$$

We prove main result using a positive constant that is introduced as follows and Mountain Pass Theorem.

$$\lambda_* = \inf_{\substack{u\in X \\ \|u_n\|>1}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\Delta u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)})dx}{\int_\Omega |u|^{p^-}dx}$$

Theorem2: Let $p^- < p(x) \le p_2^*(x)$ and $F: \overline{\Omega} \times R \to R$ with $F(x, 0) = 0$. Assume that following assumptions hold:

(a) for all $t \in R$, $x \mapsto F(x, t)$ is measurable.

(b) for almost every where $x \in \overline{\Omega}$ ،$x \mapsto F(x, t)$ is locally lipschitz.

(c) for all $\lambda > 0$, there exists $c_\lambda > 0$ such that

$$\lambda|u|^{p(x)} < u^{p^-} + c_\lambda \qquad \forall u \in \overline{\Omega}$$

(d) for all $x \in \overline{\Omega}$ and $t \in R$, there exists $c > 0$ such that

$$|f(x,t)| \le c(1 + |t|^{p(x)-1})$$

(e) for $\lambda < \frac{p^-\lambda_*}{p^+}$ and uniformly for $x \in \overline{\Omega}$, we have

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t|t|^{p(x)-2}} \le \lambda$$

(f) there exists $t^* > 0$ such that for $\theta > p^+$, have

$$0 < \theta F(x,\xi) \le f(x,\xi)\xi \qquad ; \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}\ , |\xi| \ge t^*.$$

Then there exists $\mu_* > 0$ such that for $\mu \in (0, \mu_*)$, the problem (1) has at least one nontrivial weak solution in X.

How to cite: Ramzannia Jalali, A., Alizadeh Afrouzi, Gh; (2022). Existence at least one nontrivial solution for a class of problems involving both p(x)-Laplacian and p(x)-biharmonic. *Mathematical Researches*, 8 (1), 167-183

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

وجود حداقل یک جواب نابدیهی برای رده ای از مسائل شامل هر دو عملگر p(x) لاپلاسین و p(x) بای هارمونیک

عطیه رمضان‌نیا جلالی[1]✉، قاسم علیزاده افروزی[2]

۱. نویسندهٔ مسئول گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. پست الکترونیکی: Jalali.atieh@yahoo.com

۲. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. پست الکترونیکی: afrouzi@umz.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۰۹

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۱۰/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۸

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:

عملگر p(x) بای هارمونیک،

عملگر p(x) هارمونیک،

شرط پالایس اسمل[1]،

آمارهٔ ناوردا،

برآوردگر هموردا.

چکیده

ما وجود جواب ضعیف نابدیهی را برای مسأله زیر بررسی می‌کنیم

$$\begin{cases}\Delta^2_{p(x)}u + \Delta_{p(x)} = \lambda|u|^{p(x)-2}u + \mu f(x,u) & \text{در } \overline{\Omega} \\ u \in W^{2,p(x)} \cap W_0^{1,p(x)} \end{cases} \qquad (۱)$$

تجزیه و تحلیل ما به طور کلی به بحث‌های تغییراتی مبتنی بر قضیهٔ گذرگاه کوهی و بعضی از نظریه‌های اخیر بر روی فضای سوبولف-لبگ تعمیم یافته است. در این مقاله وجود حداقل یک جواب ضعیف نابدیهی برای مسأله (۱) تضمین می‌شود. به طور دقیق‌تر ما با به کارگیری قضیهٔ گذرگاه کوهی امبروستی[2] و رابین ویتز[3] و تحت شرایط مناسب نشان می‌دهیم که یک عدد مثبت λ_* وجود دارد به طوری که مسأله (۱) دارای حداقل یک جواب ضعیف غیربدیهی است.

استناد: رمضان‌نیا جلالی، عطیه؛ علیزاده افروزی، قاسم؛ (۱۴۰۱). وجود حداقل یک جواب نابدیهی برای رده ای از مسائل شامل هر دو عملگر p(x) لاپلاسین و p(x) بای هارمونیک. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۱۸۳-۱۶۷.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

[1] Palais-Smale
[2] Ambrosetri
[3] Rabinowitz

۱. مقدمه

هدف از این مقاله بررسی وجود جواب برای یک مسئله شامل هر دو عملگر p(x) لاپلاسین و p(x) بای هارمونیک است

$$\begin{cases}\Delta^2_{p(x)}u+\Delta_{p(x)}u=\lambda|u|^{p(x)-2}u+\mu f(x,u) & \text{در}\ \overline{\Omega}\\ u\in W^{2,p(x)}\cap W_0^{1,p(x)}\end{cases} \qquad (۱.۱)$$

که $\Omega\subset R^N$ یک دامنه هموار کران‌دار، λ,μ پارامترهای مثبت هستند و توابع پیوسته $p,q:\overline{\Omega}\to R$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$1<p^-=\min_{x\in\Omega}p(x)\le p(x)\le p^+=\max_{x\in\Omega}p(x)<\infty$$

