Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

An upper bound for the nilpotency class of Leibniz algebras

Hesam Safa[1]

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Bojnord, Bojnord, Iran.

E-mail: h.safa@ub.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
2 January 2020
Revised form:
19 July 2020
Accepted:
19 January 2021
Published online:
22 November 2022

Keywords:
Leibniz algebra;
Nilpotency class;
Minimal generating set.

ABSTRACT

Introduction

The notion of Leibniz algebras is introduced by Blokh in 1965 as a noncommutative version of Lie algebras and rediscovered by Loday in 1993. A Leibniz algebra is a vector space A over a field F together with a bilinear map $[\ ,\ ] : A \times A \longrightarrow A$ usually called the Leibniz bracket of A, satisfying the Leibniz identity:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]\ ,\ \ x,y,z \in A.$$

The classification of nilpotent Leibniz algebras is one of the most important subject in the study of Leibniz algebras. In the present paper, we obtain an upper bound for the nilpotency class of a finitely generated nilpotent Leibniz algebra A in terms of the maximum of the nilpotency classes of maximal subalgebras of A and the minimal number of generators of A.

Main results

Throughout the paper, any Leibniz algebra A is considered over a fixed field F, c denotes the maximum of the nilpotency classes of maximal subalgebras of A, d is the minimal number of generators of A and $\lfloor\ \rfloor$ denotes the integral part. Moreover, we inductively define: $A^1=A$ and $A^n = [A^{n-1},A]$, for $n \geq 2$.

Lemma 1. Let A be a nilpotent Leibniz algebra and M be a maximal subalgebra of A. Then M is a two-sided ideal of A.

Lemma 2. Let I be a two-sided ideal of a Leibniz algebra A and $\{x_1,x_2, \dots ,x_k\}$ be a subset of A which contains at least n elements of I $(n \leq k)$. Then $[[[x_1,x_2],x_3], \dots ,x_k] \in I^n$.

Theorem 3. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra such that $d > 1$. Then A is nilpotent of class at most $\lfloor cd/(d-1)\rfloor$.

Corollary 4. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra and $\{x_1,x_2, \dots ,x_d\}$ be a minimal generating set of A with $d > 1$. Then

$$cl(A) \leq \max_{1\leq i\leq d} \lfloor \frac{cl(Mi)\, d}{d-1} \rfloor,$$

where Mi is the two-sided ideal generated by the set $\{ x_1 , \dots, x_{i-1} , x_{i+1} , \dots ,x_d\}$ and cl denotes the nilpotency class.

Corollary 5. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra of class k with $d > 1$. Then $c \leq k \leq 2c$.

Corollary 6. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra such that $d > c+1$. Then A is nilpotent of class c.

Corollary 7. Let A be a finitely generated nilpotent Leibniz algebra of class $2c$ such that $d > 1$. Then $d=2$.

Proposition 8. There is not any non-Lie Leibniz algebra with at least two generators, whose maximal subalgebras are all abelian.

How to cite: Safa, H., (2022) An upper bound for the nilpotency class of Leibniz algebras. *Mathematical Researches*, 8 (3), 144-152

پژوهش‌های ریاضی

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴٦
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵۵٤

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

کران بالایی برای کلاس پوچ‌توانی جبرهای لایبنیتز

حسام صفا[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران. پست الکترونیکی: h.safa@ub.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۲
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۲۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۳۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
جبر لایبنیتز،
کلاس پوچ‌توانی،
مجموعه مولد کمین.

چکیده

در این مقاله ،کلاس پوچ‌توانی جبرهای لایبنیتز با تولید متناهی را با کلاس پوچ‌توانی زیرجبرهای آنها مقایسه می‌کنیم و کران بالایی برای آن ارائه می‌دهیم. به عنوان نتیجه اصلی نشان می‌دهیم که اگر A یک جبر لایبنیتز پوچ‌توان با تولید متناهی و $d > 1$ تعداد مولدهای کمین آن باشد و c ماکزیمم کلاس پوچ‌توانی زیرجبرهای بیشین A باشد، آن‌گاه A پوچ‌توان از کلاس حداکثر $\lfloor cd/(d-1) \rfloor$ است که در آن $\lfloor\ \rfloor$ تابع جزء صحیح می‌باشد. همچنین با ارائه ساختار یک خانواده از جبرهای لایبنیتز نشان می‌دهیم که در حالت $d = 1$، کلاس پوچ‌توانی یک جبر لایبنیتز، بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند که در واقع بعد آن جبر لایبنیتز است.

