



Kharazmi University

Goldie supplemented modules with respect to a preradical

Tayyebeh Amouzegar¹ 

1. Department of Mathematics, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

✉ E-mail: t.amouzegar@qjet.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
4 January 2020
Revised form:
10 January 2021
Accepted:
19 January 2021
Published online:
21 November 2022

Keywords:

H-supplemented module;
Strongly τ -H-supplemented module;
Goldie- τ -supplement ed module.

Introduction

Throughout this paper R will denote an associative ring with identity, M a unitary right R -module. A functor τ from the category of the right R -modules $\text{Mod-}R$ to itself is called a preradical if it satisfies the following properties:

- (i) $\tau(M)$ is a submodule of M , for every R -module M ;
- (ii) If $f: M' \rightarrow M$ is an R -module homomorphism, then $f(\tau(M')) \subseteq \tau(M)$ and $\tau(f)$ is the restriction of f to $\tau(M')$.

For example Rad , Soc , and Z_M are preradicals. Note that if K is a summand of M , then $K \cap \tau(M) = \tau(K)$.

For a preradical τ , Al-Takhman, Lomp and Wisbauer defined and studied the concept of τ -lifting and τ -supplemented modules. A module M is called τ -lifting if every submodule N of M has a decomposition $N = A \oplus B$ such that A is a direct summand of M and $B \subseteq \tau(M)$. A submodule $K \subseteq M$ is called τ -supplement (weak τ -supplement) provided there exists some $U \subseteq M$ such that $M = U + K$ and

$$U \cap K \subseteq \tau(K) \quad (U \cap K \subseteq \tau(M)).$$

M is called τ -supplemented (weakly τ -supplemented) if each of its submodules τ -supplement (weak τ -supplement) in M . Talebi, Moniri Hamzekolaei and Keskin-Tütüncü, defined τ -H-supplemented modules. A module M is called τ -H-supplemented if for every $N \leq M$ there exists a direct summand D of M such that

$$(N + D)/N \subseteq \tau(M/N) \text{ and } (N + D)/D \subseteq \tau(M/D).$$

The β^* relation is introduced and investigated by Birkenmeier, Takil Mutlu, Nebiyev, Sokmez and Tercan. Let X and Y be submodules of M . X and Y are β^* equivalent,

$$X\beta^*Y, \text{ provided } \frac{X+Y}{X} \ll \frac{M}{X} \text{ and } \frac{X+Y}{Y} \ll \frac{M}{Y}.$$

Based on definition of β^* relation they introduced two new classes of modules namely

*Goldie**-lifting and *Goldie** –supplemented. They showed that two concept of H -supplemented modules and *Goldie** –lifting modules coincide.

In this paper, we introduce *Goldie*– τ –supplemented and strongly τ - H -supplemented modules. We introduce the $\overline{\beta^*}$ relation. We investigate some properties of this relation and prove that this relation is an equivalence relation. We define *Goldie*– τ –supplemented and strongly τ - H -supplemented modules. We call a module M , *Goldie*– τ –supplemented (strongly τ - H -supplemented) if for any submodule N of M , there exists a τ -supplement submodule (a direct summand) D of M such that $N\overline{\beta^*}D$. Clearly every strongly τ - H -supplemented module is *Goldie* τ -supplemented. We will study direct sums of *Goldie* τ - H -supplemented modules. Let $M = A \oplus B$ be a distributive module. Then M is *Goldie* τ -supplemented (strongly τ - H -supplemented) if and only if A and B are *Goldie* τ -supplemented (strongly τ - H -supplemented). We also define τ - H -cofinitely supplemented modules and obtain some conditions which under the factor module of a τ - H -cofinitely supplemented module will be τ - H -cofinitely supplemented.

Material and methods

In this paper, first we define and investigate the $\overline{\beta_\tau^*}$ relation on submodules of a module. We show that the $\overline{\beta_\tau^*}$ relation is an equivalence relation. We apply this relation to define and investigate the classes of *Goldie*- τ –supplemented modules and strongly τ - H -supplemented modules.

Results and discussion

We investigate some properties of this relation and prove that this relation is an equivalence relation. We define *Goldie*– τ –supplemented and strongly τ - H -supplemented modules. We call a module M , *Goldie*– τ –supplemented

(strongly τ -H-supplemented) if for any submodule N of M , there exists a τ -supplement submodule (a direct summand) D of M such that $N\overline{\beta^*} D$. Clearly every strongly τ -H-supplemented module is Goldie τ -supplemented. We will study direct sums of Goldie τ -H-supplemented modules. Let $M = A \oplus B$ be a distributive module. Then M is Goldie τ -supplemented (strongly τ -H-supplemented) if and only if A and B are Goldie τ -supplemented (strongly τ -H-supplemented). We also define τ -H-cofinitely supplemented modules and obtain some conditions which under the factor module of a τ -H-cofinitely supplemented module will be τ -H-cofinitely supplemented.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- Let $M = M_1 \oplus M_2$, where M_1 is a fully invariant submodule of M . Assume that τ is a cohereditary preradical. If M is strongly τ -H-supplemented, then M_1 and M_2 are strongly τ -H-supplemented.
- Let M be an τ -H-cofinitely supplemented module and let $N \leq M$ be a submodule. Suppose that for every direct summand K of M , there exists a submodule L of M such that $N \subseteq L \subseteq K + N$, L/N is a direct summand of M/N and $\frac{K+N}{L/N} \subseteq \frac{\tau(\frac{M}{N}) + \frac{L}{N}}{L/N}$. Then M/N is τ -H-cofinitely supplemented.
- Let M be a module and let $N \leq M$ be a submodule such that for each decomposition $M = M_1 \oplus M_2$ we have $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$. If M is τ -H-cofinitely supplemented, then M/N is τ -H-cofinitely supplemented.