عملگر $\Delta^2_{p(x)}u:=\Delta(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u)$ یک عملگر مرتبه چهارم است که عملگر p(x) بای هارمونیک نامیده می‌شود و تعمیمی از عملگر p بای هارمونیک است. همچنین $\Delta_{p(x)}u\coloneqq div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ یک عملگر هارمونیک است. خواننده برای مطالعه کاربردهایی از مسائل عملگر p(x) بای هارمونیک می تواند به مقالات [۱, ۲, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۲۰, ۲۲, ۲۴, ۲۵] رجوع نماید. می‌دانیم که مسائل با شرایط رشد p(x) پیچیدگی‌های بیشتری نسبت به حالت p(x)=p دارد و تکنیک‌ها و روش‌های استفاده شده برای حل هر دو دسته از این‌گونه مسائل کاملاً متفاوت است. مسائل تغییراتی و معادلات دیفرانسیل از جمله مسائلی هستند که به دلیل کاربردهایشان موضوع تحقیقاتی بسیاری از پژوهشگران در دهه‌های اخیر است.

در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ چهارم در فیزیک ریاضیات نمود فراوان یافته است. از جمله این کاربردها می‌توان به سیستم‌های مکانیکی میکرو الکترو، نظریه فیلم نازک، انتشار سطح روی جامدات، جریان در سلول ها هل شاو[۱] و سیستم‌های چندفازی اشاره کرد. [۱۰, ۲۶] اهمیت بررسی این‌گونه معادلات به دلیل توجیه بسیاری از نمونه‌های فیزیکی با استفاده از مدلسازی ریاضی است که می توان بیشتر در زمینه مایعات نیوتنی و مکانیک آلاستیک به ویژه مایعات الکتروشناسی (مایعات هوشمند) رویت کرد. برای جزئیات بیشتر به مقالات [۱۳, ۲۷] مراجعه نمایید.

معادله بیضوی p بای هارمونیک زیر را درنظربگیرید:

$$\left\{\Delta^2_p u+\Delta_p u+\lambda V(x)|u|^{p-2}u=f(x,u) \qquad x\in R^N, \quad as \quad \lambda\to\infty\right. \qquad (۲,۱)$$

که در آن $\lambda>0$، $p>1$، $N>2p$ و $V\in C(R^N,R^+)$ با شرایط و ویژگی‌های مشخصی هستند. در مقالهٔ [۱۱] نویسنده سعی کرده است وجود و جواب‌های متمرکز را برای مسأله (۲.۱) روی مجموعه $V^{-1}(0)$ ثابت نماید. در سال ۲۰۱۷ وجود جواب‌هایی از مسأله زیر توسط سه پژوهشگر در مقالهٔ [۱۹] بررسی شده است.

[1] Hele-shaw

(۳.۱)

$$\begin{cases} \Delta^2_{p(x)}u - \Delta_{p(x)}u = \lambda|u|^{p(x)-2}u & \text{در } \overline{\Omega} \\ u \in W^{2,p(x)} \cap W_0^{1,p(x)} \end{cases}$$

که λ در مسأله فوق نقش مقدار ویژه را ایفا می‌کند. در حقیقت هدف از حل مسأله (۳.۱) پیدا کردن دنباله‌ای غیرصعودی از مقادیر ویژهٔ نامنفی $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ بوده است.

انگیزهٔ اصلی ما در این مقاله بررسی وجود جواب ضعیف غیربدیهی برای مسأله (۱.۱) روی یک دامنهٔ مشخصی از λ است. ما مقاله را با بیان مفاهیم پایه‌ای و خواص فضای سوبولف تعمیم یافته در بخش ۲ آغاز می‌کنیم. نتایج اصلی در بخش ۳ مطرح می‌شود. در حقیقت ما از شرط پالایس اسمل که توسط امبرستی و رابین ویتز در مقاله [۳] مطرح شده است، استفاده خواهیم کرد تا وجود جواب ضعیف نابدیهی از مسأله (۱.۱) را تضمین کنیم.

۲. مفاهیم پایه

در این بخش ما بعضی مفاهیم و نتایج اصلی از فضای سوبولف - لبگ با توان متغیر را یادآوری می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر و دقیقتر می‌توان به مقالات [۸,۲۳] رجوع نمود.

فضای لبگ تعمیم یافته یک فضای باناخ انعکاسی و تفکیک‌پذیر است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u: \Omega \to R, \quad measurable \quad and \quad \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx < \infty\}$$

که در آن $p(x) \in C_+(\Omega)$ و برای هر $x \in \Omega$،

$$C_+(\overline{\Omega}) := \{p \in C(\overline{\Omega}) \quad : \quad p(x) > 1\}.$$

این فضا مجهز به نرم زیر است و با نام لوکسمبرگ[۲] معرفی می‌گردد.

$$|u|_{p(x)} = \inf\{\mu \quad : \quad \int_\Omega |\frac{u(x)}{\mu}|^{p(x)}dx \leq 1\}$$

فضای مزدوج $L^{p(x)}$، $L^{q(x)}$ است که در آن $q(x)$ مزدوج تابع $p(x)$ است. بدان معنا که برای هر $x \in \Omega$،

$$\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{p(x)} = 1.$$

همچنین برای هر $u \in L^{p(x)}$ و $v \in L^{q(x)}$ نابرابری هولدر را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$|\int_\Omega u(x)v(x)dx| \leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-})|u|_{p(x)}|v|_{q(x)}$$

