




Kharazmi University

# Goldie supplemented modules with respect to a preradical

Tayyebeh Amouzegar<sup>1</sup> 

1. Department of Mathematics, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

✉ E-mail: [t.amouzegar@qjet.ac.ir](mailto:t.amouzegar@qjet.ac.ir)

---

---

**Article Info**

---

---

**ABSTRACT**

---

---

**Article type:**

Research Article

**Article history:**

Received:  
4 January 2020  
Revised form:  
10 January 2021  
Accepted:  
19 January 2021  
Published online:  
21 November 2022

**Keywords:**

H-supplemented module;  
Strongly  $\tau$ -H-supplemented module;  
Goldie-  $\tau$  -supplemented module.

**Introduction**

Throughout this paper  $R$  will denote an associative ring with identity,  $M$  a unitary right  $R$ -module. A functor  $\tau$  from the category of the right  $R$ -modules  $\text{Mod-}R$  to itself is called a preradical if it satisfies the following properties:

- (i)  $\tau(M)$  is a submodule of  $M$ , for every  $R$ -module  $M$ ;
- (ii) If  $f: M' \rightarrow M$  is an  $R$ -module homomorphism, then  $f(\tau(M')) \subseteq \tau(M)$  and  $\tau(f)$  is the restriction of  $f$  to  $\tau(M')$ .

For example  $\text{Rad}$ ,  $\text{Soc}$ , and  $Z_M$  are preradicals. Note that if  $K$  is a summand of  $M$ , then  $K \cap \tau(M) = \tau(K)$ .

For a preradical  $\tau$ , Al-Takhman, Lomp and Wisbauer defined and studied the concept of  $\tau$ -lifting and  $\tau$ -supplemented modules. A module  $M$  is called  $\tau$ -lifting if every submodule  $N$  of  $M$  has a decomposition  $N = A \oplus B$  such that  $A$  is a direct summand of  $M$  and  $B \subseteq \tau(M)$ . A submodule  $K \subseteq M$  is called  $\tau$ -supplement (weak  $\tau$ -supplement) provided there exists some  $U \subseteq M$  such that  $M = U + K$  and

$$U \cap K \subseteq \tau(K) \quad (U \cap K \subseteq \tau(M)).$$

$M$  is called  $\tau$ -supplemented (weakly  $\tau$ -supplemented) if each of its submodules  $\tau$ -supplement (weak  $\tau$ -supplement) in  $M$ . Talebi, Moniri Hamzekolaei and Keskin-Tütüncü, defined  $\tau$ -H-supplemented modules. A module  $M$  is called  $\tau$ -H-supplemented if for every  $N \leq M$  there exists a direct summand  $D$  of  $M$  such that

$$(N + D)/N \subseteq \tau(M/N) \text{ and } (N + D)/D \subseteq \tau(M/D).$$

---

---

The  $\beta^*$  relation is introduced and investigated by Birkenmeier, Takil Mutlu, Nebiyev, Sokmez and Tercan. Let  $X$  and  $Y$  be submodules of  $M$ .  $X$  and  $Y$  are  $\beta^*$  equivalent,

$X\beta^*Y$ , provided  $\frac{X+Y}{X} \ll \frac{M}{X}$  and  $\frac{X+Y}{Y} \ll \frac{M}{Y}$ .

Based on definition of  $\beta^*$  relation they introduced two new classes of modules namely

*Goldie\**-lifting and *Goldie\** –supplemented. They showed that two concept of  $H$ -supplemented modules and *Goldie\** –lifting modules coincide.

In this paper, we introduce *Goldie*– $\tau$  –supplemented and strongly  $\tau$ - $H$ -supplemented modules. We introduce the  $\overline{\beta^*}$  relation. We investigate some properties of this relation and prove that this relation is an equivalence relation. We define *Goldie*– $\tau$  –supplemented and strongly  $\tau$ - $H$ -supplemented modules. We call a module  $M$ , *Goldie*– $\tau$  –supplemented (strongly  $\tau$ - $H$ -supplemented) if for any submodule  $N$  of  $M$ , there exists a  $\tau$ -supplement submodule (a direct summand)  $D$  of  $M$  such that  $N\overline{\beta^*}D$ . Clearly every strongly  $\tau$ - $H$ -supplemented module is *Goldie*  $\tau$ -supplemented. We will study direct sums of *Goldie*  $\tau$ - $H$ -supplemented modules. Let  $M = A \oplus B$  be a distributive module. Then  $M$  is *Goldie*  $\tau$ -supplemented (strongly  $\tau$ - $H$ -supplemented) if and only if  $A$  and  $B$  are *Goldie*  $\tau$ -supplemented (strongly  $\tau$ - $H$ -supplemented). We also define  $\tau$ - $H$ -cofinitely supplemented modules and obtain some conditions which under the factor module of a  $\tau$ - $H$ -cofinitely supplemented module will be  $\tau$ - $H$ -cofinitely supplemented.

### Material and methods

In this paper, first we define and investigate the  $\overline{\beta_\tau^*}$  relation on submodules of a module. We show that the  $\overline{\beta_\tau^*}$  relation is an equivalence relation. We apply this relation to define and investigate the classes of *Goldie*- $\tau$  –supplemented modules and strongly  $\tau$ - $H$ -supplemented modules.

### Results and discussion

We investigate some properties of this relation and prove that this relation is an equivalence relation. We define *Goldie*– $\tau$  –supplemented and strongly  $\tau$ - $H$ -supplemented modules. We call a module  $M$ , *Goldie*– $\tau$  –supplemented

---

(strongly  $\tau$ -H-supplemented) if for any submodule  $N$  of  $M$ , there exists a  $\tau$ -supplement submodule (a direct summand)  $D$  of  $M$  such that  $N\overline{\beta^*} D$ . Clearly every strongly  $\tau$ -H-supplemented module is Goldie  $\tau$ -supplemented. We will study direct sums of Goldie  $\tau$ -H-supplemented modules. Let  $M = A \oplus B$  be a distributive module. Then  $M$  is Goldie  $\tau$ -supplemented (strongly  $\tau$ -H-supplemented) if and only if  $A$  and  $B$  are Goldie  $\tau$ -supplemented (strongly  $\tau$ -H-supplemented). We also define  $\tau$ -H-cofinitely supplemented modules and obtain some conditions which under the factor module of a  $\tau$ -H-cofinitely supplemented module will be  $\tau$ -H-cofinitely supplemented.

### Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- Let  $M = M_1 \oplus M_2$ , where  $M_1$  is a fully invariant submodule of  $M$ . Assume that  $\tau$  is a cohereditary preradical. If  $M$  is strongly  $\tau$ -H-supplemented, then  $M_1$  and  $M_2$  are strongly  $\tau$ -H-supplemented.
- Let  $M$  be an  $\tau$ -H-cofinitely supplemented module and let  $N \leq M$  be a submodule. Suppose that for every direct summand  $K$  of  $M$ , there exists a submodule  $L$  of  $M$  such that  $N \subseteq L \subseteq K + N$ ,  $L/N$  is a direct summand of  $M/N$  and  $\frac{K+N}{L/N} \subseteq \frac{\tau(\frac{M}{N}) + \frac{L}{N}}{L/N}$ . Then  $M/N$  is  $\tau$ -H-cofinitely supplemented.
- Let  $M$  be a module and let  $N \leq M$  be a submodule such that for each decomposition  $M = M_1 \oplus M_2$  we have  $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$ . If  $M$  is  $\tau$ -H-cofinitely supplemented, then  $M/N$  is  $\tau$ -H-cofinitely supplemented.

---

**How to cite:** Amouzegar, T., (2022) Goldie supplemented modules with respect to a preradical. *Mathematical Researches*, 8 (3), 1-14



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## مدول‌های گلدی مکمل‌پذیر در ارتباط با پیش رادیکال

طیبه آموزگار<sup>۱</sup>

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران. پست الکترونیکی: [t.amouzgar@qiet.ac.ir](mailto:t.amouzgar@qiet.ac.ir)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۴

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۲۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۳۰

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

فرض کنید  $T$  یک پیش رادیکال باشد. در این مقاله رابطه روی زیرمدول‌های یک مدول را تعریف و بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که رابطه  $\overline{\beta_T^*}$  یک رابطه هم‌ارزی است. این رابطه را برای تعریف مدول‌های گلدی  $T$ -مکمل‌پذیر و مدول‌های به طور قوی  $H-T$ -مکمل‌پذیر و بررسی ویژگی‌های آنها به کار می‌بریم.

### واژه‌های کلیدی:

مدول‌های  $H$ -مکمل‌پذیر،

مدول‌های به طور قوی  $H-T$ -

مکمل‌پذیر،

مدول‌های گلدی  $T$ -

مکمل‌پذیر.

استناد: آموزگار، طیبه؛ (۱۴۰۱). مدول‌های گلدی مکمل‌پذیر در ارتباط با پیش رادیکال. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۳)، ۱۴-۱.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## مقدمه

در این مقاله  $R$  حلقه شرکت‌پذیر با عنصر همانی و  $M$  یک  $R$ -مدول راست یکانی است. نماد  $N \leq^{\oplus} M$  نشان می‌دهد که  $N$  جمعوند مستقیم  $M$  است.  $Rad(M)$  رادیکال جیکبسون از  $M$  را نشان می‌دهد. زیرمدول  $N$  را در  $M$  کوچک<sup>۲</sup> گویند و با  $M \ll N$  نشان می‌دهند هرگاه برای هر  $M \not\subseteq L$ ، داشته باشیم  $M \neq L + N$ . مدول  $M$  را بالابرنده<sup>۳</sup> گویند هرگاه برای هر  $A \leq M$ ، جمعوند مستقیم  $B$  از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $A/B \ll M/B$  و  $B \subseteq A$  [۷].

فرض کنید  $K$  و  $N$  زیرمدول‌هایی از  $M$  باشند.  $K$  را یک مکمل<sup>۴</sup> از  $N$  در  $M$  گویند هرگاه  $M = K + N$  و  $K$  نسبت به این ویژگی مینیمال باشد یا به طور معادل  $M = K + N$  و  $K \cap N \ll K$ .  $M$  یک مدول مکمل پذیر<sup>۵</sup> نامیده می‌شود هرگاه هر زیرمدول از  $M$  دارای یک مکمل در  $M$  باشد. مطابق با [۷] مدول  $M$ ،  $H$ -مکمل‌پذیر<sup>۶</sup> است هرگاه برای هر زیرمدول  $A$  از  $M$  جمعوند مستقیم  $D$  از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر زیرمدول  $X$  از  $M$ ،  $A + X = M$  اگر و تنها اگر  $D + X = M$ .

در [۵]، اثبات شده است که  $M$ ،  $H$ -مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول  $A$  از  $M$  جمعوند مستقیم  $D$  از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $\frac{M}{D} \ll \frac{M+A+D}{A} \ll \frac{M+A+D}{A}$ . مدول‌های  $H$ -مکمل‌پذیر در [۷] به عنوان تعمیم مدول‌های بالابرنده معرفی شده‌اند. برای اطلاعات بیشتر درباره مدول‌های  $H$ -مکمل‌پذیر به مراجع [۵]، [۶] و [۷] ارجاع می‌دهیم.

فانکتور  $\tau$  از رسته  $R$ -مدول‌های راست به خودش را یک پیش رادیکال<sup>۷</sup> گویند هرگاه در ویژگی‌های زیر صدق کند:  
(۱) برای هر  $R$ -مدول  $M$ ،  $\tau(M)$  یک زیرمدول از  $M$  است.

(۲) اگر  $f: M' \rightarrow M$  یک هم‌ریختی  $R$ -مدولی باشد، آن‌گاه  $f(\tau(M')) \leq \tau(f)$  و  $\tau(f)$  تحدید  $f$  به  $\tau(M')$  است.