استناد: صفا، حسام؛ (۱۴۰۱). کران بالایی برای کلاس پوچ‌توانی جبرهای لایبنیتز. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۱۵۲-۱۴۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

مفهوم جبرهای لایبنیتز به عنوان تعمیمی از جبرهای لی در سال ۱۹۶۵ توسط بلوخ و با عنوان D-جبر معرفی شد [۲] و سپس، در سال ۱۹۹۳ توسط لودی مورد مطالعه و بررسی بیشتر قرار گرفت [۸]. فرض‌کنید F یک میدان باشد. یک جبر لایبنیتز، یک فضای برداری A روی F است به همراه نگاشت دو خطی $[\ ,\ ] : A \times A \longrightarrow A$ که براکت لایبنیتز نامیده می‌شود و در اتحاد زیر موسوم به اتحاد لایبنیتز صدق کند:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]\ ,\ \ x,y,z \in A$$

حال اگر به ازای هر عنصر x از A داشته باشیم $[x,x] = 0$، آن‌گاه جبر لایبنیتز A به یک جبر لی تبدیل می‌شود. در این حالت $0 = [x+y,x+y] = [x,y] + [y,x]$ و در نتیجه اتحاد لایبنیتز به اتحاد ژاکوبی تبدیل خواهد شد:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

به عکس، هر جبر لی یک جبر لایبنیتز است. بنابراین جبرهای لایبنیتز را می‌توان به عنوان نسخه غیرجابه‌جایی جبرهای لی در نظر گرفت.

زیرفضای برداری H از جبر لایبنیتز A یک زیرجبر نامیده می‌شود، اگر برای هر $x,y \in H$ داشته باشیم $[x,y] \in H$. همچنین زیرجبر I ، یک ایده‌آل چپ (راست) A نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $g \in I$ و هر $x \in A$ داشته باشیم $[g,x] \in I$ ($[x,g] \in I$). زیرجبر I را یک ایده‌آل دوطرفه از A می‌نامیم، هرگاه هم ایده‌آل چپ وهم ایده‌آل راست A باشد.

فرض کنید A یک جبر لایبنیتز باشد. در این صورت $A^2 = [A,A] = \langle [x,y],[y,x] \mid x,y \in A \rangle$ زیرجبر مشتق A نامیده شده و سری مرکزی پایینی A، سری زیر از ایده‌آل‌های دوطرفه A است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \geq A^2 \geq \ \cdots \ \geq A^n \cdots$$

که $A^1 = A$ و $A^n = [A^{n-1},A]$ $(n \geq 2)$. توجه شود که منظور از $\langle X \rangle$ زیرجبر تولید شده توسط زیرمجموعه X از جبر لایبنیتز A، کوچکترین زیرجبر A است که شامل X باشد. جبر لایبنیتز A پوچتوان از کلاس n نامیده می‌شود هرگاه $A^{n+1} = 0$ و $A^n \neq 0$. رده بندی جبرهای لایبنیتز پوچ‌توان یکی از مهم‌ترین مسائل این حوزه است و مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است [۴,۱]. این موضوع که در جبرهای لایبنیتز براکت [x,x] لزوما صفر نیست، مطالعهٔ این جبرها را نسبت به جبرهای لی به مراتب دشوارتر می‌سازد [۵,۳]. همچنین مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از زیرساختار سرهٔ آنها موضوع بسیاری از پژوهش‌ها بوده است به ویژه در نظریه گروه‌ها [۷,۶] و همچنین درجبرهای لی [۱۰] . هدف ما در این مقاله، یافتن یک کران بالا برای کلاس پوچ‌توانی جبرهای لایبنیتز بر حسب کلاس پوچتوانی زیرجبرهای بیشین و همچنین تعداد مولدهای کمین آن‌هاست. به عنوان نتیجه اصلی نشان می‌دهیم که اگر A یک جبر لایبنیتز پوچ‌توان با تولید متناهی و $d > 1$ تعداد مولدهای کمین آن باشد و c ماکزیمم کلاس پوچتوانی