How to cite: Amouzegar, T., (2022) Goldie supplemented modules with respect to a preradical. *Mathematical Researches*, 8 (3), 1-14



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

مدول‌های گلدی مکمل‌پذیر در ارتباط با پیش رادیکال

طیبه آموزگار^۱✉

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران. پست الکترونیکی: t.amouzgar@qiet.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۴

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۲۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۳۰

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

فرض کنید T یک پیش رادیکال باشد. در این مقاله رابطه روی زیرمدول‌های یک مدول را تعریف و بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که رابطه $\overline{\beta_T^*}$ یک رابطه هم ارزی است. این رابطه را برای تعریف مدول‌های گلدی T -مکمل‌پذیر و مدول‌های به طور قوی $H-T$ مکمل‌پذیر و بررسی ویژگی‌های آنها به کار می‌بریم.

واژه‌های کلیدی:

مدول‌های H -مکمل‌پذیر،

مدول‌های به طور قوی $H-T$ -

مکمل‌پذیر،

مدول‌های گلدی T -

مکمل‌پذیر.

استناد: آموزگار، طیبه؛ (۱۴۰۱). مدول‌های گلدی مکمل‌پذیر در ارتباط با پیش رادیکال. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۳)، ۱۴-۱.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در این مقاله R حلقه شرکت‌پذیر با عنصر همانی و M یک R -مدول راست یکانی است. نماد $M \leq^{\oplus} N$ نشان می‌دهد که N جمعیوند مستقیم M است. $Rad(M)$ رادیکال جیکبسون از M را نشان می‌دهد. زیرمدول N را در M کوچک^۲ گویند و با $M \ll N$ نشان می‌دهند هرگاه برای هر $M \not\subseteq L$ ، داشته باشیم $M \neq L + N$. مدول M را بالابرنده^۳ گویند هرگاه برای هر $A \leq M$ ، جمعیوند مستقیم B از M وجود داشته باشد به طوری که $B \subseteq A$ و $A/B \ll M/B$ [۷].

فرض کنید K و N زیرمدول‌هایی از M باشند. K را یک مکمل^۴ از N در M گویند هرگاه $M = K + N$ و K نسبت به این ویژگی مینیمال باشد یا به طور معادل $M = K + N$ و $M \cap N \ll K$. M یک مدول مکمل پذیر^۵ نامیده می‌شود هرگاه هر زیرمدول از M دارای یک مکمل در M باشد. مطابق با [۷] مدول M ، H -مکمل‌پذیر^۶ است هرگاه برای هر زیرمدول A از M جمعیوند مستقیم D از M وجود داشته باشد به طوری که برای هر زیرمدول X از M ، $A + X = M$ اگر و تنها اگر $D + X = M$.

در [۵]، اثبات شده است که M ، H -مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول A از M جمعیوند مستقیم D از M وجود داشته باشد به طوری که $\frac{M}{D} \ll \frac{M+A+D}{A} \ll \frac{M+A+D}{A}$. مدول‌های H -مکمل‌پذیر در [۷] به عنوان تعمیم مدول‌های بالابرنده معرفی شده‌اند. برای اطلاعات بیشتر درباره مدول‌های H -مکمل‌پذیر به مراجع [۵]، [۶] و [۷] ارجاع می‌دهیم.

فانکتور τ از رسته R -مدول‌های راست به خودش را یک پیش رادیکال^۷ گویند هرگاه در ویژگی‌های زیر صدق کند:
 (۱) برای هر R -مدول M ، $\tau(M)$ یک زیرمدول از M است.

(۲) اگر $f: M' \rightarrow M$ یک هم‌ریختی R -مدولی باشد، آن‌گاه $f(\tau(M')) \leq \tau(f)$ و $\tau(f)$ تحدید f به $\tau(M')$ است.

برای مثال Rad ، Soc و Z_M پیش رادیکال هستند. توجه می‌کنیم که اگر K یک جمعیوند مستقیم از M باشد آن‌گاه $K \cap M$. $\tau(M) = \tau(K)$ در [۲]، التخمان^۸، لمپ^۹ و ویزبایر^{۱۰} مفهوم مدول‌های τ -بالابرنده و τ -مکمل‌پذیر، که در آن یک پیش رادیکال است، را بیان و مطالعه کردند. یک مدول M را τ -بالابرنده^{۱۱} گویند هرگاه هر زیرمدول N از M دارای یک تجزیه^{۱۲} $N = A \oplus B$ باشد به طوری که A یک جمعیوند مستقیم از M و $B \subseteq \tau(M)$. بنابر [۲]، یک زیرمدول $K \subseteq M$ ، τ -مکمل^{۱۳} (مکمل ضعیف^{۱۴}) نامیده می‌شود هرگاه بعضی $U \subseteq M$ وجود داشته باشد به طوری که $M = U + K$ و $U \cap M = U$. τ -مکمل (مکمل ضعیف) نامیده می‌شود هرگاه هر یک از زیرمدول‌های آن دارای یک τ -مکمل (مکمل ضعیف) در M باشد. یک مدول M ، H - τ -مکمل پذیر^{۱۴} نامیده می‌شود هرگاه برای هر $N \leq M$ یک جمعیوند مستقیم D از M وجود داشته باشد به طوری که $\frac{N+D}{N} \subseteq \tau(M/N)$ و $\frac{N+D}{D} \subseteq \tau(M/D)$ [۹].