در ادامه فضای سوبولف با توان متغیر به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$W^{k,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)} \quad : \quad D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega), \quad |\alpha| \leq k\}$$

[2]Luxemburg

که

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_N^{\alpha_N}}\quad with\quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\quad and\quad |\alpha|=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i.$$

و نرم زیر را برای فضای $W^{k,p(x)}(\Omega)$ در نظرمی‌گیریم:

$$\| u \|_{k,p(x)}=\sum_{|\alpha|\le k}|D^\alpha u|_{p(x)}$$

با این نرم فضای $W^{k,p(x)}(\Omega)$ یک فضای باناخ انعکاسی و تفکیک‌پذیر است. با تعریف توان بحرانی به صورت

$$p_k^*(x)=\begin{cases}\dfrac{Np(x)}{N-kp(x)} & \text{اگر}\ \mathrm{kp(x)}<\mathrm{N}\\ \infty & \text{اگر}\ \mathrm{kp(x)}\ge\mathrm{N}\end{cases}$$

به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $x\in\overline{\Omega}$، $p(x)<p_k^*(x)$. همچنین می‌توان یادآوری کرد که $W_0^{k,p(x)}$ بستار C_0^∞ در فضای $W^{k,p(x)}$ است.

در این مقاله جواب‌های ضعیف از مسأله (۱.۱) در فضای سوبولف $X=W^{2,p(x)}\cap W_0^{1,p(x)}$ با نرم زیر قابل بررسی است.

$$\|u\|_{p(x)}=|\Delta u|_{p(x)}+|\nabla u|_{p(x)}$$

در مقالهٔ [۲۸] معادل بودن دو نرم $|\Delta u|_{p(x)}$ و $\|u\|_{p(x)}$ اثبات شده است. قرار دهید

$$\|u\|=\inf\{\mu\quad:\quad\int_\Omega(|\frac{\Delta u}{\mu}|^{p(x)}+|\frac{\nabla u}{\mu}|^{p(x)})dx\le 1\}$$

آن‌گاه $\|u\|$ با نرم‌های $\|u\|_{p(x)}$ و $|\Delta u|_{p(x)}$ در X با هم معادلند.

گزارهٔ ۲-۱. *تابع* $J:X\to X^*$ در شرط S_+ صدق می‌کند هرگاه برای هر همگرایی ضعیف $u_n\subset X$ به u در X و

$$\limsup_{n\to\infty}(J(u_n),u_n-u)\le 0 \tag{۱.۲}$$

همگرایی u_n تحت توپولوژی قوی به u در X نتیجه شود.

گزارهٔ ۲-۲. [۹] (۱) برای هر $p,q\in C_+(\overline{\Omega})$ به طوری که برای هر $x\in\overline{\Omega}$، $q(x)\le p_k^*(x)$ آن‌گاه یک جاددهی پیوسته $W^{k,p(x)}\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ وجود دارد. همچنین اگر $\le$ با $<$ جایگزین شود یک جاددهی فشرده خواهیم داشت.

(۲) نامساوی پوانکاره برای هر $u\in W^{k,p(x)}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\exists C_p>0\quad:\quad |u|_{p(x)}\le C_p|\nabla u|_{p(x)}$$

(۳) فرض کنید $0<|\Omega|<R$، $p_1,p_2\in C(\overline{\Omega})$ و $1<p_i^-<p_i^+<\infty$ اگر $p_1<p_2$ آن‌گاه $L_2^{p(x)}\hookrightarrow L_1^{p(x)}$.

گزارهٔ۲-۳. [۲۸] با درنظرگرفتن $I(u)=\int_\Omega(|\Delta u|^{p(x)}+|\nabla u|^{p(x)})dx$ برای هر $u\in L^p$، روابط زیر نتیجه

می‌شود:

$$\|u\| < (=;> 1) \quad \Leftrightarrow \quad I(u) < (=;> 1) \tag{۱}$$

(۲) اگر $\|u\| \leq 1$ آن‌گاه

$$\|u\|^{p^+} \leq \mathrm{I}(u) \leq \|u\|^{p^-}$$

(۳) اگر $\|u\| \geq 1$ آن‌گاه

$$\|u\|^{p^-} \leq \mathrm{I}(u) \leq \|u\|^{p^+}$$

$$\|u\| \to 0 \ (\to \infty) \quad \Leftrightarrow \quad I(u) \to 0 \ (\to \infty) \tag{۴}$$

لم ۲-۴. فرض کنید $\Omega \subset R^N$ باز $(u_n)_n \subset L^p(\Omega)$، $p \in [1,\infty]$ باشد به طوری که $u_n \to u$ زمانی که $n \to \infty$ در $L^p(\Omega)$. آن‌گاه یک زیردنبالهٔ $(u_{n_j})_j$ و تابع $v \in L^p(\Omega)$ وجود دارد به طوری که

(الف) $(u_{n_j})(x) \to u(x)$ تقریباً همه جا در Ω زمانی که $j \to \infty$.