برای مثال  $Rad$ ،  $Soc$  و  $Z_M$  پیش رادیکال هستند. توجه می‌کنیم که اگر  $K$  یک جمعوند مستقیم از  $M$  باشد آن‌گاه  $K \cap M$ .  $\tau(M) = \tau(K)$  در [۲]، التخمان<sup>۸</sup>، لمپ<sup>۹</sup> و ویزبایر<sup>۱۰</sup> مفهوم مدول‌های  $\tau$ -بالا برنده و  $\tau$ -مکمل‌پذیر، که در آن  $\tau$  یک پیش رادیکال است، را بیان و مطالعه کردند. یک مدول  $M$  را  $\tau$ -بالا برنده<sup>۱۱</sup> گویند هرگاه هر زیرمدول  $N$  از  $M$  دارای یک تجزیه<sup>۱۲</sup>  $N = A \oplus B$  باشد به طوری که  $A$  یک جمعوند مستقیم از  $M$  و  $B \subseteq \tau(M)$ ، بنابر [۲]، یک زیرمدول  $K \subseteq M$ ،  $\tau$ -مکمل<sup>۱۳</sup> (مکمل ضعیف<sup>۱۴</sup>) نامیده می‌شود هرگاه بعضی  $U \subseteq M$  وجود داشته باشد به طوری که  $M = U + K$  و  $U \cap M = U$ .  $\tau(M) \subseteq U \cap K \subseteq \tau(K)$ .  $K \subseteq \tau(K)$  مدول  $M$ ،  $\tau$ -مکمل پذیر (مکمل ضعیف) نامیده می‌شود هرگاه هر یک از زیرمدول‌های آن دارای یک  $\tau$ -مکمل (مکمل ضعیف) در  $M$  باشد. یک مدول  $M$ ،  $H$ - $\tau$ -مکمل پذیر<sup>۱۴</sup> نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $N \leq M$  یک جمعوند مستقیم  $D$  از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $\frac{N+D}{N} \subseteq \tau(M/N)$  و  $\frac{N+D}{D} \subseteq \tau(M/D)$  [۹].

فرض کنید  $X$  و  $Y$  زیرمدول‌هایی از مدول  $M$  باشند. نویسندگان در [۳]،  $X$  و  $Y$  را هم ارز<sup>۱۵</sup>  $\beta^*$  نامیدند،  $X\beta^*Y$ ، هرگاه  $\frac{X+Y}{X} \ll$

<sup>۱</sup>Jacobsonradical<sup>۲</sup>Small<sup>۳</sup>Lifting<sup>۴</sup>Supplement<sup>۵</sup>Supplemented<sup>۶</sup>H-Supplemented<sup>۷</sup>Preradical<sup>۸</sup>Al-Takhman<sup>۹</sup>Lomp<sup>۱۰</sup>Wisbauer<sup>۱۱</sup> $\tau$ -Lifting<sup>۱۲</sup> $\tau$ -Supplement<sup>۱۳</sup>Weakly  $\tau$ -supplement<sup>۱۴</sup> $\tau$ -H- Supplemented

را معرفی کردند. آنها نشان دادند که دو مفهوم  $H$ -مکمل‌پذیر و گلدی  $*$ -بالابرنده بر هم منطبق هستند. نویسندگان در [۱۰]، برگرفته از [۳]، رابطه  $\beta^{**}$  را معرفی و با استفاده از این رابطه مدول‌های گلدی  $Rad$ -مکمل‌پذیر و  $H$ - $Rad$ -مکمل‌پذیر را تعریف و مطالعه کردند.

در این مقاله، با انگیزه از مراجع [۲]، [۳] و [۱۰]، مدول‌های گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر و به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر را معرفی و بررسی می‌کنیم. در بخش ۲، رابطه  $\overline{\beta}_\tau^*$  را معرفی و بعضی از ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم. فرض کنید  $X$  و  $Y$  زیرمدول‌هایی از مدول  $M$  باشند.  $X$  و  $Y$  را نسبت به رابطه  $\overline{\beta}_\tau^*$  هم‌ارز نامیم هرگاه  $X + Y \subseteq \tau(M) + X$  و  $Y \subseteq \tau(M) + Y$  نشان می‌دهیم این رابطه یک رابطه هم‌ارزی است. در بخش ۳، مدول‌های گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر و به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر را تعریف می‌کنیم. با انگیزه از [۳] و بر اساس تعریف رابطه  $\overline{\beta}_\tau^*$  مدول  $M$  را گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر<sup>۱۵</sup> (به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر<sup>۱۶</sup>) گوییم هرگاه برای هر زیر مدول  $N$  از  $M$ ، زیر مدول  $\tau$ -مکمل (یک جمعوند  $D$ ) از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $N\overline{\beta}_\tau^*D$ . به وضوح هر مدول به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر، گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر است. در این متن مجموع مستقیم مدول‌های به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر و نیز گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر را بررسی خواهیم کرد. فرض کنید مدول  $M = A \oplus B$  یک مدول توزیع‌پذیر باشد. در این صورت  $M$ ، گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر (به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر) است اگر و تنها اگر  $A$  و  $B$ ، گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر (به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر) باشند (قضیه ۹). همچنین مدول‌های هم‌متناهی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر را تعریف می‌کنیم و شرایطی را به دست می‌آوریم که تحت آنها مدول کسری از یک مدول هم‌متناهی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر یک مدول هم‌متناهی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر باشد.

### رابطه $\overline{\beta}_\tau^*$

در این بخش رابطه  $\overline{\beta}_\tau^*$  روی زیرمدول‌های یک مدول تعریف و بررسی می‌شود. فرض کنید  $X$  و  $Y$  زیرمدول‌هایی از مدول  $M$  باشند.  $X$  و  $Y$  را نسبت به رابطه  $\overline{\beta}_\tau^*$  هم‌ارز نامیم هرگاه

$$X + Y \subseteq \tau(M) + Y \text{ و } X + Y \subseteq \tau(M) + X.$$

لم ۱. رابطه  $\overline{\beta}_\tau^*$  یک رابطه هم‌ارزی است.