فرض کنید X و Y زیرمدول‌هایی از مدول M باشند. نویسندگان در [۳]، X و Y را هم‌ارز^{۱۵} β^* نامیدند، هرگاه $X\beta^*Y$ هرگاه $\frac{X+Y}{X}$

¹Jacobsonradical
²Small
³Lifting
⁴Supplement
⁵Supplemented

⁶H-Supplemented
⁷Preradical
⁸Al-Takhman
⁹Lomp
¹⁰Wisbauer

¹¹ τ -Lifting
¹² τ -Supplement
¹³Weakly τ -supplement
¹⁴ τ -H- Supplemented

را معرفی کردند. آنها نشان دادند که دو مفهوم H -مکمل‌پذیر و گلدی $*$ -بالابرنده بر هم منطبق هستند. نویسندگان در [۱۰]، برگرفته از [۳]، رابطه β^{**} را معرفی و با استفاده از این رابطه مدول‌های گلدی Rad -مکمل‌پذیر و H - Rad -مکمل‌پذیر را تعریف و مطالعه کردند.

در این مقاله، با انگیزه از مراجع [۲]، [۳] و [۱۰]، مدول‌های گلدی τ -مکمل‌پذیر و به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر را معرفی و بررسی می‌کنیم. در بخش ۲، رابطه $\overline{\beta}_\tau^*$ را معرفی و بعضی از ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم. فرض کنید X و Y زیرمدول‌هایی از مدول M باشند. X و Y را نسبت به رابطه $\overline{\beta}_\tau^*$ هم‌ارز نامیم هرگاه $X + Y \subseteq \tau(M) + X$ و $Y \subseteq \tau(M) + Y$ نشان می‌دهیم این رابطه یک رابطه هم‌ارزی است. در بخش ۳، مدول‌های گلدی τ -مکمل‌پذیر و به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر را تعریف می‌کنیم. با انگیزه از [۳] و بر اساس تعریف رابطه $\overline{\beta}_\tau^*$ مدول M را گلدی τ -مکمل‌پذیر^{۱۵} (به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر^{۱۶}) گوییم هرگاه برای هر زیر مدول N از M ، زیر مدول τ -مکمل (یک جمعوند D) از M وجود داشته باشد به طوری که $N\overline{\beta}_\tau^*D$. به وضوح هر مدول به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر، گلدی τ -مکمل‌پذیر است. در این متن مجموع مستقیم مدول‌های به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر و نیز گلدی τ -مکمل‌پذیر را بررسی خواهیم کرد. فرض کنید مدول $M = A \oplus B$ یک مدول توزیع‌پذیر باشد. در این صورت M ، گلدی τ -مکمل‌پذیر (به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر) است اگر و تنها اگر A و B ، گلدی τ -مکمل‌پذیر (به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر) باشند (قضیه ۹). همچنین مدول‌های هم‌متناهی H - τ -مکمل‌پذیر را تعریف می‌کنیم و شرایطی را به دست می‌آوریم که تحت آنها مدول کسری از یک مدول هم‌متناهی H - τ -مکمل‌پذیر یک مدول هم‌متناهی H - τ -مکمل‌پذیر باشد.

رابطه $\overline{\beta}_\tau^*$

در این بخش رابطه $\overline{\beta}_\tau^*$ روی زیرمدول‌های یک مدول تعریف و بررسی می‌شود. فرض کنید X و Y زیرمدول‌هایی از مدول M باشند. X و Y را نسبت به رابطه $\overline{\beta}_\tau^*$ هم‌ارز نامیم هرگاه

$$X + Y \subseteq \tau(M) + Y \text{ و } X + Y \subseteq \tau(M) + X.$$

لم ۱. رابطه $\overline{\beta}_\tau^*$ یک رابطه هم‌ارزی است.

اثبات: ویژگی‌های تقارن و بازتابی بدیهی هستند. برای خاصیت تعدی، فرض کنید $X\overline{\beta}_\tau^*Y$ و $Y\overline{\beta}_\tau^*Z$ بنابراین داریم

$$X + Y \subseteq \tau(M) + X \quad ; \quad X + Y \subseteq \tau(M) + Y$$

$$Y + Z \subseteq \tau(M) + Y \quad ; \quad Y + Z \subseteq \tau(M) + Z.$$

¹⁵Goldie- τ -supplemented

¹⁶Strongly τ -H-supplemented

به آسانی دیده می‌شود که $X + Z \subseteq \tau(M) + Z$ و $X + Z \subseteq \tau(M) + X$ در نتیجه $\overline{X\beta_\tau^*Z}$.
 بدیهی است که هر زیرمدولی که مشمول در $\tau(M)$ باشد با زیرمدول صفر نسبت به رابطه $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز است. توجه می‌کنیم که دو زیرمدول ممکن است یکرخت باشند ولی نسبت به رابطه $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز نباشند. برای مثال، فرض کنید F یک میدان، $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ، $X = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$. فرض کنید $\tau = \text{Rad}$. در این صورت X, Y یکرخت با Y است اما نسبت به رابطه $\overline{\beta_{\text{Rad}}^*}$ با Y هم‌ارز نیست زیرا $\text{Rad}(R_R) = X$.