(ب) برای هر j، تقریباً همه جا در Ω داریم. $|(u_{n_j})(x)| \leq v(x)$

برای یافتن جواب‌هایی از مسأله (۱.۱)، ما تابعک انرژی $J(u) = \Phi(u) - \lambda\varphi(u) - \mu\psi(u)$ را برای هر $u \in X$ متناظر با مسأله (۱.۱) درنظر می‌گیریم که در آن توابع Φ، φ و ψ به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) + \Phi_2(u) \tag{۲.۲}$$

که در آن

(۳.۲)

$$\Phi_1(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\Delta u|^{p(x)} dx \quad , \quad \Phi_2(u) \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$$

$$\varphi(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx \tag{۴.۲}$$

$$\psi(u) = \int_\Omega F(x,u) dx \tag{۵.۲}$$

می‌گوییم u یک جواب ضعیف برای معادلهٔ (۱.۱) است هرگاه رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\int_\Omega (|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\Delta v + |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v)dx - \lambda\int_\Omega |u|^{p(x)-2}uvdx$$
$$-\mu\int_\Omega f(x,u)uvdx = 0$$

در مقالهٔ [۱۹] ثابت شده است که $\Phi_1',\ \Phi_2' \in C^1(X,R)$ و دارای ویژگی‌های زیر هستند:

لم ۲-۵. (الف) عملگری پیوسته، کراندار، از نوع S_+ و اکیداً یکنوا هستند. (ب) هومومورفیسم هستند.

قضیهٔ ۲-۶. [۱۸] فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ حقیقی و $I: X \to R$ یک تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر گتو به طوری که $I(0) = 0$ باشد و در شرط پالایس اسمل صدق کند. همچنین فرض کنید:

(الف) ثابت های مثبت ρ و α وجود دارد به طوری که $I(u) \le \alpha$ اگر $\|u\| = \rho$.

(ب) $e \in X$ با $\|e\| > \rho$ وجود دارد به طوری که $I(e) \le 0$.

آن‌گاه I دارای نقطه بحرانی $C \ge \alpha$ است که به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$C = inf_{\gamma\in\Gamma} max_{u\in\gamma([0,1])} I(u),$$

که

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],X) \quad ; \quad \gamma(0) = 0 \quad , \quad \gamma(1) = e\}.$$

۳. نتایج اصلی

لم ۳-۱. فضای $W^{2,p(x)} \cap W_0^{1,p(x)}$ یک زیرفضای بسته از $W^{2,p(x)}$ است.

برهان: فرض می کنیم $u_n \in W^{2,p(x)} \cap W_0^{1,p(x)}$ دنباله ای همگرا تحت توپولوژی قوی در $W^{2,p(x)}$ باشد. کافیست نشان دهیم که $u \in W^{2,p(x)} \cap W_0^{1,p(x)}$. از معادل بودن نرم ها و خاصیت جاددهی $W^{2,p(x)} \hookrightarrow L^{p(x)}$ می توان نوشت

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,p(x)}\cap W_0^{1,p(x)}} \le c\|\Delta(u_n-u_m)\|_{L^p} \le c\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u_n-u_m)\right\|_{L^p}$$

و داریم

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,p(x)}\cap W_0^{1,p(x)}} \le c\|u_n - u_m\|_{W^{2,p(x)}}$$

بنابراین u_n دنباله‌ای کوشی در فضای $W^{2,p(x)} \cap W_0^{1,p(x)}$ است و به نقطه‌ای از این فضا همگراست.

لم ۳-۲. فرض کنید $p^- < p(x) \le p_2^*(x)$ آن‌گاه یک ثابت $\lambda_* > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\lambda_* = \inf_{\substack{u\in X \\ \|u_n\|>1}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\Delta u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)})dx}{\int_\Omega |u|^{p^-}dx}$$

برهان: طبق خاصیت جاددهی $W^{2,p(x)} \hookrightarrow L^{p(x)}$ می‌توان یک ثابت مثبت c را چنان یافت به طوری که

$$\|u\| \geq c|u|_{p^-}$$

از طرفی دیگر اگر $\|u\| > 1$ باشد داریم

$$\int_\Omega (|\Delta u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)})dx > \|u\|^{p^-}$$

از نابرابری زیر حکم نتیجه می شود.

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\Delta u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)})dx \geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega (|\Delta u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)})dx \geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^-} \geq \frac{c^{p^-}}{p^+}\int_\Omega |u|^{p^-}dx$$

قضیهٔ ۳-۳. فرض کنید $p^- < p(x) \leq p_2^*(x)$ و تابع $F: \overline{\Omega} \times R \to R$ را با $F(x,0) = 0$ در نظر بگیرید. اگر شرایط زیر برقرار باشد

الف) برای هر $t \in R$، $x \mapsto F(x,t)$ اندازه‌پذیر است.

ب) برای تقریباً همه جا $x \in \overline{\Omega}$، $x \mapsto F(x,t)$ موضعا لیپ شیتز است.

ج) برای هر $\lambda > 0$ ثابت $c_\lambda > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\lambda|u|^{p(x)} < u^{p^-} + c_\lambda \qquad \forall u \in \overline{\Omega}$$

د) به ازای هر $x \in \overline{\Omega}$ و $t \in R$ داریم

$$|f(x,t)| \leq c(1 + |t|^{p(x)-1})$$

که $c > 0$ است.

