



Kharazmi University

An upper bound for the nilpotency class of Leibniz algebras

Hesam Safa¹ 

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Bojnord, Bojnord, Iran.

✉E-mail: h.safa@ub.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
2 January 2020
Revised form:
19 July 2020
Accepted:
19 January 2021
Published online:
22 November 2022

Keywords:

Leibniz algebra;
Nilpotency
class;
Minimal generating
set.

Introduction

The notion of Leibniz algebras is introduced by Blokh in 1965 as a noncommutative version of Lie algebras and rediscovered by Loday in 1993. A Leibniz algebra is a vector space A over a field F together with a bilinear map $[,] : A \times A \rightarrow A$ usually called the Leibniz bracket of A , satisfying the Leibniz identity:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y], \quad x,y,z \in A.$$

The classification of nilpotent Leibniz algebras is one of the most important subject in the study of Leibniz algebras. In the present paper, we obtain an upper bound for the nilpotency class of a finitely generated nilpotent Leibniz algebra A in terms of the maximum of the nilpotency classes of maximal subalgebras of A and the minimal number of generators of A .

Main results

Throughout the paper, any Leibniz algebra A is considered over a fixed field F , c denotes the maximum of the nilpotency classes of maximal subalgebras of A , d is the minimal number of generators of A and $[]$ denotes the integral part. Moreover, we inductively define: $A^1=A$ and $A^n = [A^{n-1},A]$, for $n \geq 2$.

Lemma 1. Let A be a nilpotent Leibniz algebra and M be a maximal subalgebra of A . Then M is a two-sided ideal of A .

Lemma 2. Let I be a two-sided ideal of a Leibniz algebra A and $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ be a subset of A which contains at least n elements of I ($n \leq k$). Then $[[[x_1, x_2], x_3], \dots, x_k] \in I^n$.

Theorem 3. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra such that $d > 1$. Then A is nilpotent of class at most $\lfloor cd/(d-1) \rfloor$.

Corollary 4. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra and $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ be a minimal generating set of A with $d > 1$. Then

$$cl(A) \leq \max_{1 \leq i \leq d} \left\lfloor \frac{cl(M_i) d}{d-1} \right\rfloor,$$

where M_i is the two-sided ideal generated by the set $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d\}$ and cl denotes the nilpotency class.

Corollary 5. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra of class k with $d > 1$. Then $c \leq k \leq 2c$.

Corollary 6. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra such that $d > c+1$. Then A is nilpotent of class c .

Corollary 7. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra of class $2c$ such that $d > 1$. Then $d=2$.

Proposition 8. There is not any non-Lie Leibniz algebra with at least two generators, whose maximal subalgebras are all abelian.

How to cite: Safa, H., (2022) An upper bound for the nilpotency class of Leibniz algebras. *Mathematical Researches*, 8 (3), 144-152



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

کران بالایی برای کلاس پوچ توانی جبرهای لاینیتز

حسام صفا^۱

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران. پست الکترونیکی: h.safa@ub.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
---------------	-------

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۲

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۲۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۳۰

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

در این مقاله، کلاس پوچ توانی جبرهای لاینیتز با تولید متناهی را با کلاس پوچ توانی زیرجبرهای آنها مقایسه می‌کنیم و کران بالایی برای آن ارائه می‌دهیم. به عنوان نتیجه اصلی نشان می‌دهیم که اگر A یک جبر لاینیتز پوچ توان با تولید متناهی و $d > 1$ تعداد مولدهای کمین آن باشد و C ماکزیمم کلاس پوچ توانی زیرجبرهای بیشین A باشد، آن گاه A پوچ توان از کلاس حداکثر $[cd/(d-1)]$ است که در آن $[]$ تابع جزء صحیح می‌باشد. همچنین با ارائه ساختار یک خانواده از جبرهای لاینیتز نشان می‌دهیم که در حالت $d = 1$ ، کلاس پوچ توانی یک جبر لاینیتز، بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند که در واقع بعد آن جبر لاینیتز است.

واژه‌های کلیدی:

جبر لاینیتز،

کلاس پوچ توانی،

مجموعه مولد کمین.