به علاوه، اگر $M = \mathbb{Z}\mathbb{Z}$ آن‌گاه $m\mathbb{Z}\overline{\beta_{\text{Rad}}^*}n\mathbb{Z}$ اگر و تنها اگر m و n توسط اعداد اول یکسانی تقسیم‌پذیر باشند.
گزاره ۲. فرض کنید $f: M \rightarrow N$ یک پروریختی باشد. اگر $X, Y \leq M$ به طوری که $\overline{X\beta_\tau^*Y}$ ، آن‌گاه $f(X)\overline{\beta_\tau^*}f(Y)$.
اثبات: فرض کنید برای بعضی زیرمدول‌های X, Y از M ، $\overline{X\beta_\tau^*Y}$ ، آن‌گاه $X + Y \subseteq \tau(M) + X$ و $X + Y \subseteq \tau(M) + Y$.
 Y بنابراین

$$f(X) + f(Y) \subseteq \tau(N) + f(Y) \text{ و } f(X) + f(Y) \subseteq \tau(N) + f(X)$$

این نتیجه می‌دهد که $f(X)\overline{\beta_\tau^*}f(Y)$.

گزاره ۳. فرض کنید X_1, X_2, Y_1, Y_2 زیرمدول‌هایی از M باشند به طوری که $X_1\overline{\beta_\tau^*}Y_1$ و $X_2\overline{\beta_\tau^*}Y_2$ در این صورت

$$(X_1 + Y_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + X_2) \text{ و } (X_1 + X_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + Y_2).$$

اثبات: فرض کنید $X_1\overline{\beta_\tau^*}Y_1$ و $X_2\overline{\beta_\tau^*}Y_2$ در این صورت

$$X_1 + Y_1 \subseteq \tau(M) + X_1; X_1 + Y_1 \subseteq \tau(M) + Y_1$$

$$X_2 + Y_2 \subseteq \tau(M) + X_2; X_2 + Y_2 \subseteq \tau(M) + Y_2.$$

بنا بر نامساوی‌های بالا داریم $(X_1 + X_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + Y_2)$ و $(X_1 + Y_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + X_2)$.

نتیجه ۴. فرض کنید $Y \leq M$ و $X, K \subseteq \tau(M)$. در این صورت $\overline{X\beta_\tau^*Y}$ اگر و تنها اگر $\overline{X\beta_\tau^*(Y + K)}$.

اثبات: (\Rightarrow) از گزاره ۳ و این حقیقت که $\overline{\beta_\tau^*}K = 0$ نتیجه می‌شود.

(\Leftarrow) چون $K \subseteq \tau(M)$ داریم $\overline{Y\beta_\tau^*(Y + K)}$. نتیجه بنا بر ویژگی تعدی رابطه $\overline{\beta_\tau^*}$ برقرار است. □

نتیجه ۵. فرض کنید $Y_1, \dots, Y_n \leq M$ ، اگر $\overline{X\beta_\tau^*Y_i}$ برای هر $i = 1, \dots, n$ در این صورت $\overline{X\beta_\tau^*\sum_{i=1}^n Y_i}$.

مدول‌های گلدی τ -مکمل‌پذیر

در این بخش مدول‌های گلدی τ -مکمل‌پذیر و به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر را بررسی می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید M یک مدول باشد.

(۱) M را گلدی τ -مکمل‌پذیر گوئیم هرگاه برای هر زیرمدول N از M ، یک زیرمدول τ -مکمل S در M وجود داشته باشد به طوری که $N\overline{\beta}_\tau^*S$.

(۲) M را به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر گویند هرگاه برای هر زیرمدول N از M جمعوند D از M وجود داشته باشد به طوری که $N\overline{\beta}_\tau^*D$.

بدیهی است که هر مدول به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر، H - τ -مکمل‌پذیر است و عکس آن زمانی برقرار است که τ پیش‌رادیکال هم‌ارثی باشد. به آسانی دیده می‌شود که هر مدول به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر، گلدی τ -مکمل‌پذیر است. توجه می‌کنیم که اگر M مدولی با این ویژگی باشد که هر زیرمدول τ -مکمل یک جمعوند مستقیم باشد، آن‌گاه گلدی τ -مکمل‌پذیر و به طور قوی H - τ -مکمل‌پذیر معادل یکدیگر هستند.

گزاره ۶. فرض کنید M یک مدول باشد. در این صورت M ، گلدی τ -مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $X \leq M$ یک زیرمدول τ -مکمل S از M وجود داشته باشد به طوری که

$$S + \tau(M) = X + \tau(M).$$

اثبات: فرض کنید M ، مدول گلدی τ -مکمل‌پذیر باشد و $X \leq M$. در این صورت یک زیرمدول τ -مکمل S از M وجود دارد به طوری که $X + S \subseteq \tau(M) + S$ و $X + S \subseteq \tau(M) + S$. آن‌گاه

$$X + \tau(M) \subseteq S + \tau(M) \text{ و } S + \tau(M) \subseteq X + \tau(M).$$

بنابراین $S + \tau(M) = X + \tau(M)$. عکس به آسانی بررسی می‌شود. \square .