**اثبات:** ویژگی‌های تقارن و بازتابی بدیهی هستند. برای خاصیت تعدی، فرض کنید  $X\overline{\beta}_\tau^*Y$  و  $Y\overline{\beta}_\tau^*Z$  بنابراین داریم

$$X + Y \subseteq \tau(M) + X \quad ; \quad X + Y \subseteq \tau(M) + Y$$

$$Y + Z \subseteq \tau(M) + Y \quad ; \quad Y + Z \subseteq \tau(M) + Z.$$

<sup>15</sup>Goldie- $\tau$ -supplemented

<sup>16</sup>Strongly  $\tau$ -H-supplemented

به آسانی دیده می‌شود که  $X + Z \subseteq \tau(M) + Z$  و  $X + Z \subseteq \tau(M) + X$  در نتیجه  $\overline{X\beta_\tau^*Z}$ .  
 بدیهی است که هر زیرمدولی که مشمول در  $\tau(M)$  باشد با زیرمدول صفر نسبت به رابطه  $\overline{\beta_\tau^*}$  هم‌ارز است. توجه می‌کنیم که دو زیرمدول ممکن است یکرخت باشند ولی نسبت به رابطه  $\overline{\beta_\tau^*}$  هم‌ارز نباشند. برای مثال، فرض کنید  $F$  یک میدان،  $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ،  $X = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  و  $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ . فرض کنید  $\tau = \text{Rad}$ . در این صورت  $X, Y$  یکرخت با  $Y$  است اما نسبت به رابطه  $\overline{\beta_{\text{Rad}}^*}$  با  $Y$  هم‌ارز نیست زیرا  $\text{Rad}(R_R) = X$ .

به علاوه، اگر  $M = \mathbb{Z}\mathbb{Z}$  آن‌گاه  $m\mathbb{Z}\overline{\beta_{\text{Rad}}^*}n\mathbb{Z}$  اگر و تنها اگر  $m$  و  $n$  توسط اعداد اول یکسانی تقسیم‌پذیر باشند.  
**گزاره ۲.** فرض کنید  $f: M \rightarrow N$  یک پروریختی باشد. اگر  $X, Y \leq M$  به طوری که  $\overline{X\beta_\tau^*Y}$ ، آن‌گاه  $f(X)\overline{\beta_\tau^*}f(Y)$ .  
**اثبات:** فرض کنید برای بعضی زیرمدول‌های  $X, Y$  از  $M$ ،  $\overline{X\beta_\tau^*Y}$ ، آن‌گاه  $X + Y \subseteq \tau(M) + X$  و  $X + Y \subseteq \tau(M) + Y$ .  
 $Y$  بنابراین

$$f(X) + f(Y) \subseteq \tau(N) + f(Y) \text{ و } f(X) + f(Y) \subseteq \tau(N) + f(X)$$

این نتیجه می‌دهد که  $f(X)\overline{\beta_\tau^*}f(Y)$ .

**گزاره ۳.** فرض کنید  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  زیرمدول‌هایی از  $M$  باشند به طوری که  $X_1\overline{\beta_\tau^*}Y_1$  و  $X_2\overline{\beta_\tau^*}Y_2$  در این صورت

$$(X_1 + Y_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + X_2) \text{ و } (X_1 + X_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + Y_2).$$

**اثبات:** فرض کنید  $X_1\overline{\beta_\tau^*}Y_1$  و  $X_2\overline{\beta_\tau^*}Y_2$  در این صورت

$$X_1 + Y_1 \subseteq \tau(M) + X_1; X_1 + Y_1 \subseteq \tau(M) + Y_1$$

$$X_2 + Y_2 \subseteq \tau(M) + X_2; X_2 + Y_2 \subseteq \tau(M) + Y_2.$$

بنا بر نامساوی‌های بالا داریم  $(X_1 + X_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + Y_2)$  و  $(X_1 + Y_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + X_2)$ .

**نتیجه ۴.** فرض کنید  $Y \leq M$  و  $X \subseteq \tau(M)$  و  $K \subseteq \tau(M)$  در این صورت  $\overline{X\beta_\tau^*Y}$  اگر و تنها اگر  $\overline{X\beta_\tau^*(Y+K)}$ .

**اثبات:** ( $\Rightarrow$ ) از گزاره ۳ و این حقیقت که  $\overline{\beta_\tau^*}K = 0$  نتیجه می‌شود.

( $\Leftarrow$ ) چون  $K \subseteq \tau(M)$  داریم  $\overline{Y\beta_\tau^*(Y+K)}$  نتیجه بنا بر ویژگی تعدی رابطه  $\overline{\beta_\tau^*}$  برقرار است. □

**نتیجه ۵.** فرض کنید  $Y_1, \dots, Y_n \leq M$ ، اگر  $\overline{X\beta_\tau^*Y_i}$  برای هر  $i = 1, \dots, n$  در این صورت  $\overline{X\beta_\tau^*\sum_{i=1}^n Y_i}$ .

## مدول‌های گلدی $\tau$ -مکمل‌پذیر

در این بخش مدول‌های گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر و به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر را بررسی می‌کنیم.

**تعریف.** فرض کنید  $M$  یک مدول باشد.

(۱)  $M$  را گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر گوئیم هرگاه برای هر زیرمدول  $N$  از  $M$ ، یک زیرمدول  $\tau$ -مکمل  $S$  در  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $N\overline{\beta}_\tau^*S$ .

(۲)  $M$  را به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر گویند هرگاه برای هر زیرمدول  $N$  از  $M$  جمعوند  $D$  از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $N\overline{\beta}_\tau^*D$ .

بدیهی است که هر مدول به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر،  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر است و عکس آن زمانی برقرار است که  $\tau$  پیش‌رادیکال هم‌ارثی باشد. به آسانی دیده می‌شود که هر مدول به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر، گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر است. توجه می‌کنیم که اگر  $M$  مدولی با این ویژگی باشد که هر زیرمدول  $\tau$ -مکمل یک جمعوند مستقیم باشد، آن‌گاه گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر و به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل‌پذیر معادل یکدیگر هستند.