استناد: صفا، حسام؛ (۱۴۰۱). کران بالایی برای کلاس پوچ توانی جبرهای لاینیتز. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۳)، ۱۵۲-۱۴۴.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

مفهوم جبرهای لاینیتز به عنوان تعمیمی از جبرهای لی در سال ۱۹۶۵ توسط بلوخ و با عنوان D -جبر معرفی شد [۲] و سپس، در سال ۱۹۹۳ توسط لودی مورد مطالعه و بررسی بیشتر قرار گرفت [۸]. فرض کنید F یک میدان باشد. یک جبر لاینیتز، یک فضای برداری A روی F است به همراه نگاشت دو خطی $A \times A \rightarrow A : [,]$ که براکت لاینیتز نامیده می‌شود و در اتحاد زیر موسوم به اتحاد لاینیتز صدق کند:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y], \quad x, y, z \in A$$

حال اگر به ازای هر عنصر x از A داشته باشیم $[x, x] = 0$ ، آن‌گاه جبر لاینیتز A به یک جبر لی تبدیل می‌شود. در این حالت $0 = [x+y, x+y] = [x, y] + [y, x]$ و در نتیجه اتحاد لاینیتز به اتحاد ژاکوبی تبدیل خواهد شد:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

به عکس، هر جبر لی یک جبر لاینیتز است. بنابراین جبرهای لاینیتز را می‌توان به عنوان نسخه غیرجابه‌جایی جبرهای لی در نظر گرفت.

زیرفضای برداری H از جبر لاینیتز A یک زیرجبر نامیده می‌شود، اگر برای هر $x, y \in H$ داشته باشیم $[x, y] \in H$. همچنین زیرجبر I ، یک ایده‌آل چپ (راست) A نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $g \in I$ و هر $x \in A$ داشته باشیم $[g, x] \in I$ ($[x, g] \in I$). زیرجبر I را یک ایده‌آل دوطرفه از A می‌نامیم، هرگاه هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست A باشد.

فرض کنید A یک جبر لاینیتز باشد. در این صورت $A^2 = [A, A] = \langle [x, y], [y, x] \mid x, y \in A \rangle$ زیرجبر مشتق A نامیده شده و سری مرکزی پایینی A ، سری زیر از ایده‌آل‌های دوطرفه A است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \geq A^2 \geq \dots \geq A^n \dots$$

که $A^1 = A$ و $A^n = [A^{n-1}, A]$ ($n \geq 2$). توجه شود که منظور از $\langle X \rangle$ زیرجبر تولید شده توسط زیرمجموعه X از جبر لاینیتز A ، کوچکترین زیرجبر A است که شامل X باشد. جبر لاینیتز A پوچتوان از کلاس n نامیده می‌شود هرگاه $A^{n+1} = 0$ و $A^n \neq 0$. رده بندی جبرهای لاینیتز پوچتوان یکی از مهم‌ترین مسائل این حوزه است و مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است [۴، ۱]. این موضوع که در جبرهای لاینیتز براکت $[x, x]$ لزوماً صفر نیست، مطالعه این جبرها را نسبت به جبرهای لی به مراتب دشوارتر می‌سازد [۵، ۳]. همچنین مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از زیرساختار سره آنها موضوع بسیاری از پژوهش‌ها بوده است به ویژه در نظریه گروه‌ها [۷، ۶] و همچنین در جبرهای لی [۱۰]. هدف ما در این مقاله، یافتن یک کران بالا برای کلاس پوچتوانی جبرهای لاینیتز بر حسب کلاس پوچتوانی زیرجبرهای بیشین و همچنین تعداد مولدهای کمین آن‌هاست. به عنوان نتیجه اصلی نشان می‌دهیم که اگر A یک جبر لاینیتز پوچتوان با تولید متناهی و $d > 1$ تعداد مولدهای کمین آن باشد و c ماکزیمم کلاس پوچتوانی

زیرجبرهای بیشین A باشد، آنگاه A پوچ توان از کلاس حداکثر $[cd/(d-1)]$ است که در آن $[]$ تابع جزء صحیح می‌باشد. همچنین منظور از مولد را در یک مثال ساده می‌توان توضیح داد. فرض کنید A یک جبر لاینیتز دو بعدی با پایه $\{x_1, x_2\}$ و براکت ناصفر $[x_1, x_1] = x_2$ باشد (بقیه براکت‌ها را صفر تعریف می‌کنیم). در این صورت x_1 مولد A است و $d = 1$ در حالی که $\dim A = 2$. بنابراین بعد، تعداد عناصر پایه برای فضای برداری A است در حالی که در مفهوم مولد براکت لاینیتز نیز دخیل است. از این رو می‌توان یک جبر لاینیتز متناهی مولد از بعد نامتناهی ساخت که دارای پایه‌ای به صورت $\{x_1, [x_1, x_1], [[x_1, x_1], x_1], \dots\}$ باشد.