نتیجه ۷. فرض کنید M یک مدول باشد. اگر برای هر $X \leq M$ ، یک زیرمدول τ -مکمل S از M و یک $H \subseteq \tau(M)$ وجود داشته باشد به طوری که $X = S + H$ ، آن‌گاه M یک مدول گلدی τ -مکمل‌پذیر است.

اثبات: نشان می‌دهیم $X\overline{\beta}_\tau^*S$. از آن‌جا که

$$X + S = S + H \subseteq \tau(M) + S + H = \tau(M) + X$$

$$\square \text{ و } X + S = S + H + S \subseteq \tau(M) + S \text{ می‌گیریم که } X\overline{\beta}_\tau^*S.$$

نتیجه ۸. فرض کنید M یک مدول گلدی τ -مکمل‌پذیر باشد. در این صورت برای هر $X \leq M$ با $\tau(M) \subseteq X$ داریم $X = S + H$ که در آن S یک τ -مکمل در M و $H \subseteq \tau(M)$.

اثبات: فرض کنید $X \leq M$ به طوری که $\tau(M) \subseteq X$. بنا بر فرض یک زیرمدول τ -مکمل S از M وجود دارد به طوری که $X\overline{\beta}_\tau^* S$ سپس $S \subseteq X$ و $X = \tau(M) + (S \cap X) = \tau(M) + S$. \square

تعریف. فرض کنید M یک مدول باشد. در این صورت M را توزیع‌پذیر^{۱۷} گویند هرگاه شبکه زیرمدول‌های آن تشکیل شبکه توزیع‌پذیر دهد، به طور معادل برای زیرمدول‌های K, L, N از M داشته باشیم،

$$N \cap (K + L) = (N \cap K) + (N \cap L) \text{ یا } N + (K \cap L) = (N + K) \cap (N + L).$$

قضیه ۹. فرض کنید $M = A \oplus B$ یک مدول توزیع‌پذیر باشد. در این صورت M یک مدول گلدی τ -مکمل‌پذیر (به طور قوی τ -H-مکمل‌پذیر) است اگر و تنها اگر A و B گلدی τ -مکمل‌پذیر (به طور قوی τ -H-مکمل‌پذیر) باشند.

اثبات: (\Rightarrow) فرض کنید $X \leq A$. در این صورت زیرمدول‌های S و L از M وجود دارند به طوری که $S \cap \mathcal{S} + L = M$ و $L \subseteq \tau(S)$ و $X\overline{\beta}_\tau^* S$ نشان می‌دهیم که $X\overline{\beta}_\tau^* (A \cap S)$ از آنجا که $X\overline{\beta}_\tau^* S$ داریم $X + S \subseteq \tau(M) + X$ و $X \subseteq A$ که $X \subseteq A$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} X + (A \cap S) &\subseteq \tau(A) + X, \\ X + (A \cap S) &\subseteq (\tau(A) + A \cap S + B \cap S + \tau(B)) \cap A. \end{aligned}$$

بنا بر مدولاریتی داریم $X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + X$ و $X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + (A \cap S)$. سپس $X\overline{\beta}_\tau^* (A \cap S)$ و بنا بر فرض داریم، $(A \cap S) + (A \cap L) = A$

$$(A \cap S) \cap (A \cap L) = A \cap S \cap L \subseteq A \cap (\tau(A \cap S) \oplus \tau(B \cap S)).$$

این نتیجه می‌دهد که $A \cap S \cap L \subseteq \tau(A \cap S)$. پس $A \cap S$ یک τ -مکمل از $A \cap L$ در A است. بنابراین A گلدی τ -مکمل‌پذیر است. به طور مشابه B گلدی τ -مکمل‌پذیر است.

(\Leftarrow) فرض کنید $U \leq M$ و $U_1 = A \cap U$ و $U_2 = B \cap U$ وجود دارند $L_1, S_1 \leq A$ به طوری که $U_1\overline{\beta}_\tau^* S_1, L_1 + S_1 = U$ و همچنین وجود دارند $L_2, S_2 \leq B$ به طوری که $U_2\overline{\beta}_\tau^* S_2, L_2 + S_2 = U$ و $L_1 \cap S_1 \subseteq \tau(S_1)$ و $L_2 \cap S_2 \subseteq \tau(S_2)$ بنا بر گزاره ۲، $U\overline{\beta}_\tau^* (S_1 + S_2)$ به علاوه $S_1 + S_2 + L_1 + L_2 = M$ و $(S_1 + S_2) \cap (L_1 + L_2) = (S_1 \cap L_1) + (S_2 \cap L_2) \subseteq \tau(S_1) + \tau(S_2) \subseteq \tau(S_1 + S_2)$ این نتیجه می‌دهد

¹⁷Distributive

که $S_1 + S_2$ زیرمدول τ -مکمل در M است. بنابراین M گلدی- τ مکمل‌پذیر است. اثبات برای این که A و B به طور قوی H - τ مکمل‌پذیر باشند مشابه است. \square .

تعریف. مدول M را فرا- τ مکمل‌پذیر^{۱۸} گویند هرگاه برای تمام زیرمدول‌های K و L از M با $K + L = M$ ، K شامل یک τ -مکمل τ مکمل از L در M باشد.