**گزاره ۶.** فرض کنید  $M$  یک مدول باشد. در این صورت  $M$ ، گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر  $X \leq M$  یک زیرمدول  $\tau$ -مکمل  $S$  از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که

$$S + \tau(M) = X + \tau(M).$$

**اثبات:** فرض کنید  $M$ ، مدول گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر باشد و  $X \leq M$ . در این صورت یک زیرمدول  $\tau$ -مکمل  $S$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $X + S \subseteq \tau(M) + S$  و  $X + S \subseteq \tau(M) + S$ . آن‌گاه

$$X + \tau(M) \subseteq S + \tau(M) \text{ و } S + \tau(M) \subseteq X + \tau(M).$$

بنابراین  $S + \tau(M) = X + \tau(M)$ . عکس به آسانی بررسی می‌شود.  $\square$ .

**نتیجه ۷.** فرض کنید  $M$  یک مدول باشد. اگر برای هر  $X \leq M$ ، یک زیرمدول  $\tau$ -مکمل  $S$  از  $M$  و یک  $H \subseteq \tau(M)$  وجود داشته باشد به طوری که  $X = S + H$ ، آن‌گاه  $M$  یک مدول گلدی  $\tau$ -مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** نشان می‌دهیم  $X\overline{\beta}_\tau^*S$ . از آن‌جا که

$$X + S = S + H \subseteq \tau(M) + S + H = \tau(M) + X$$

$$\square \text{ و } X + S = S + H + S \subseteq \tau(M) + S \text{ می‌گیریم که } X\overline{\beta}_\tau^*S. \square$$



**نتیجه ۸.** فرض کنید  $M$  یک مدول گلدی  $\tau$ -مکمل پذیر باشد. در این صورت برای هر  $X \leq M$  با  $\tau(M) \subseteq X$  داریم  $X = S + H$  که در آن  $S$  یک  $\tau$ -مکمل در  $M$  و  $H \subseteq \tau(M)$ .

**اثبات:** فرض کنید  $X \leq M$  به طوری که  $\tau(M) \subseteq X$ . بنا بر فرض یک زیرمدول  $\tau$ -مکمل  $S$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $X\overline{\beta}_\tau^* S$  سپس  $S \subseteq X$  و  $X = \tau(M) + (S \cap X) = \tau(M) + S$ .  $\square$

**تعریف.** فرض کنید  $M$  یک مدول باشد. در این صورت  $M$  را توزیع پذیر<sup>۱۷</sup> گویند هرگاه شبکه زیرمدول‌های آن تشکیل شبکه توزیع پذیر دهد، به طور معادل برای زیرمدول‌های  $K, L, N$  از  $M$  داشته باشیم،

$$N \cap (K + L) = (N \cap K) + (N \cap L) \text{ یا } N + (K \cap L) = (N + K) \cap (N + L).$$

**قضیه ۹.** فرض کنید  $M = A \oplus B$  یک مدول توزیع پذیر باشد. در این صورت  $M$  یک مدول گلدی  $\tau$ -مکمل پذیر (به طور قوی  $\tau$ -H-مکمل پذیر) است اگر و تنها اگر  $A$  و  $B$  گلدی  $\tau$ -مکمل پذیر (به طور قوی  $\tau$ -H-مکمل پذیر) باشند.

**اثبات:** ( $\Rightarrow$ ) فرض کنید  $X \leq A$ . در این صورت زیرمدول‌های  $S$  و  $L$  از  $M$  وجود دارند به طوری که  $S \cap \mathcal{S} + L = M$  و  $L \subseteq \tau(S)$  و  $X\overline{\beta}_\tau^* S$  نشان می‌دهیم که  $X\overline{\beta}_\tau^* (A \cap S)$  از آنجا که  $X\overline{\beta}_\tau^* S$  داریم  $X + S \subseteq \tau(M) + X$  و  $X + S \subseteq \tau(M) + X$  به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} X + (A \cap S) &\subseteq \tau(A) + X, \\ X + (A \cap S) &\subseteq (\tau(A) + A \cap S + B \cap S + \tau(B)) \cap A. \end{aligned}$$

بنا بر مدولاریتی داریم  $X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + X$  و  $X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + (A \cap S)$ . سپس  $X\overline{\beta}_\tau^* (A \cap S)$  و بنا بر فرض داریم،  $(A \cap S) + (A \cap L) = A$

$$(A \cap S) \cap (A \cap L) = A \cap S \cap L \subseteq A \cap (\tau(A \cap S) \oplus \tau(B \cap S)).$$

این نتیجه می‌دهد که  $A \cap S \cap L \subseteq \tau(A \cap S)$ . پس  $A \cap S$  یک  $\tau$ -مکمل از  $A \cap L$  در  $A$  است. بنابراین  $A$  گلدی  $\tau$ -مکمل پذیر است. به طور مشابه  $B$  گلدی  $\tau$ -مکمل پذیر است.

( $\Leftarrow$ ) فرض کنید  $U \leq M$  و  $U_1 = A \cap U$  و  $U_2 = B \cap U$  وجود دارند  $L_1, S_1 \leq A$  به طوری که  $U_1\overline{\beta}_\tau^* S_1, L_1 + S_1 = U_1$  و همچنین وجود دارند  $L_2, S_2 \leq B$  به طوری که  $U_2\overline{\beta}_\tau^* S_2, L_2 + S_2 = U_2$  و  $L_2 \cap S_2 \subseteq \tau(S_2)$  و  $L_1 \cap S_1 \subseteq \tau(S_1)$ . بنا بر گزاره ۲،  $U\overline{\beta}_\tau^* (S_1 + S_2)$  به علاوه  $S_1 + S_2 + L_1 + L_2 = M$  و  $(S_1 + S_2) \cap (L_1 + L_2) = (S_1 \cap L_1) + (S_2 \cap L_2) \subseteq \tau(S_1) + \tau(S_2) \subseteq \tau(S_1 + S_2)$  این نتیجه می‌دهد

<sup>17</sup>Distributive

که  $S_1 + S_2$  زیرمدول  $\tau$ -مکمل در  $M$  است. بنابراین  $M$  گلدی- $\tau$  مکمل‌پذیر است. اثبات برای این که  $A$  و  $B$  به طور قوی  $H$ - $\tau$  مکمل‌پذیر باشند مشابه است.  $\square$ .