به وضوح جبر لاینیتز تک مولدی بالا پوچتوان نیست. در مثال آخر این مقاله، خانواده‌ای از جبرهای لاینیتز تک مولدی را ارائه می‌دهیم که کلاس پوچتوانی آن‌ها بیشترین مقدار ممکن را اختیار می‌کنند.

نتایج اصلی

جهت اثبات نتایج اصلی این بخش، از لم‌های زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنید A یک جبر لاینیتز پوچ توان و M یک زیرجبر بیشین از آن باشد. در این صورت M یک ایده‌آل دوطرفه از A می‌باشد.

اثبات. فرض کنید A پوچ توان از کلاس C باشد و همچنین داشته باشیم $A = M + A^2$. در این صورت

$$A^2 = [A, A] = [M + A^2, M + A^2] \leq M^2 + A^3 \leq A^2$$

و در نتیجه $A^2 = M^2 + A^3$. بنابراین

$$A^2 = [M + A^3, M + A^3] \leq M^2 + A^4 \leq A^2$$

و لذا $A^2 = M^2 + A^4$. با ادامه این روند در نهایت خواهیم داشت $A^2 = M^2 + A^{c+1}$ و از آنجا که A پوچ توان از کلاس C است داریم $A^2 = M^2$. از این رو فرض اولیه $A = M + A^2$ ایجاب می‌کند که $A = M + M^2 = M$ و این یک تناقض است. بنابراین، بیشین بودن M در A ایجاب می‌کند که $M = M + A^2$ و در نتیجه $A^2 \leq M$. از این رو M یک ایده‌آل دوطرفه از A است.

لم ۲. فرض کنید I یک ایده‌آل دوطرفه از جبر لاینیتز A و $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ یک زیرمجموعه از عناصر A باشد که شامل حداقل n عنصر از I هست ($n \leq k$). در این صورت

$$[[[x_1, x_2], x_3], \dots, x_k] \in I^n$$

اثبات. اگر $n=1$ ، آن‌گاه رابطه فوق به وضوح برقرار است. به استقراء فرض کنید که این رابطه برای همه اعداد طبیعی کمتر از n برقرار باشد. اگر $x_k \in I$ ، آن‌گاه مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ شامل حداقل $n-1$ عنصر از ایده‌آل I می‌باشد و لذا بنا بر فرض استقراء داریم:

$$[[[x_1, x_2], x_3], \dots, x_{k-1}] \in I^{n-1}$$

که این اثبات را کامل می‌کند. حال فرض کنید x_k به I متعلق نباشد. در این صورت مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ شامل n عنصر از I می‌باشد. با ادامه روند فوق روی x_{k-1}, x_{k-2}, \dots می‌توان اثبات را کامل کرد. در نتایج زیر، A یک جبر لاینیتز پوچ‌توان با تولید متناهی، d تعداد مولدهای کمین آن، c ماکزیمم کلاس پوچ‌توانی زیرجبرهای بیشین A و $[]$ تابع جزء صحیح می‌باشند.

قضیه ۳. فرض کنید A یک جبر لاینیتز پوچ‌توان با تولید متناهی باشد به طوری که $d > 1$. در این صورت A پوچ‌توان از کلاس حداکثر $[cd/(d-1)]$ است.

اثبات. فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ یک مجموعه مولد کمین برای A باشد و $k = [cd/(d-1)]$ کافی است نشان دهیم که به ازای هر $y_i \in X$

$$[[[y_1, y_2], y_3], \dots, y_{k+1}] = 0.$$

قرار دهید $[r = [c/(d-1)]$ به وضوح $k = c + r$ و در نتیجه با استفاده نامساوی مثلث در تابع جزء صحیح خواهیم داشت $k+1 < (r+1)d$. این نامساوی نشان می‌دهد که همه عناصر X نمی‌توانند بیشتر از r دفعه در براکت $[[[y_1, y_2], y_3], \dots, y_{k+1}]$ ظاهر شوند. بنابراین عنصری از X مانند x_1 حداکثر r دفعه در این براکت ظاهر می‌شود. حال از آن‌جا که مجموعه $\{x_2, \dots, x_d\}$ جبر A را تولید نمی‌کند، لذا زیرجبر بیشین M موجود است به طوری که شامل این مجموعه باشد. بنابر لم ۱، M یک ایده‌آل دوطرفه از A است. از طرف دیگر $\{y_1, y_2, \dots, y_{k+1}\}$ شامل حداقل $k+1 - r = c+1$ عنصر از M می‌باشد. از این رو بنا بر لم ۲، $[[[y_1, y_2], y_3], \dots, y_{k+1}] \in M^{c+1}$ و از آن‌جا که بنابر فرض، زیرجبرهای بیشین A پوچ‌توان از کلاس حداکثر c هستند، اثبات کامل می‌شود. با استفاده از قضیه بالا نتایج مهم زیر حاصل می‌شوند.