گزاره ۱۰. هر مدول فرا- τ مکمل‌پذیر، گلدی- τ مکمل‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید M فرا- τ مکمل‌پذیر و $X \leq M$. فرض کنید $X \subseteq \tau(M)$. واضح است $X\beta_\tau^*0$. همچنین فرض کنید که $X \not\subseteq \tau(M)$. از آن جا که M به طور ضعیف- τ مکمل‌پذیر است، زیرمدول L از M وجود دارد به طوری که $X + L = M$ و $X \cap L \subseteq \tau(M)$. بنا بر فرض یک τ -مکمل S از L در X وجود دارد. پس $M = S + L$ و $S \cap L \subseteq \tau(S)$. چون $S \subseteq X$ داریم $X = S + (L \cap X) \subseteq \tau(M) + S$. این نتیجه می‌دهد که $X\beta_\tau^*S$. بنابراین M گلدی- τ مکمل‌پذیر است. \square .

تعریف. فرض کنید M یک مدول باشد. زیرمدول U از M را به طور قوی شبه بالا برنده^{۱۹} (QSL) در M گویند اگر هر زمان که $(A + U)/U$ جمعوند مستقیم از M/U باشد، آن‌گاه جمعوند مستقیم P از M وجود داشته باشد به طوری که $P + P \leq A + U$ (مرجع [۱] را ببینید).

قضیه ۱۱. فرض کنید M یک مدول تصویری باشد به طوری که هر زیرمدول τ -مکمل از M یک جمعوند مستقیم باشد. فرض کنید τ پیش‌رادیکال هم ارثی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

$$(۱) \quad M, \tau\text{-مکمل‌پذیر است.}$$

$$(۲) \quad M, \tau\text{-بالا برنده است.}$$

$$(۳) \quad M, \text{فرا-}\tau\text{-مکمل‌پذیر است.}$$

$$(۴) \quad M, \text{به طور قوی } H\text{-}\tau\text{-مکمل‌پذیر و } \tau(M), \text{QSL در } M \text{ است.}$$

$$(۵) \quad M, \text{گلدی-}\tau\text{-مکمل‌پذیر است و } \tau(M), \text{QSL در } M \text{ است.}$$

اثبات: (۴) \Leftrightarrow (۳) \Leftrightarrow (۲) \Leftrightarrow (۱) با استفاده از [۹، قضیه ۶]. (۴) \Leftrightarrow (۵) بدیهی است. \square .

تعریف. فرض کنید M یک مدول باشد. زیرمدول X از M را پایای کامل^{۲۰} گویند هرگاه برای هر $f \in \text{End}(M)$ ، $f(X) \subseteq X$.

¹⁸Amply τ -supplemented

²⁰Fully invariant

¹⁹Quasi strongly lifting

قضیه ۱۲. فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$ ، که در آن M_1 زیرمدول پایای کامل از M است. فرض کنید τ یک پیش رادیکال هم ارثی باشد. اگر M به طور قوی H - τ -مکمل پذیر باشد، آن گاه M_1 و M_2 به طور قوی H - τ -مکمل پذیر هستند.

اثبات: بدیهی است M_2 به طور قوی H - τ -مکمل پذیر است. نشان می‌دهیم که M_1 به طور قوی H - τ -مکمل پذیر است. فرض کنید K زیرمدول M_1 باشد. چون M به طور قوی H - τ -مکمل پذیر است، مجموعند مستقیم D از M وجود دارد به طوری که $K + D \subseteq \tau(M) + D$ و $K + D \subseteq \tau(M) + K$. قرار دهید $D' = M - D$ ، که در آن $D' \leq M$. از آنجا که M_1 زیرمدول پایا از M است، داریم $M_1 = (M_1 \cap D) \oplus (M_1 \cap D')$. بنابراین $M_1 \cap D$ مجموعند مستقیم از M_1 است. می‌دانیم که $K + D \subseteq \tau(M) + K$ و $K + D \subseteq \tau(M) + D$. به آسانی دیده می‌شود که $K + (D \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + (D \cap M_1)$ و $K + (D \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + K$. پس M_1 به طور قوی H - τ -مکمل پذیر است. \square .

قضیه ۱۳. فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$. همچنین فرض کنید برای هر زیرمدول N از M_1 مجموعند مستقیم K از M وجود دارد به طوری که $M_2 \leq K$ ، $N + K \subseteq \tau(M) + K$ و $N + K \subseteq \tau(M) + N$. در این صورت M_1 به طور قوی H - τ -مکمل پذیر است.

اثبات: فرض کنید L زیرمدول M_1 باشد. بنا بر فرض، مجموعند مستقیم K از M وجود دارد به طوری که $M_2 \leq K$ ، $L + K \subseteq \tau(M) + L$ و $K \subseteq \tau(M) + K$. پس $K \cap M_1$ یک مجموعند مستقیم از M_1 است. به آسانی بررسی می‌شود که $L + (K \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + L$ و $L + (K \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + (K \cap M_1)$. بنابراین M_1 به طور قوی H - τ -مکمل پذیر است. \square .