ه) برای $\lambda < \frac{p^-\lambda_*}{p^+}$ و به طور یکنواخت برای هر $x \in \overline{\Omega}$ داریم

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t|t|^{p(x)-2}} \leq \lambda$$

و) ثابت $t^* > 0$ وجو دارد به طوری که برای $\theta > p^+$ نابرابری زیر برقرار است.

$$0 < \theta F(x,\xi) \leq f(x,\xi)\xi \qquad ; \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}\ , |\xi| \geq t^*$$

آن‌گاه $\mu_* > 0$ وجود دارد به طوری که برای $\mu \in (0,\mu_*)$ مسئله (۱.۱) دارای یک جواب غیربدیهی در X است.

برهان: برای اثبات کافی‌ست نشان دهیم که از این فرضیات می‌توانیم حکم قضیهٔ (۲-۶) را نتیجه گرفت. اثبات را در چهار گام انجام می‌دهیم.

گام اول: نشان می‌دهیم که J در شرط پالایس اسمل صدق می‌کند. برای این هدف فرض می کنیم $\{u_n\} \subset X$، $J(u_n)$ کران‌دار و زمانی که $n \to \infty$ داشته باشیم $J'(u_n) \to 0$ آن‌گاه نشان می‌دهیم که دنبالهٔ $\{u_n\}$ کران‌دار است. فرض خلف می کنیم یعنی زمانی که $n \to \infty$، $\|u_n\| \to \infty$. قرار می دهیم $z_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ و فرض می‌کنیم

$$z_n \longrightarrow z \quad in \quad L^p$$

با استفاده از لم (۲-۴) داریم

$$z_n(x) \longrightarrow z(x) \quad a.e \quad in \quad \Omega$$

و

$$z_n \rightharpoonup z \quad in \quad X$$

طبق خاصیت لیپ شیتز تابع F، $t \in (0,1)$ وجود دارد به طوری که

$$|F(x, u_n(x)) - F(x,0)| \leq t|u_n(x)|$$

آن‌گاه برای هر $\xi > 0$ خواهیم داشت

$$\left|\int_\Omega \frac{F(x, u_n(x))}{\|u_n\|^\xi}\right| \leq \int_\Omega \frac{|F(x, u_n(x))|}{\|u_n\|^\xi} dx \leq \int_\Omega \frac{t|u_n(x)|}{\|u_n\|^\xi} dx \leq \frac{\alpha}{\|u_n\|^{\xi-1}}$$

با حدگیری از طرفین زمانی که $n \to \infty$ نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x, u_n(x))}{\|u_n\|^\xi} = 0$$

چون $J(u_n)$ کران‌دار است بر همین اساس داریم

$$(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} (|\Delta u_n|^{p(x)} + |\nabla u_n|^{p(x)}) dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |u_n|^{p(x)} dx - \mu \int_\Omega F(x, u_n) dx \leq M$$

بنابراین

$$\frac{1}{p^+} (\int_\Omega (|\Delta u_n|^{p(x)} + |\nabla u_n|^{p(x)}) dx - \frac{\lambda}{p^-} \int_\Omega |u_n|^{p(x)} dx - \mu \int_\Omega F(x, u_n) dx \leq M$$

با استفاده از تعریف λ_* و فرض (ج) به رابطهٔ زیر می رسیم

$$\frac{1}{p^+} (\int_\Omega (|\Delta u_n|^{p(x)} + |\nabla u_n|^{p(x)}) dx - \frac{\lambda}{p^-} \int_\Omega |u_n|^{p^-} dx - c_\lambda \, meas(\Omega) - \mu \int_\Omega F(x, u_n) dx \leq M$$

و

$$\frac{1}{p^+}\Big(\int_\Omega (|\Delta u_n|^{p(x)}+|\nabla u_n|^{p(x)})dx-\frac{\lambda}{p^-\lambda_*}\int_\Omega (|\Delta u_n|^{p(x)}+|\nabla u_n|^{p(x)})dx-c_\lambda\, meas(\Omega)-\mu\int_\Omega F(x,u_n)dx\le M$$

در این صورت

$$\Big(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{p^-\lambda_*}\Big)\int_\Omega (|\Delta u_n|^{p(x)}+|\nabla u_n|^{p(x)})dx-c_\lambda\, meas(\Omega)-\mu\int_\Omega F(x,u_n)dx\le M \qquad (۱.۳)$$

دو حالت در نظر می گیریم

بررسی حالت اول: فرض می کنیم $\lambda>0$ و $\|\nabla u_n\|\le 1$ برای هر $n\ge 1$،

$$\int_\Omega \Big(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{p^-\lambda_*}\Big)|\nabla u_n|^{p^+}dx-c_\lambda\, meas(\Omega)-\mu\int_\Omega F(x,u_n)dx\le M$$

با تقسیم طرفین بر $\|u_n\|^{p^+}$ رابطه زیر نتیجه می‌شود

$$\int_\Omega \Big(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{p^-\lambda_*}\Big)|\nabla z_n|^{p^+}dx-\frac{c_\lambda\, meas(\Omega)}{\|u_n\|^{p^+}}-\mu\int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^{p^+}}dx\le \frac{M}{\|u_n\|^{p^+}}$$