زیرجبرهای بیشین A باشد، آنگاه A پوچ‌توان از کلاس حداکثر $\lfloor cd/(d-1) \rfloor$ است که در آن $\lfloor\ \rfloor$ تابع جزء صحیح می‌باشد. همچنین منظور از مولد را در یک مثال ساده می‌توان توضیح داد. فرض کنید A یک جبر لایبنیتز دو بعدی با پایهٔ $\{x_1,x_2\}$ و براکت ناصفر $[x_1,x_1] = x_2$ باشد (بقیه براکت‌ها را صفر تعریف می‌کنیم) . دراین صورت x_1 مولد A است و $d = 1$ در حالی که $\dim A = 2$. بنابراین بعد، تعداد عناصر پایه برای فضای برداری A است در حالی که در مفهوم مولد براکت لایبنیتز نیز دخیل است. از این رو می‌توان یک جبر لایبنیتز متناهی مولد از بعد نامتناهی ساخت که دارای پایه‌ای به صورت $\{x_1, [x_1,x_1], [[x_1,x_1],x_1], \dots\}$ باشد.

به وضوح جبر لایبنیتز تک مولدی بالا پوچتوان نیست. در مثال آخر این مقاله، خانواده‌ای از جبرهای لایبنیتز تک مولدی را ارائه می‌دهیم که کلاس پوچتوانی آن‌ها بیشترین مقدار ممکن را اختیار می‌کنند.

نتایج اصلی

جهت اثبات نتایج اصلی این بخش، از لم‌های زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنید A یک جبر لایبنیتز پوچ‌توان و M یک زیرجبر بیشین از آن باشد. در این صورت M یک ایده‌آل دوطرفه از A می‌باشد.

اثبات. فرض کنید A پوچ‌توان از کلاس c باشد و همچنین داشته باشیم $A = M+A^2$. در این صورت

$$A^2 = [A,A] = [M+A^2, M+A^2] \leq M^2 + A^3 \leq A^2$$

و در نتیجه $A^2 = M^2 + A^3$. بنابراین

$$A^2 = [M+A^3, M+A^3] \leq M^2 + A^4 \leq A^2$$

و لذا $A^2 = M^2 + A^4$. با ادامه این روند در نهایت خواهیم داشت $A^2 = M^2 + A^{c+1}$ و از آن‌جا که A پوچ‌توان از کلاس c است داریم $A^2 = M^2$. از این رو فرض اولیه $A = M+A^2$ ایجاب می‌کند که $A = M+M^2 = M$ و این یک تناقض است. بنابراین، بیشین بودن M در A ایجاب می‌کند که $M = M+A^2$ و در نتیجه $A^2 \leq M$. از این‌رو M یک ایده‌آل دوطرفه از A است.

لم ۲. فرض کنید I یک ایده‌آل دوطرفه از جبر لایبنیتز A و $\{x_1,x_2, \dots ,x_k\}$ یک زیرمجموعه از عناصر A باشد که شامل حداقل n عنصر از I هست $(n \leq k)$. در این صورت

$$[[[x_1,x_2],x_3], \dots ,x_k] \in I^n$$

اثبات. اگر $n=1$ ، آن‌گاه رابطهٔ فوق به وضوح برقرار است. به استقراء فرض کنید که این رابطه برای همه اعداد طبیعی کمتر از n برقرار باشد. اگر $x_k \in I$ ، آن‌گاه مجموعه $\{x_1,x_2, \dots ,x_{k-1}\}$ شامل حداقل $n-1$ عنصر از ایده‌آل I می‌باشد و لذا بنا بر فرض استقراء داریم:

$$[[[x_1,x_2],x_3], \dots ,x_{k-1}] \in I^{n-1}$$

که این اثبات را کامل می‌کند. حال فرض کنید x_k به I متعلق نباشد. در این صورت مجموعه $\{x_1,x_2, \dots ,x_{k-1}\}$ شامل n عنصر از I می‌باشد. با ادامه روند فوق روی x_{k-1} ، x_{k-2} و . . . می‌توان اثبات را کامل کرد.