نتیجه ۴. فرض کنید A یک جبر لاینیتز پوچ‌توان و $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ یک مجموعه مولد کمین آن باشد به طوری که $d > 1$. همچنین فرض کنید M_i ایده‌آل تولید شده توسط مجموعه $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d\}$ باشد. در این صورت

$$cl(A) \leq \max_{1 \leq i \leq d} \left[\frac{cl(M_i) d}{d-1} \right],$$

که cl بیانگر کلاس پوچ‌توانی است.

همچنین با استفاده از قضیه ۳، نتایج زیر حاصل می‌شوند.

نتیجه ۵. فرض کنید A یک جبر لاینیتز پوچ توان از کلاس k و با تولید متناهی باشد به طوری که $d > 1$. در این صورت $c \leq k \leq 2c$.

اثبات. به وضوح $1 \leq [d/(d-1)] \leq 2$ و از این رو $c \leq [cd/(d-1)] \leq 2c$.

نتیجه ۶. فرض کنید A یک جبر لاینیتز پوچ توان با تولید متناهی باشد به طوری که $d > c+1$. در این صورت A پوچ توان از کلاس c است.

اثبات. با توجه به این که تابع $\frac{d}{d-1}$ نزولی است، اگر $d > c+1$ ، آنگاه $[\frac{cd}{d-1}] \leq c$. حال از آنجا که زیرجبرهای بیشین A پوچ توان از کلاس حداکثر c هستند، در نتیجه A پوچ توان از کلاس c است.

نتیجه ۷. فرض کنید A یک جبر لاینیتز پوچ توان از کلاس $2c$ و با تولید متناهی باشد به طوری که $d > 1$. در این صورت $d = 2$.

مثال زیر نشان می‌دهد که کران بالایی ارائه شده در قضیه ۳ در برخی از جبرهای لاینیتز، کوچکترین کران بالا برای کلاس پوچ توانی است.

مثال ۸. فرض کنید A جبر لاینیتز پنج بعدی با پایه $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ و براکت‌های ناصفر زیر باشد:

$$[x_3, x_2] = -[x_2, x_3] = x_4, \quad [x_3, x_1] = -[x_1, x_3] = x_5, \quad [x_2, x_1] = -[x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_1] = x_5$$

و $[x_4, x_2] = -[x_2, x_4] = x_5$ و سایر براکت‌ها صفر تعریف می‌شوند. به وضوح A را می‌توان با عناصر x_1 و x_2 تولید کرد لذا $d = 2$. همچنین می‌توان دید که همه زیرجبرهای سره A پوچ توان از کلاس حداکثر دو هستند. بنا بر قضیه ۳ جبر لاینیتز A پوچ توان از کلاس حداکثر چهار است. از طرف دیگر

$$[[[x_2, x_1], x_2], x_2] = [[x_3, x_2], x_2] = [x_4, x_2] = x_5 \neq 0$$

که نشان می‌دهد A پوچ توان از کلاس سه نیست و در نتیجه کلاس پوچ توانی A چهار است.

در میان جبرهای لی، جبر لی هایزنبرگ از بعد سه (تا حد یکرختی) تنها جبر لی ناآبلی پوچ توان است که همه زیرجبرهای سره آن آبلی هستند [۹]. در گزاره زیر نشان می‌دهیم که در جبرهای لاینیتز غیر لی با بیش از یک مولد، چنین جبری وجود ندارد.

گزاره ۹. هیچ جبر لاینیتز غیر لی با بیش از یک مولد وجود ندارد که همه زیرجبرهای بیشین آن آبلی باشند.

اثبات. به برهان خلف فرض کنید که A یک چنین جبر لاینیتزی باشد که توسط حداقل دو عنصر تولید می‌شود. همچنین فرض کنید $x \in A$ و M زیرجبر بیشین A شامل x باشد که بنابر فرض آبلی است. لذا $[x, x] = 0$ و در نتیجه A در واقع یک جبر لی است که یک تناقض است.