حال با توجه به این‌که زمانی که $n\to\infty$، $\|u_n\|\to\infty$ نتیجه می‌شود

$$\nabla z_n\longrightarrow 0 \quad in \quad L^p(\Omega) \qquad (۲.۳)$$

در صورتی که $\|\nabla u_n\|>1$ فرض شود آن‌گاه نابرابری زیر را خواهیم داشت

$$\int_\Omega \Big(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{p^-\lambda_*}\Big)|\nabla u_n|^{p^-}dx-c_\lambda\, meas(\Omega)-\mu\int_\Omega F(x,u_n)dx\le M$$

با تقسیم طرفین بر $\|u_n\|^{p^-}$ رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\int_\Omega \Big(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{p^-\lambda_*}\Big)|\nabla z_n|^{p^-}dx-\frac{c_\lambda\, meas(\Omega)}{\|u_n\|^{p^-}}-\mu\int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^{p^-}}dx\le \frac{M}{\|u_n\|^{p^-}}$$

با حدگیری داریم

$$\nabla z_n\longrightarrow 0 \quad in \quad L^p(\Omega) \qquad (۳.۳)$$

از روابط (۲.۳) و (۳.۳) می‌توان نوشت

$$\nabla z_n\longrightarrow 0 \quad in \quad L^p(\Omega)$$

بررسی حالت دوم: فرض می کنیم $0 \leq \lambda$ و $\|\nabla u_n\| \geq 1$ برای هر $n \geq 1$، در این صورت داریم

$$\int_\Omega \frac{1}{p^+}|\nabla u_n|^{p^+}dx - c_\lambda\, meas(\Omega) - \mu\int_\Omega F(x,u_n)dx \leq M$$

به طریق مشابه قسمت قبل با تقسیم طرفین بر $\|u_n\|^{p^+}$ رابطه زیر نتیجه می شود

$$\frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla z_n|^{p^+}dx - \frac{c_\lambda\, meas(\Omega)}{\|u_n\|^{p^+}} - \mu\int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^{p^+}}dx \leq \frac{M}{\|u_n\|^{p^+}}$$

سپس با حدگیری $n \to \infty$، $\|u_n\| \to \infty$ داریم

$$\nabla z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p(\Omega) \tag{۴.۳}$$

به طور مشابه می توان ثابت کرد که اگر $\|\nabla u_n\| < 1$ باشد آن‌گاه

$$\nabla z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p(\Omega) \tag{۵.۳}$$

درنتیجه از (۴.۳) و (۵.۳) داریم

$$\nabla z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p(\Omega)$$

بنابراین با بررسی هر دوحالت $0 \leq \lambda$ و $0 > \lambda$ رابطه زیر را می‌توان نتیجه گرفت

$$\nabla z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p(\Omega)$$

با استفاده از رابطهٔ (۱.۳) و تعریف λ_* به طریقی مشابه با بررسی هر دو حالت به شیوه قبل نتیجه می‌شود که

$$z_n \to 0 \qquad , \qquad \Delta z_n \to 0 \quad in \quad L^p(\Omega)$$

در نتیجه

$$z_n \to 0 \qquad in \quad X$$

و این با فرض این‌که $\| z_n \| = 1$ در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و $\{u_n\}$ دنباله‌ای کران‌دار در X است. حال فرض می‌کنیم

$$u_n \rightharpoonup u \quad in \quad X$$

با استفاده از مشتق‌پذیری J داریم

$$(J'(u_n), u_n - u) = (\Phi'(u_n), u_n - u) - \lambda(\varphi'(u_n), u_n - u) - \mu\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)dx$$

در نتیجه

$$(\Phi'(u_n), u_n - u) = (J'(u_n), u_n - u) + \lambda(\varphi'(u_n), u_n - u) + \mu \int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)dx$$

چون طبق فرض $J'(u_n) \to 0$ و $u_n - u$ دنباله‌ای کران‌دار در X است. بنابراین داریم

$$|(J'(u_n), u_n - u)| \le \|J'(u_n)\| \|u_n - u\|$$

و طبق همگرایی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} (J'(u_n), u_n - u) \to 0$$

از (د)، خاصیت جاددهی و نابرابری هولدر نابرابری زیر حاصل می شود

$$\int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)dx \le \int_\Omega c\big(1 + |u_n|^{p(x)-1}\big)(u_n - u)dx$$
$$\le \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{q^-}\right)\left(\int_\Omega c\big(1 + |u_n|^{p(x)-1}\big)^{q(x)}\right)^{\frac{1}{q(x)}}\left(\int_\Omega |u_n - u|^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p(x)}}$$

با حدگیری زمانی که $n \to \infty$ داریم

$$\int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)dx \to 0$$

از طرفی دیگر به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که زمانی که $n \to \infty$

$$(\varphi'(u_n), u_n - u) \to 0$$

بنابراین

$$\limsup_{n\to\infty} (\Phi'(u_n), u_n - u) \le 0$$

از آن‌جایی Φ' که از نوع S_+ است می‌توان نتیجه گرفت که $u_n \to u$ در X.