در نتایج زیر، A یک جبر لایبنیتز پوچ‌توان با تولید متناهی، d تعداد مولدهای کمین آن، c ماکزیمم کلاس پوچ‌توانی زیرجبرهای بیشین A و $\lfloor\ \rfloor$ تابع جزء صحیح می‌باشند.

قضیهٔ ۳. فرض کنید A یک جبر لایبنیتز پوچ‌توان با تولید متناهی باشد به طوری که $d > 1$. در این صورت A پوچ‌توان از کلاس حداکثر $\lfloor cd/(d-1) \rfloor$ است.

اثبات. فرض کنید $X = \{x_1,x_2, \dots ,x_d\}$ یک مجموعه مولد کمین برای A باشد و $k = \lfloor cd/(d-1) \rfloor$. کافی است نشان دهیم که به ازای هر $y_i \in X$

$$[[[y_1,y_2],y_3], \dots ,y_{k+1}] = 0.$$

قرار دهید $r = \lfloor c/(d-1) \rfloor$. به وضوح $k = c + r$ و در نتیجه با استفاده نامساوی مثلث در تابع جزء صحیح خواهیم داشت $k+1 < (r+1)d$. این نامساوی نشان می‌دهد که همه عناصر X نمی‌توانند بیشتر از r دفعه در براکت $[[[y_1,y_2],y_3], \dots ,y_{k+1}]$ ظاهر شوند. بنابراین عنصری از X مانند x_1 حداکثر r دفعه در این براکت ظاهر می‌شود. حال از آن‌جا که مجموعه $\{x_2, \dots ,x_d\}$ جبر A را تولید نمی‌کند، لذا زیرجبر بیشین M موجود است به طوری که شامل این مجموعه باشد. بنابر لم ۱، M یک ایده‌آل دوطرفه از A است. از طرف دیگر $\{y_1, y_2 \dots ,y_{k+1}\}$ شامل حداقل $k+1 - r = c+1$ عنصر از M می‌باشد. از این رو بنا بر لم ۲، $[[[y_1,y_2],y_3], \dots ,y_{k+1}] \in M^{c+1}$ و از آن‌جا که بنابر فرض، زیرجبرهای بیشین A پوچ‌توان از کلاس حداکثر c هستند، اثبات کامل می‌شود.

با استفاده از قضیهٔ بالا نتایج مهم زیر حاصل می‌شوند.

نتیجهٔ ۴. فرض کنید A یک جبر لایبنیتز پوچ‌توان و $\{x_1 ,x_2, \dots ,x_d\}$ یک مجموعه مولد کمین آن باشد به طوری که $d > 1$. همچنین فرض کنید M_i ایده‌آل تولید شده توسط مجموعه $\{x_1 , \dots, x_{i-1} , x_{i+1} , \dots ,x_d\}$ باشد. در این صورت

$$cl(A) \leq \max_{1 \leq i \leq d} \lfloor \frac{cl(M_i)\, d}{d-1} \rfloor ,$$

که cl بیانگر کلاس پوچ‌توانی است.

همچنین با استفاده از قضیهٔ ۳، نتایج زیر حاصل می‌شوند.

نتیجهٔ ۵. فرض کنید A یک جبر لایبنیتز پوچ‌توان از کلاس k و با تولید متناهی باشد به طوری که $d > 1$. در این صورت $c \leq k \leq 2c$.

اثبات. به وضوح $1 \leq \lfloor d/(d-1) \rfloor \leq 2$ و از این‌رو $c \leq \lfloor cd/(d-1) \rfloor \leq 2c$.