تعریف. فرض کنید M_1 و M_2 مدول‌هایی باشند به طوری که $M = M_1 \oplus M_2$. گوئیم M_1 ، τ - M_2 -سجکتیو^{۲۱} است هر گاه برای هر $A \leq M$ که $M = A + M_2$ ، وجود داشته باشد $K \leq M$ به طوری که $M = K \oplus M_2$ و $M_1.A + K \subseteq M$. $\tau(M) + A$ و M_2 را نسبت به هم τ -سجکتیو گویند هر گاه M_1 ، τ - M_2 -سجکتیو و M_2 نیز τ - M_1 -سجکتیو باشد.

تعریف. مدول M ، τ - \oplus -مکمل پذیر^{۲۲} نامیده می‌شود هر گاه برای هر $A \leq M$ ، وجود داشته باشد $B \leq \oplus M$ به طوری که $M = A + B$ و $A \cap B \leq \tau(B)$. واضح است که هرمدول τ -بالا برنده، τ - \oplus -مکمل پذیر است و هرمدول τ - \oplus -مکمل پذیر، τ -مکمل پذیر است.

تعریف. مدول M رامدول زوج^{۲۳} گویند هر گاه هر زیرمدول از M پایای کامل باشد [۴].

²¹ τ - M_2 -sejctive

²² τ - \oplus -supplemented

²³ Duo module

قضیه ۱۴. فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$ ، $M - \tau$ -مکمل‌پذیر و مدول زوج باشد. اگر $M_1 - \tau$ ، $M_2 - \tau$ -سجکتیو (یا $M_1 - \tau$ ، $M_2 - \tau$ -سجکتیو) باشد، آن‌گاه M ، مدول به طور قوی $H - \tau$ -مکمل‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید N زیرمدول از M باشد. چون $M - \tau$ -مکمل‌پذیر است، تجزیه $M = M_1 \oplus M_2$ وجود دارد به طوری که $M = N + M_2$ و $N \cap M_2 \subseteq \tau(M_2)$ برای بعضی زیرمدول‌های M_1 و M_2 . چون $M_1 - \tau$ ، $M_2 - \tau$ -سجکتیو است، وجود $K \leq M$ به طوری که $M = K \oplus M_2$ و $N + K \subseteq \tau(M) + N$ حال نشان می‌دهیم که $N + K \subseteq \tau(M) + K$. چون M یک مدول زوج است، N پایای کامل است و $N = (N + K) \cap (N + M_2) = N + K$ پس $N = N + K$ و $K \leq N$ و $N + K = N$. بنابراین $N = (N \cap M_2) \oplus K \subseteq \tau(M) + K$ است. \square

تعریف. زیرمدول N از M را هم‌متناهی^{۲۴} در M گویند هرگاه مدول کسری $\frac{M}{N}$ به طور متناهی تولید شده باشد. مدول M را هم‌متناهی $H - \tau$ -مکمل‌پذیر^{۲۵} گویند هرگاه برای هر زیرمدول هم‌متناهی Y از M ، جمعوند D از M وجود داشته باشد به طوری که $Y + D \subseteq \tau(M) + Y$ و $Y + D \subseteq \tau(M) + D$.

بدیهی است که هر مدول به طور قوی $H - \tau$ -مکمل‌پذیر، هم‌متناهی $H - \tau$ -مکمل‌پذیر است. از طرف دیگر هر مدول هم‌متناهی $H - \tau$ -مکمل‌پذیر و به طور متناهی تولید شده، به طور قوی $H - \tau$ -مکمل‌پذیر است. مثال زیر نشان می‌دهد که برای $\tau = \text{Rad}$ ، هر مدول کسری از مدول‌های هم‌متناهی $H - \tau$ -مکمل‌پذیر نیازی ندارد مدول‌های هم‌متناهی $H - \tau$ -مکمل‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم تحت بعضی شرایط این مطلب درست است.

مثال ۱۵. فرض کنید R یک حلقه موضعی نوتری جابه‌جایی باشد که حلقه ایده‌آل اصلی نیست (به عنوان مثال $R = k[x^2, x^3]/(x^4)$ که در آن k یک میدان است یا می‌توانیم حلقه را $R = F[[x, y]]$ حلقه سری‌های توانی روی میدان F با متغیرهای x و y را انتخاب کنیم). آن‌گاه R یک حلقه ارزیابی نیست. فرض کنید $n \geq 2$. بنابر [۱۱، قضیه ۲]، زیرمدول L از R مدول $M = R^{(n)}$ وجود دارد به طوری که R -مدول $N = M/L$ تجزیه‌ناپذیر است و N نمی‌تواند به وسیله کمتر از n عنصر تولید شود. لذا N ، R -مدول موضعی نیست. پس بنابر [۸، گزاره ۸، ۲]، N هم‌متناهی H -مکمل‌پذیر نیست. بنابراین N ، هم‌متناهی $H - \text{Rad}$ -مکمل‌پذیر نیست. توجه می‌کنیم که چون M/L نوتری است، M/L به طور متناهی تولید شده است و بنابراین $M/L \ll \text{Rad}(M/L)$ و در نتیجه N هم‌متناهی H -مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر N ، هم‌متناهی $H - \text{Rad}$ -مکمل‌پذیر باشد. از طرف دیگر [۸، گزاره ۱، ۲] نشان می‌دهد که M ، هم‌متناهی H -مکمل‌پذیر است و بنابراین هم‌متناهی $H - \text{Rad}$ -مکمل‌پذیر است.