برخلاف جبرهای لاینیتزی، اگر یک جبر لی با یک مولد تولید شود، آنگاه آبلی خواهد بود. در واقع همین موضوع منشأ تفاوت‌های بنیادی در ساختار جبرهای لاینیتزی و لی می‌باشد. همچنین در نتیجه ۵ دیدیم که اگر $d > 1$ ، آن‌گاه $2c$ کران بالایی برای کلاس پوچ‌توانی جبرهای لاینیتزی پوچ‌توان با تولید متناهی است. در مثال زیر خواهیم دید که در حالت $d = 1$ چنین کران بالایی برای کلاس پوچ‌توانی وجود ندارد.

تعریف ۱۰. جبر لاینیتزی A از بعد n پوچ فیلیفرم نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $1 \leq i \leq n+1$ داشته باشیم $\dim A^i = n - i + 1$ (به مرجع [۱] تعریف ۳ رجوع شود).

مثال ۱۱. فرض کنید A یک جبر لاینیتزی پوچ فیلیفرم تولید شده توسط یک عنصر x_1 باشد. اگر $\dim A = 1$ در این صورت $[x_1, x_1] = 0$ زیرا به عنوان مثال اگر $[x_1, x_1] = x_1$ ، آن‌گاه با استفاده از اتحاد لاینیتزی خواهیم داشت:

$$x_1 = [x_1, x_1] = [x_1, [x_1, x_1]] = [[x_1, x_1], x_1] - [[x_1, x_1], x_1] = 0$$

که یک تناقض است. بنابراین در این حالت در واقع A یک جبر لی آبلی (پوچ‌توان از کلاس یک) است. حال فرض کنید $\dim A = 2$ و $\{x_1, x_2\}$ پایه‌ای برای آن با براکت ناصفر $[x_1, x_1] = x_2$ باشد. در این صورت A پوچ‌توان از کلاس دو می‌باشد زیرا $[x_2, x_1] = [x_1, x_1], x_1] = 0$ و همچنین بقیه براکت‌های سه‌تایی نیز صفر می‌شوند.

در حالت کلی فرض کنید $\dim A = n$ و $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ پایه‌ای آن با براکت‌های ناصفر $[x_i, x_1] = x_{i+1}$ که

$$1 \leq i \leq n-1 \text{ (برای جزئیات بیشتر به [۱] لم ۱ رجوع شود). از آن‌جا که براکت (n+1) تایی}$$

$$[[[x_1, x_1], x_1], \dots, x_1] = [[x_2, x_1], \dots, x_1] = \dots = [x_n, x_1] = 0$$

و براکت n تایی زیر

$$[[[x_1, x_1], x_1], \dots, x_1] = [[x_2, x_1], \dots, x_1] = \dots = x_n \neq 0$$

لذا A پوچ‌توان از کلاس n می‌باشد. به راحتی دیده می‌شود که همه زیرجبرهای سره A آبلی هستند. همچنین ساختار A به گونه‌ای است که به ازای هر $1 \leq i \leq n+1$ ، پایه‌ای برای A^i است و از این رو $\dim A^i = n - i + 1$. این مثال نشان می‌دهد که کلاس پوچ‌توانی جبرهای لاینیتزی تک مولدی می‌تواند بیشترین مقدار ممکن را اختیار کند.

قدردانی

از داوران محترم که پیشنهادهای مفیدشان موجب بهبود کیفیت مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

References

1. Ayupov Sh. A., Omirov B. A., "On some classes of nilpotent Leibniz algebras", Sib. Math. J., 42 (2001) 15-24.
2. Blokh A., "A generalization of the concept of a Lie algebra", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165 (1965) 471-473.
3. Demir I., "Classification of 5-dimensional complex nilpotent Leibniz algebras", PhD Thesis, North Carolina State University, NC. USA, (2016).
4. Demir I., "Classification of 5-dimensional complex nilpotent Leibniz algebras", Contemp. Math., 713 (2018) 95-119.
5. Demir I., Misra K. C., Stitzinger E., "On classification of four dimensional nilpotent Leibniz algebras", Commun. Algebra, 45 (2016) 1012-1018.
6. Falco M. D., Giovanni F. D., Musella C., Sysak Y. P., "Groups with many abelian subgroups", J. Algebra, 347 (2011) 83-95.
7. Gupta C. K., "A bound for the class of certain nilpotent groups", J. Aust. Math. Soc., 5 (1965) 506-511.
8. Loday J. L., "Une version non commutative des algebres de Lie: des algebres de Leibniz", Enseign. Math., 39 (1993) 269-293.
9. Safa H., "A bound for the nilpotency class of a Lie algebra", Iran. J. Math. Sci. Inform. 14 (2019) 153-156.
10. Varea V. R., "Lie algebras whose proper subalgebras are either semisimple, abelian or almost-abelian", Hiroshima Math. J., 24 (1994) 221-241.