نتیجهٔ ۶. فرض کنید A یک جبر لایبنیتز پوچ‌توان با تولید متناهی باشد به طوری که $d > c+1$. در این صورت A پوچ‌توان از کلاس c است.

اثبات. با توجه به این که تابع $\frac{d}{d-1}$ نزولی است، اگر $d > c+1$، آنگاه $c \leq \lfloor\frac{cd}{d-1}\rfloor$. حال از آن‌جا که زیرجبرهای بیشین A پوچ‌توان از کلاس حداکثر c هستند، در نتیجه A پوچ‌توان از کلاس c است.

نتیجهٔ ۷. فرض کنید A یک جبر لایبنیتز پوچ‌توان از کلاس $2c$ و با تولید متناهی باشد به طوری که $d > 1$. در این صورت $d = 2$.

مثال زیر نشان می‌دهد که کران بالای ارائه شده در قضیهٔ ۳ در برخی از جبرهای لایبنیتز، کوچکترین کران بالا برای کلاس پوچ‌توانی است.

مثال ۸. فرض کنید A جبر لایبنیتز پنج بعدی با پایه $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ و براکت‌های ناصفر زیر باشد:

$$[x_1,x_1] = x_5\ ,\ [x_2,x_1] = -[x_1,x_2] = x_3\ ,\ [x_3,x_1] = -[x_1,x_3] = x_5\ ,\ [x_3,x_2] = -[x_2,x_3] = x_4$$

و $[x_4,x_2] = -[x_2,x_4] = x_5$ و سایر براکت‌ها صفر تعریف می‌شوند. به وضوح A را می‌توان با عناصر x_1 و x_2 تولید کرد لذا $d = 2$. همچنین می‌توان دید که همه زیرجبرهای سره A پوچ‌توان از کلاس حداکثر دو هستند. بنا بر قضیهٔ ۳ جبر لایبنیتز A پوچ‌توان از کلاس حداکثر چهار است. از طرف دیگر

$$[[[x_2,x_1],x_2],x_2] = [[x_3,x_2],x_2] = [x_4,x_2] = x_5 \neq 0$$

که نشان می‌دهد A پوچ‌توان از کلاس سه نیست و در نتیجه کلاس پوچ‌توانی A چهار است.

در میان جبرهای لی، جبر لی هایزنبرگ از بعد سه (تا حد یکریختی) تنها جبر لی ناآبلی پوچ‌توان است که همه زیرجبرهای سرهٔ آن آبلی هستند [۹]. در گزارهٔ زیر نشان می‌دهیم که در جبرهای لایبنیتز غیر لی با بیش از یک مولد، چنین جبری وجود ندارد.

گزارهٔ ۹. هیچ جبر لایبنیتز غیر لی با بیش از یک مولد وجود ندارد که همه زیرجبرهای بیشین آن آبلی باشند.

اثبات. به برهان خلف فرض کنید که A یک چنین جبر لایبنیتزی باشد که توسط حداقل دو عنصر تولید می‌شود. همچنین فرض کنید $x \in A$ و M زیرجبر بیشین A شامل x باشد که بنابر فرض آبلی است. لذا $[x,x] = 0$ و در نتیجه A در واقع یک جبر لی است که یک تناقض است.

برخلاف جبرهای لایبنیتز، اگر یک جبر لی با یک مولد تولید شود، آنگاه آبلی خواهد بود. در واقع همین موضوع منشأ تفاوت‌های بنیادی در ساختار جبرهای لایبنیتز و لی می‌باشد. همچنین در نتیجه ۵ دیدیم که اگر $d > 1$، آن‌گاه $2c$ کران بالایی برای کلاس پوچتوانی جبرهای لایبنیتز پوچتوان با تولید متناهی است. در مثال زیر خواهیم دید که در حالت $d = 1$ چنین کران بالایی برای کلاس پوچتوانی وجود ندارد.

تعریف ۱۰. جبر لایبنیتز A از بعد n پوچ فیلیفرم نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $1 \leq i \leq n+1$ داشته باشیم $\dim A^i = n - i + 1$ (به مرجع [۱] تعریف ۳ رجوع شود).