گام دوم: حال ادعا می کنیم که J در قضیه گذرگاه کوهی صدق می‌کند یا به عبارتی نشان می‌دهیم که $\mu_* > 0$ و $\rho, r > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $\mu \in (0, \mu_*)$ داریم

$$J(u) > r > 0 \qquad \forall u \in X, \quad \|u\| = \rho.$$

با استفاده از فرض (ه) برای هر $\epsilon > 0$ می‌توان $\delta_\epsilon > 0$ چنان یافت به طوری که

$$\frac{f(x,t)}{|t|^{p(x)-2}} \le \lambda + \epsilon \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}\ , \qquad |t| < \delta_\epsilon$$

در نتیجه

$$F(x,\xi) \leq \frac{\lambda+\epsilon}{p^+}|\xi|^{p^+} \qquad \forall\, |\xi| \leq \delta_\epsilon$$

حال به کمک فرض (د) و خاصیت جاددهی داریم

$$J(u) \geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^-} - \frac{\lambda}{p^-}\int_\Omega \left|u\right|^{p^-}dx + c_\lambda\, meas(\Omega) - \mu\int_{|u|\leq\,\delta_\epsilon}\frac{\lambda+\epsilon}{p^+}|u|^{p^+}\ dx - k\mu\int_{|u|>\,\delta_\epsilon}\left|u\right|^{p^+}dx \geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^-} - \frac{\lambda}{p^-}\|u\|^{p^-} - \mu\frac{\lambda+\epsilon}{p^+}\|u\|^{p^+} - k\mu\|u\|^{p^+}$$

برای یک ثابت مثبت k. از این رو با انتخاب

$$\mu_* = \left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{p^-}\right)\left(\frac{p^+}{\lambda+\epsilon+kp^+}\right)$$

خواهیم داشت

$$J(u) \geq \frac{1}{p^+}\left(1-\mu(\lambda+\epsilon)\right) - \left(\frac{\lambda}{p^-} + k\mu\right) > 0 \qquad \forall u \in X, \quad \|u\| = 1.$$

گام سوم: در مقاله [۱۸] برای هر $x \in \overline{\Omega}$، $z \geq 1$ و $|\xi| > t^*$ درستی نابرابری زیر ثابت شده است که به شکل زیر بیان می‌شود:

$$F(x,z\xi) \geq F(x,\xi)z^\theta$$

در حالتی که $z = 1$ است حکم واضح است در غیر این صورت $|\xi| > t^*$ را ثابت می گیریم و تابع $g(x,z) \coloneqq F(x,z\xi)$ را برای هر $x \in \overline{\Omega}$ و $z \geq 1$ تعریف می کنیم. با استفاده از فرض (و) داریم

$$\frac{f(x,z\xi)}{F(x,z\xi)} \geq \frac{\theta}{z\xi}$$

با استفاده از تعریف g و مشتق‌پذیری داریم

$$\frac{g'(x,z)}{g(x,z)} = \frac{\xi F'(x,z\xi)}{F(x,z\xi)} \geq \frac{\theta}{z}, \qquad \theta F(x,z) \leq F'(x,z)z$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطهٔ فوق در فاصلهٔ $[1,z]$ نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$\log\frac{g(x,z)}{g(x,1)} \geq \log z^\theta$$

از این رو

$$g(x,z) \geq g(x,1)z^{\theta} \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, |\xi| > t^*, \ \ z \geq 1$$

گام چهارم: ادعا می‌کنیم برای $u_0 \in X$ زمانی که $z \to \infty$ داریم

$$J(uz_0) \to -\infty$$

برای این هدف $u_0 \in X$ را طوری درنظر می گیریم که $meas(\{ \ x \in \overline{\Omega} \ ; \ u_0(x) \geq t^*\}) > 0$. با در نظر گرفتن $|\xi| > t^*$ با $z > 1$ برای تابع θ- فرا همگن $F(x,\xi)$ داریم

$$J(zu_0) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (\left|\Delta z u_0\right|^{p(x)} + \left|\nabla z u_0\right|^{p(x)}) dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left| z u_0 \right|^{p(x)} dx - \mu \int_{\Omega} F(x, z u_0) dx$$
$$\leq \frac{1}{p^-} \left(\|zu_0\|^{p^+} + \|zu_0\|^{p^-} \right) - \frac{\lambda}{p^+} \int_{\Omega} |zu_0|^{p^-} dx - z^{\theta} \mu \int_{|u_0| \geq t^*} F(x, u_0) dx$$
$$+ M\mu \, meas\,(\Omega) \leq \frac{1}{p^-} \left(z^{p^+} \|u_0\|^{p^+} + z^{p^-} \|u_0\|^{p^-} \right) - \frac{\lambda}{p^+} z^{p^-} \int_{\Omega} |u_0|^{p^-} dx -$$
$$z^{\theta} \mu \int_{|u_0| \geq t^*} F(x, u_0) dx + M\mu \, meas\,(\Omega) \leq \frac{2z^{p^+}}{p^-} \|u_0\|^{p^+} - z^{\theta} \mu \int_{|u_0| \geq t^*} F(x, u_0) dx$$
$$+ M\mu \, meas\,(\Omega)$$

که $M \coloneqq \{|F(x,\xi)| \ : \ x \in \overline{\Omega}, \ |\xi| \leq t^*\}$ است.چون طبق فرض $\theta > p^+$ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

References

1. Afrouzi G.A., Chung N.T., Mirzapour M., "Existence of Solutions for a Class of p(x)-Biharmonic Problems without (A-R) Type Conditions", International Journal of Mathematical Analysis,Vol. 12, 2018, no. 11, 505 - 515.