**تعریف.** مدول  $M$  را فرا  $\tau$ -مکمل‌پذیر<sup>۱۸</sup> گویند هرگاه برای تمام زیرمدول‌های  $K$  و  $L$  از  $M$  با  $K + L = M$ ،  $K$  شامل یک  $\tau$ -مکمل  $\tau$  مکمل از  $L$  در  $M$  باشد.

**گزاره ۱۰.** هر مدول فرا  $\tau$ -مکمل‌پذیر، گلدی- $\tau$  مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید  $M$  فرا  $\tau$ -مکمل‌پذیر و  $X \leq M$ . فرض کنید  $X \subseteq \tau(M)$ . واضح است  $X\beta_\tau^*0$ . همچنین فرض کنید که  $X \not\subseteq \tau(M)$ . از آن جا که  $M$  به طور ضعیف  $\tau$ -مکمل‌پذیر است، زیرمدول  $L$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $X + L = M$  و  $X \cap L \subseteq \tau(M)$ . بنا بر فرض یک  $\tau$ -مکمل  $S$  از  $L$  در  $X$  وجود دارد. پس  $M = S + L$  و  $S \cap L \subseteq \tau(S)$ . چون  $S \subseteq X$  داریم  $X = S + (L \cap X) \subseteq \tau(M) + S$ . این نتیجه می‌دهد که  $X\beta_\tau^*S$ . بنابراین  $M$  گلدی- $\tau$  مکمل‌پذیر است.  $\square$ .

**تعریف.** فرض کنید  $M$  یک مدول باشد. زیرمدول  $U$  از  $M$  را به طور قوی شبه بالا برنده<sup>۱۹</sup> (QSL) در  $M$  گویند اگر هر زمان که  $(A + U)/U$  جمعیوند مستقیم از  $M/U$  باشد، آن گاه جمعیوند مستقیم  $P$  از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $P + U = A + U$  (مرجع [۱] را ببینید).

**قضیه ۱۱.** فرض کنید  $M$  یک مدول تصویری باشد به طوری که هر زیرمدول  $\tau$ -مکمل از  $M$  یک جمعیوند مستقیم باشد. فرض کنید  $\tau$  پیش رادیکال هم ارثی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

$$(1) \quad M, \tau\text{-مکمل‌پذیر است.}$$

$$(2) \quad M, \tau\text{-بالا برنده است.}$$

$$(3) \quad M, \text{فرا } \tau\text{-مکمل‌پذیر است.}$$

$$(4) \quad M, \text{به طور قوی } H\text{-}\tau\text{-مکمل‌پذیر و } \tau(M), \text{QSL در } M \text{ است.}$$

$$(5) \quad M, \text{گلدی-}\tau\text{-مکمل‌پذیر است و } \tau(M), \text{QSL در } M \text{ است.}$$

**اثبات:** (4)  $\Leftrightarrow$  (3)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (1) با استفاده از [۹، قضیه ۶]. (۴)  $\Leftrightarrow$  (۵) بدیهی است.  $\square$ .

**تعریف.** فرض کنید  $M$  یک مدول باشد. زیرمدول  $X$  از  $M$  را پایای کامل<sup>۲۰</sup> گویند هرگاه برای هر  $f \in \text{End}(M)$ ،  $f(X) \subseteq X$ .

<sup>18</sup>Amplly  $\tau$ -supplemented

<sup>20</sup>Fully invariant

<sup>19</sup>Quasi strongly lifting

**قضیه ۱۲.** فرض کنید  $M = M_1 \oplus M_2$ ، که در آن  $M_1$  زیرمدول پایای کامل از  $M$  است. فرض کنید  $\tau$  یک پیش رادیکال هم ارثی باشد. اگر  $M$  به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل پذیر باشد، آن گاه  $M_1$  و  $M_2$  به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل پذیر هستند.

**اثبات:** بدیهی است  $M_2$  به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل پذیر است. نشان می‌دهیم که  $M_1$  به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل پذیر است. فرض کنید  $K$  زیرمدول  $M_1$  باشد. چون  $M$  به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل پذیر است، جمعوند مستقیم  $D$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $K + D \subseteq \tau(M) + D$  و  $K + D \subseteq \tau(M) + K$ . قرار دهید  $D' = M \ominus D$ ، که در آن  $D' \leq M$ . از آنجا که  $M_1$  زیرمدول پایا از  $M$  است، داریم  $M_1 = (M_1 \cap D) \oplus (M_1 \cap D')$ . بنابراین  $M_1 \cap D$  جمعوند مستقیم از  $M_1$  است. می‌دانیم که  $K + D \subseteq \tau(M) + K$  و  $K + D \subseteq \tau(M) + D$ . به آسانی دیده می‌شود که  $K + (D \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + K$  و  $K + (D \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + (D \cap M_1)$ . پس  $M_1$  به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل پذیر است.  $\square$ .

**قضیه ۱۳.** فرض کنید  $M = M_1 \oplus M_2$ . همچنین فرض کنید برای هر زیرمدول  $N$  از  $M_1$  جمعوند مستقیم  $K$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $M_2 \leq K$ ،  $N + K \subseteq \tau(M) + K$  و  $N + K \subseteq \tau(M) + N$ . در این صورت  $M_1$  به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید  $L$  زیرمدول  $M_1$  باشد. بنا بر فرض، جمعوند مستقیم  $K$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $M_2 \leq K$ ،  $L + K \subseteq \tau(M) + L$  و  $K \subseteq \tau(M) + K$ . پس  $K \cap M_1$  یک جمعوند مستقیم از  $M_1$  است. به آسانی بررسی می‌شود که  $L + (K \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + L$  و  $L + (K \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + (K \cap M_1)$ . بنابراین  $M_1$  به طور قوی  $H$ - $\tau$ -مکمل پذیر است.  $\square$ .