مثال ۱۱. فرض کنید A یک جبر لایبنیتز پوچ فیلیفرم تولید شده توسط یک عنصر x_1 باشد. اگر $\dim A = 1$. در این صورت $[x_1,x_1] = 0$ زیرا به عنوان مثال اگر $[x_1,x_1] = x_1$، آن‌گاه با استفاده از اتحاد لایبنیتز خواهیم داشت:

$$x_1 = [x_1,x_1] = [x_1,[x_1,x_1]] = [[x_1,x_1],x_1] - [[x_1,x_1],x_1] = 0$$

که یک تناقض است. بنابراین در این حالت در واقع A یک جبر لی آبلی (پوچتوان از کلاس یک) است. حال فرض کنید $\dim A = 2$ و $\{x_1,x_2\}$ پایه‌ای برای آن با براکت ناصفر $[x_1,x_1] = x_2$ باشد. در این صورت A پوچتوان از کلاس دو می‌باشد زیرا $[[x_1,x_1],x_1] = [x_2,x_1] = 0$ و همچنین بقیه براکت‌های سه‌تایی نیز صفر می‌شوند. در حالت کلی فرض کنید $\dim A = n$ و $\{x_1,x_2, \ldots ,x_n\}$ پایهٔ آن با براکت‌های ناصفر $[x_i,x_1] = x_{i+1}$ که $1 \leq i \leq n-1$ (برای جزئیات بیشتر به [۱] لم ۱ رجوع شود). از آن‌جا که براکت $(n+1)$ تایی

$$[[[x_1,x_1],x_1], \ldots ,x_1] = [[x_2,x_1], \ldots ,x_1] = \cdots = [x_n,x_1] = 0$$

و براکت n تایی زیر

$$[[[x_1,x_1],x_1], \ldots ,x_1] = [[x_2,x_1], \ldots ,x_1] = \cdots = x_n \neq 0$$

لذا A پوچتوان از کلاس n می‌باشد. به راحتی دیده می‌شود که همه زیرجبرهای سرهٔ A آبلی هستند. همچنین ساختار A به گونه‌ای است که به ازای هر $1 \leq i \leq n+1$، $\{x_i, \ldots ,x_n\}$ پایه‌ای برای A^i است و از این‌رو $\dim A^i = n - i + 1$. این مثال نشان می‌دهد که کلاس پوچتوانی جبرهای لایبنیتز تک مولدی می‌تواند بیشترین مقدار ممکن را اختیار کند.

قدردانی

از داوران محترم که پیشنهادهای مفیدشان موجب بهبود کیفیت مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

References

1. Ayupov Sh. A., Omirov B. A., "On some classes of nilpotent Leibniz algebras", Sib. Math. J., 42 (2001) 15-24.

2. Blokh A., "A generalization of the concept of a Lie algebra", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165 (1965) 471-473.

3. Demir I., "Classification of 5-dimensional complex nilpotent Leibniz algebras", PhD Thesis, North Carolina State University, NC. USA, (2016).

4. Demir I., "Classification of 5-dimensional complex nilpotent Leibniz algebras", Contemp. Math., 713 (2018) 95-119.

5. Demir I., Misra K. C., Stitzinger E., "On classification of four dimensional nilpotent Leibniz algebras", Commun. Algebra, 45 (2016) 1012-1018.

6. Falco M. D., Giovanni F. D., Musella C., Sysak Y. P., "Groups with many abelian subgroups", J. Algebra, 347 (2011) 83-95.

7. Gupta C. K., "A bound for the class of certain nilpotent groups", J. Aust. Math. Soc., 5 (1965) 506-511.

8. Loday J. L., "Une version non commutative des algebres de Lie: des algebres de Leibniz", Enseign. Math., 39 (1993) 269-293.

9. Safa H., "A bound for the nilpotency class of a Lie algebra", Iran. J. Math. Sci. Inform. 14 (2019) 153-156.

10. Varea V. R., "Lie algebras whose proper subalgebras are either semisimple, abelian or almost-abelian", Hiroshima Math. J., 24 (1994) 221-241.