2. Afouzi G.A., Mirzapour M., Chung N.T., "Existence and non-existence of solutions for a p(x)-biharmonic problem".Electron. J. Differ. Equ. 2015, 158.

3. Ambrosetti A., Rabinowitz P. H., "Dual variational methods in critical point theory and applications", J. Funct. Anal., 4 (1973), 349–381.

4. Ayoujil A., El Amrouss A.R., "On the spectrum of a fourth order elliptic equation with variable exponent", Nonlinear Anal. 71 (2009), 4916–4926.

5. Ayoujil A., El Amrouss A.R, "Continuous spectrum of a fourth order nonhomogenous elliptic equation with variable exponent", Electron. J. Differential Equations 2011 (2011) 24, 12 pp.

6 . El Amrouss A.R, Ourraoui A., "Existence of solutions for a boundary value problem involving a p(x)-biharmonic operator", Bol. Soc. Paran. Mat. 31 (2013), 179–192.

7. Fan X., Han X., "Existence and multiplicity of solutions for p(x)-Laplacian equations in R^N", Nonlinear Anal. 59 (2004), 173–188.

8. Fan X.L., Shen J.S., Zhao D., "Sobolev embedding theorems for spaces $w^{m,p(x)}$", J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), 749-760.

9. Fan X., Zhao D., "On the spaces $L^{p(x)}$and $w^{m,p(x)}$", J. Math. Anal. Appl. 263(2001), 424–446.

10. Ferrero A., Warnault G., "On a solutions of second and fourth order elliptic with power type nonlinearities", Nonlinear Anal. T.M.A. (70)8, (2009), pp. 2889-2902.

11. Giri R.K., Choudhuri D., Pradhan Sh., "Existence and Concentration of solutions for a class of elliptic PDEs involving p-biharmonic operator",[math.AP] 8 Jun 2016. http://arxiv.org/abs/ 1606.02512.

12. Graef J.R, Heidarkhani S., Kong L. , "Multiple solutions for a class of $(p_1, p_2, \dots, p_n)$-biharmonic system", Communications on Pure and Applied Analysis, Vol. 12(2013).

13. Halsey T. C.,"Electrorheological fluids", Science 258 (1992), pp. 761-766.

14. Heidarkhani S., Afrouzi G. A., Moradi S., Caristi G., "A variational approach for solving p(x)-biharmonic equations with Navier boundary conditions",Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 25, 1–15.

15. Heidarkhani S., Tian Y., Tang C., "Existence of three solutions for a class of $(p_1, p_2, \dots, p_n)$–biharmonic systems with Navier boundary conditions", Annales Polonici Mathematici, Vol. 104 (2012). 261-277.

16. Heidarkhani S., Afrouzi G. A., Moradi S., Caristi G.,Ge Bin, "Existence of one weak solution for p(x)-biharmonic equations with Navier boundary conditions", Z. Angew. Math. Phys.73 (2016).

17. Kefi K., "p(x)-Laplacian with indefinite weight", Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 4351–4360.

18. Khademloo S., Fattah M. "An existence result for a Kirchhoff p(x)-Laplacian equation", MATEMATIQKIVESNIKA, 68, 3 (2016), 215-224.

19. El Khalil A., Alaoui M.D. M., Touzani A., "On the Spectrum of problems involving both p(x)-Laplacian and P(x)-Biharmonic", Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal Vol. 2 (2017) , No. 5, 134-140.

20. Kong L., "Eigenvalues for a fourth order elliptic problem", Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 249–258.

21. Kong L., "Multiple solutions for fourth order elliptic problems with p(x)-biharmonic operators", Opuscula Math. 36, no. 2 (2016), 253–264.

22. Kong L., "On a fourth order elliptic problem with a p(x)-biharmonic operator", Appl. Math. Lett. 27 (2014), 21–25.

23. $Kov`a\check{c}ik$ O., $R\breve{a}kosna'k\,J.$ (1991); "On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$", Czechoslovak Math. J. 41 ,592- 618.

24. Mihalescu M., Radulesu V., "A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids", Proc. R. Soc. A 462 (2006), 2625–2641.

25. Mihalescu M., Radulesu V., "On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent", Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 2929–2937.

26. Myers, T. G., "Thin films with high surface tension", SIAM Review, 40 (3) (1998), 441-462.

27. Ruzicka M., "Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory", Lecture Notes in Mathematics, 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

28. Zang A., Fu Y., "Interpolation inequalities for derivatives in variable exponent Lebesgue-Sobolev spaces", Nonlinear Anal. 69(2008), 3629-3636.