**تعریف.** فرض کنید  $M_1$  و  $M_2$  مدول‌هایی باشند به طوری که  $M = M_1 \oplus M_2$ . گوئیم  $M_1$ - $\tau$ - $M_2$ -سجکتیو<sup>۲۱</sup> است هر گاه برای هر  $A \leq M$  که  $M = A + M_2$ ، وجود داشته باشد  $K \leq M$  به طوری که  $M = K \oplus M_2$  و  $M_1 \cdot A + K \subseteq M$  و  $\tau(M) + A$  را نسبت به هم  $\tau$ -سجکتیو گویند هر گاه  $M_1$ ،  $M_2$ - $\tau$ -سجکتیو و  $M_2$  نیز  $M_1$ - $\tau$ -سجکتیو باشد.

**تعریف.** مدول  $M$ ،  $\tau$ - $\oplus$ -مکمل پذیر<sup>۲۲</sup> نامیده می‌شود هر گاه برای هر  $A \leq M$ ، وجود داشته باشد  $B \leq \oplus M$  به طوری که  $M = A + B$  و  $A \cap B \leq \tau(B)$ . واضح است که هرمدول  $\tau$ -بالا برنده،  $\tau$ - $\oplus$ -مکمل پذیر است و هرمدول  $\tau$ - $\oplus$ -مکمل پذیر،  $\tau$ -مکمل پذیر است.

**تعریف.** مدول  $M$  رامدول زوج<sup>۲۳</sup> گویند هر گاه هر زیرمدول از  $M$  پایای کامل باشد [۴].

<sup>21</sup> $\tau$ - $M_2$ -sejctive

<sup>23</sup>Duo module

<sup>22</sup> $\tau$ - $\oplus$ -supplemented

**قضیه ۱۴.** فرض کنید  $M = M_1 \oplus M_2$ ،  $M - \tau$  -مکمل‌پذیر و مدول زوج باشد. اگر  $M_1 - \tau$ ،  $M_2 - \tau$  -سجکتیو (یا  $M_1 - \tau$ ،  $M_2 - \tau$  -سجکتیو) باشد، آن‌گاه  $M$ ، مدول به طور قوی  $H - \tau$  -مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید  $N$  زیرمدول از  $M$  باشد. چون  $M - \tau$  -مکمل‌پذیر است، تجزیه  $M = M_1 \oplus M_2$  وجود دارد به طوری که  $M = N + M_2$  و  $N \cap M_2 \subseteq \tau(M_2)$  برای بعضی زیرمدول‌های  $M_1$  و  $M_2$ . چون  $M_1 - \tau$ ،  $M_2 - \tau$  -سجکتیو است، وجود  $K \leq M$  به طوری که  $M = K \oplus M_2$  و  $N + K \subseteq \tau(M) + N$  حال نشان می‌دهیم که  $N + K \subseteq \tau(M) + K$ . چون  $M$  یک مدول زوج است،  $N$  پایای کامل است و  $N = (N + K) \cap (N + M_2) = N + K$  پس  $N = N + K$  و  $K \leq N$ . چون  $N + K = N + K$  و  $N = (N + K) \cap (N + M_2) = N + K$  بنابراین  $N = (N \cap M_2) \oplus K \subseteq \tau(M) + K$  است.  $\square$

**تعریف.** زیرمدول  $N$  از  $M$  را هم‌متناهی<sup>۲۴</sup> در  $M$  گویند هرگاه مدول کسری  $\frac{M}{N}$  به طور متناهی تولید شده باشد. مدول  $M$  را هم‌متناهی  $H - \tau$  -مکمل‌پذیر<sup>۲۵</sup> گویند هرگاه برای هر زیرمدول هم‌متناهی  $Y$  از  $M$ ،  $M$  جمعی  $D$  از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $Y + D \subseteq \tau(M) + Y$  و  $Y + D \subseteq \tau(M) + D$ .

بدیهی است که هر مدول به طور قوی  $H - \tau$  -مکمل‌پذیر، هم‌متناهی  $H - \tau$  -مکمل‌پذیر است. از طرف دیگر هر مدول هم‌متناهی  $H - \tau$  -مکمل‌پذیر و به طور متناهی تولید شده، به طور قوی  $H - \tau$  -مکمل‌پذیر است. مثال زیر نشان می‌دهد که برای  $\tau = \text{Rad}$ ، هر مدول کسری از مدول‌های هم‌متناهی  $H - \tau$  -مکمل‌پذیر نیازی ندارد مدول‌های هم‌متناهی  $H - \tau$  -مکمل‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم تحت بعضی شرایط این مطلب درست است.

**مثال ۱۵.** فرض کنید  $R$  یک حلقه موضعی نوتری جابه‌جایی باشد که حلقه ایده‌آل اصلی نیست (به عنوان مثال  $R = k[x^2, x^3]/(x^4)$  که در آن  $k$  یک میدان است یا می‌توانیم حلقه را  $R = F[[x, y]]$  حلقه سری‌های توانی روی میدان  $F$  با متغیرهای  $x$  و  $y$  را انتخاب کنیم). آن‌گاه  $R$  یک حلقه ارزیابی نیست. فرض کنید  $n \geq 2$ . بنابر [۱۱، قضیه ۲]، زیرمدول  $L$  از  $R$  مدول  $M = R^{(n)}$  وجود دارد به طوری که  $R$  -مدول  $N = M/L$  تجزیه‌ناپذیر است و  $N$  نمی‌تواند به وسیله کمتر از  $n$  عنصر تولید شود. لذا  $N$ ،  $R$  -مدول موضعی نیست. پس بنابر [۸، گزاره ۸، ۲]،  $N$  هم‌متناهی  $H$  -مکمل‌پذیر نیست. بنابراین  $N$ ، هم‌متناهی  $H - \text{Rad}$  -مکمل‌پذیر نیست. توجه می‌کنیم که چون  $M/L$  نوتری است،  $M/L$  به طور متناهی تولید شده است و بنابراین  $M/L \ll \text{Rad}(M/L)$  و در نتیجه  $N$  هم‌متناهی  $H$  -مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر  $N$ ، هم‌متناهی  $H - \text{Rad}$  -مکمل‌پذیر باشد. از طرف دیگر [۸، گزاره ۱، ۲] نشان می‌دهد که  $M$ ، هم‌متناهی  $H$  -مکمل‌پذیر است و بنابراین هم‌متناهی  $H - \text{Rad}$  -مکمل‌پذیر است.