²⁴Cofinite²⁵ τ -H-cofinitely supplemented

گزاره ۱۶. فرض کنید M یک مدول هم متناهی τ -H-مکمل پذیر و $N \leq M$ باشد. فرض کنید برای هر جمعوند مستقیم K از M ، یک زیرمدول L از M وجود داشته باشد به طوری که $N \leq L \leq K + N$ ، L/N جمعوند مستقیم از M/N و $(K + N)/N \subseteq \tau(M/N) + L/N$. در این صورت M/N هم متناهی τ -H-مکمل پذیر است.

اثبات: فرض کنید $Y/N \leq M/N$ یک زیر مدول هم متناهی باشد. چون M هم متناهی τ -H-مکمل پذیر است، جمعوند مستقیم K از M وجود دارد به طوری که $Y + K \subseteq \tau(M) + Y$ و $Y + K \subseteq \tau(M) + K$. بنا بر فرض، زیر مدول L از M وجود دارد به طوری که $N \leq L \leq K + N$ ، L/N جمعوند مستقیم از M/N و $\frac{K+N}{N} \subseteq \tau\left(\frac{M}{N}\right) + \frac{L}{N}$. بدیهی است که $Y/N + L/N \subseteq \tau(M/N) + L/N$. چون $Y + K \subseteq \tau(M) + Y$ داریم

$$\frac{Y}{N} + \frac{L}{N} \subseteq \frac{Y}{N} + \frac{K+N}{N} \subseteq \frac{\tau(M) + N}{N} + \frac{Y}{N} \subseteq \tau\left(\frac{M}{N}\right) + \frac{Y}{N}.$$

این اثبات را کامل می‌کند. \square .

گزاره ۱۷. فرض کنید M یک مدول و $N \leq M$ یک زیرمدول باشد به طوری که برای هر تجزیه $M = M_1 \oplus M_2$ داشته باشیم $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$. اگر M هم متناهی τ -H-مکمل پذیر باشد، آن‌گاه M/N هم متناهی τ -H-مکمل پذیر است.

اثبات: فرض کنید D و D' زیرمدول‌هایی از M باشند به طوری که $M = D \oplus D'$. بنا بر فرض، داریم $N = (D \cap N) \oplus (D' \cap N)$ در این صورت

$$(D + N) \cap (D' + N) = [D \oplus (D' \cap N)] \cap [(D \cap N) \oplus D'] = (D \cap N) \oplus (D' \cap N) = N.$$

پس $M/N = [(D + N)/N] \oplus [(D' + N)/N]$. گزاره ۱۶ نشان می‌دهد که M/N هم متناهی τ -H-مکمل پذیر است. \square .

نتیجه ۱۸. (۱) اگر M یک مدول هم متناهی τ -H-مکمل پذیر و N زیر مدول پایای کامل از M باشد، آن‌گاه M/N هم متناهی τ -H-مکمل پذیر است.

(۲) اگر M هم متناهی τ -H-مکمل پذیر مدول زوج باشد، آن‌گاه هر جمعوند مستقیم از M هم متناهی τ -H-مکمل پذیر است.

اثبات: از گزاره ۱۷ نتیجه حاصل می‌شود. \square .

تشکر و قدردانی

این مقاله نتیجه طرح تحقیقاتی مصوب دانشگاه صنعتی قوچان به شماره قرارداد ۸۶۴۴ در تاریخ ۱۳۹۹/۱۲/۱۷ می‌باشد.

References

1. Alkan M., On τ -lifting Modules and τ -semiperfect Modules, *Turk. J. Math.*, 33 (2009), 117–130.
2. Al-Takhman K., Lomp C. and Wisbaure R., τ -complemented and τ -upplemented modules, *Algebra Discrete Math.*, 3 (2006), 1-15.
3. Birkenmeier G. F., Takil Mutlu F., Nebiyev C., Sokmez N. and Tercan A., Goldie \ast -supplemented modules, *Glasg. Math. J.*, 52A (2010), 41–52.
4. Clark J., Lomp C., Vanaja N. and Wisbauer R., *Lifting modules -supplements and projectivity in module theory*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 2006.
5. Keskin D., Nematollahi M. J. and Talebi Y., On H-supplemented modules, *Algebra Colloq.*, 18 (Spec 1) (2011), 915-924.
6. Koşan M. T. and Keskin D., H-supplemented duo modules, *J. Algebra Appl.* 6(6) (2007), 965-971.
7. Mohamed S. H. and Müller B. J., *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 147, Cambridge, University Press, 1990.
8. Talebi Y., Tribak R. and Moniri Hamzekolaei A. R., On H-Cofinitely supplemented Modules, *Bull. Iran. Math. Soc.*, 39 (2) (2013), 325-346.
9. Talebi Y., Moniri Hamzekolaei A. R. and Keskin-Tütüncü D., H-supplemented modules with respect to a preradical, *Algebra Discrete Math.*, 12 (1) (2011), 116–131.
10. Talebi Y., Moniri Hamzekolaei A. R. and Tercan A., Goldie-Rad-supplemented modules, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, 22(3) (2014), 205–218.
11. Warfield R. B., Jr., Decomposability of finitely presented modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25 (1970) 167-172.
12. Wisbauer R., *Foundations of module and ring theory*, Gordon and Breach, Reading, 1991.