<sup>24</sup>Cofinite<sup>25</sup> $\tau$ -H-cofinitely supplemented

**گزاره ۱۶.** فرض کنید  $M$  یک مدول هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر و  $N \leq M$  باشد. فرض کنید برای هر جمعی مستقیم  $K$  از  $M$ ، یک زیرمدول  $L$  از  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $N \leq L \leq K + N$ ،  $L/N$  جمعی مستقیم از  $M/N$  و  $(K + N)/N \subseteq \tau(M/N) + L/N$  در این صورت  $M/N$  هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید  $Y/N \leq M/N$  یک زیر مدول هم متناهی باشد. چون  $M$  هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر است، جمعی مستقیم  $K$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $Y + K \subseteq \tau(M) + K$  و  $Y + K \subseteq \tau(M) + Y$ . بنا بر فرض، زیر مدول  $L$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $N \leq L \leq K + N$ ،  $L/N$  جمعی مستقیم از  $M/N$  و  $\frac{K+N}{N} \subseteq \tau\left(\frac{M}{N}\right) + \frac{L}{N}$  بدیهی است که  $Y/N + L/N \subseteq \tau(M/N) + L/N$  چون  $Y + K \subseteq \tau(M) + Y$  داریم

$$\frac{Y}{N} + \frac{L}{N} \subseteq \frac{Y}{N} + \frac{K+N}{N} \subseteq \frac{\tau(M) + N}{N} + \frac{Y}{N} \subseteq \tau\left(\frac{M}{N}\right) + \frac{Y}{N}.$$

این اثبات را کامل می‌کند.  $\square$ .

**گزاره ۱۷.** فرض کنید  $M$  یک مدول و  $N \leq M$  یک زیرمدول باشد به طوری که برای هر تجزیه  $M = M_1 \oplus M_2$  داشته باشیم  $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$ . اگر  $M$  هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر باشد، آن‌گاه  $M/N$  هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید  $D$  و  $D'$  زیرمدول‌هایی از  $M$  باشند به طوری که  $M = D \oplus D'$ . بنا بر فرض، داریم  $N = (D \cap N) \oplus (D' \cap N)$  در این صورت

$$(D + N) \cap (D' + N) = [D \oplus (D' \cap N)] \cap [(D \cap N) \oplus D'] = (D \cap N) \oplus (D' \cap N) = N.$$

پس  $M/N = [(D + N)/N] \oplus [(D' + N)/N]$ . گزاره ۱۶ نشان می‌دهد که  $M/N$  هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر است.  $\square$ .

**نتیجه ۱۸.** (۱) اگر  $M$  یک مدول هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر و  $N$  زیر مدول پایای کامل از  $M$  باشد، آن‌گاه  $M/N$  هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر است.

(۲) اگر  $M$  هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر مدول زوج باشد، آن‌گاه هر جمعی مستقیم از  $M$  هم متناهی  $\tau$ -H-مکمل پذیر است.

**اثبات:** از گزاره ۱۷ نتیجه حاصل می‌شود.  $\square$ .

### تشکر و قدردانی

این مقاله نتیجه طرح تحقیقاتی مصوب دانشگاه صنعتی قوچان به شماره قرارداد ۸۶۴۴ در تاریخ ۱۳۹۹/۱۲/۱۷ می‌باشد.

## References

1. Alkan M., On  $\tau$ -lifting Modules and  $\tau$ -semiperfect Modules, *Turk. J. Math.*, 33 (2009), 117–130.
2. Al-Takhman K., Lomp C. and Wisbaure R.,  $\tau$ -complemented and  $\tau$ -upplemented modules, *Algebra Discrete Math.*, 3 (2006), 1-15.
3. BirkenmeierG. F., Takil MutluF., NebiyevC., Sokmez N. and TercanA., Goldie  $\ast$ -supplemented modules, *Glasg. Math. J.*, 52A (2010), 41–52.
4. Clark J., Lomp C., Vanaja N. and WisbauerR., *Lifting modules -supplements and projectivity in module theory*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 2006.
5. KeskinD., Nematollahi M. J. and TalebiY., On H-supplemented modules, *Algebra Colloq.*, 18 (Spec 1) (2011), 915-924.
6. Koşan M. T. and KeskinD., H-supplemented duo modules, *J. Algebra Appl.* 6(6) (2007), 965-971.
7. Mohamed S. H. and MüllerB. J., *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 147, Cambridge, University Press, 1990.
8. TalebiY., Tribak R. and Moniri HamzekolaeiA. R., On H-Cofinitely supplemented Modules, *Bull. Iran. Math. Soc.*, 39 (2) (2013), 325-346.
9. TalebiY., Moniri Hamzekolaei A. R. and Keskin-TütüncüD., H-supplemented modules with respect to a preradical, *Algebra Discrete Math.*, 12 (1) (2011), 116–131.
10. TalebiY., Moniri Hamzekolaei A. R. and TercanA., Goldie-Rad-supplemented modules, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, 22(3) (2014), 205–218.
11. WarfieldR.B., Jr., Decomposability of finitely presented modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25 (1970) 167-172.
12. WisbauerR., *Foundations of module and ring theory*, Gordon and Breach, Reading, 1991.