Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# Goldie supplemented modules with respect to a preradical

Tayyebeh Amouzegar[1]

1. Department of Mathematics, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

E-mail: t.amouzgar@qiet.ac.ir

**Article Info**

**Article type:**

Research Article

**Article history:**

Received:
4 January 2020
Revised form:
10 January 2021
Accepted:
19 January 2021
Published online:
21 November 2022

**Keywords**:
H-supplemented module;
Strongly τ -H-supplemented module;
Goldie- τ -supplemented module.

**ABSTRACT**

**Introduction**

Throughout this paper R will denote an associative ring with identity, M a unitary right R-module. A functor $\tau$from the category of the right R-modules Mod-R to itself is called a preradicalif it satisfies the following properties:

(i) $\tau(M)$is a submodule of M, for every R-module M;

(ii) If $f: M' \to M$is an R-module homomorphism, then $f(\tau(M')) \leq \tau(M)$ and $\tau(f)$ is the restriction of $f$to $\tau(M')$.

For example Rad, Soc, and $Z_M$are preradicals. Note that if K is a summand of M, then $K \cap \tau(M) = \tau(K)$.

For a preradical $\tau$, Al-Takhman, Lomp and Wisbauer defined and studied the concept of $\tau$-lifting and $\tau$-supplemented modules. A module M is called $\tau$-lifting if every submodule N of M has a decomposition $N = A \oplus B$ such that A is a direct summand of M and $B \subseteq \tau(M)$.A submodule $K \subseteq M$ is called $\tau$ −supplement (weak$\tau$-supplement) provided there exists some $U \subseteq M$such that $M = U + K$ and

$$U \cap K \subseteq \tau(K) \quad (U \cap K \subseteq \tau(M)).$$

M is called $\tau$-supplemented (weakly $\tau$-supplemented) if each of its submodules $\tau$-supplement (weak $\tau$-supplement) in M.Talebi, Moniri Hamzekolaei and Keskin-Tütüncü, defined $\tau$-H-supplemented modules. A module M is called$\tau$-H-supplemented if for every $N \leq M$ there exists a direct summand D of Msuch that

$$(N + D)/N \subseteq \tau(M/N) \text{and} (N + D)/D \subseteq \tau(M/D).$$

The $\beta^*$ relation is introduced and investigated by Birkenmeier, Takil Mutlu, Nebiyev, Sokmez and Tercan. Let X and Y be submodules of M. X and Yare $\beta^*$ equivalent,

X$\beta^*$Y, provided $\frac{X+Y}{X} \ll \frac{M}{X}$ $and$ $\frac{X+Y}{Y} \ll \frac{M}{Y}$.

Based on definition of $\beta^*$ relation they introduced two new classes of modules namely

$Goldie^*$-lifting and $Goldie^*$ $-$supplemented.They showed that two concept of H-supplemented modules and $Goldie^*$ $-$lifting modules coincide.

In this paper, we introduce Goldie$-\tau-$supplemented and strongly $\tau$-H-supplemented modules. We introduce the $\overline{\beta^*}$ relation. We investigate some properties of this relation and prove that this relation is an equivalence relation. We define Goldie$-\tau-$supplemented and strongly $\tau$-H-supplemented modules. We call a module M, Goldie$-\tau-$supplemented (strongly $\tau$-H-supplemented) if for any submodule N of M, there exists a $\tau$-supplement submodule (a direct summand) D of M such thatN$\overline{\beta^*}$D. Clearly every strongly $\tau$-H-supplemented module is Goldie $\tau$ -supplemented. We will study direct sums of Goldie $\tau$ -H-supplemented modules. Let $M = A \oplus B$ be a distributive module. Then M is Goldie $\tau$ -upplemented (strongly $\tau$ -H-supplemented) if and only if A and B are Goldie $\tau$ -supplemented (strongly $\tau$ -H-supplemented). We also define $\tau$ -H-cofinitely supplemented modules and obtain some conditions which under the factor module of a $\tau$ -H-cofinitely supplemented module will be $\tau$ -H-cofinitely supplemented.

**Material and methods**

In this paper, first we define and investigate the $\overline{\beta^*_\tau}$ relation on submodules of a module. We show that the $\overline{\beta^*_\tau}$relation is an equivalence relation. We apply this relation to define and investigate the classes of Goldie-$\tau$ -supplemented modules and strongly$\tau$-H-supplemented modules.

**Results and discussion**

We investigate some properties of this relation and prove that this relation is an equivalence relation. We define Goldie$-\tau-$supplemented and strongly $\tau$-H-supplemented modules. We call a module M, Goldie$-\tau-$supplemented (strongly $\tau$ -H-supplemented) if for any submodule N of M, there exists a $\tau$-supplement submodule (a direct summand) D of M such that N$\overline{\beta^*}$ D. Clearly every strongly $\tau$ -H-supplemented module is Goldie $\tau$ -supplemented. We will study direct sums of Goldie $\tau$ -H-supplemented modules. Let $M = A \oplus B$ be a distributive module. Then M is Goldie $\tau$ -upplemented (strongly $\tau$ -H-supplemented) if and only if A and B are Goldie $\tau$ -supplemented (strongly $\tau$ -H-supplemented). We also define $\tau$ -H-cofinitely supplemented modules and obtain some conditions which under the factor module of a $\tau$ -H-cofinitely supplemented module will be $\tau$ -H-cofinitely supplemented.

**Conclusion**

The following conclusions were drawn from this research.

- Let $M = M_1 \oplus M_2$, where $M_1$ is a fully invariant submodule of M. Assume that $\tau$ is a cohereditary preradical. If M is strongly $\tau$-H-supplemented, then $M_1$ *and* $M_2$ are strongly $\tau$ −H-supplemented.
- Let M be an $\tau$-H-cofinitely supplemented module and let $N \leq M$ be a submodule. Suppose that for every direct summand K of M, there exists a submodule L of M such that $N \subseteq L \subseteq K + N$, L/N is a direct summand of M/N and $\frac{\frac{K+N}{N}}{L/N} \subseteq \frac{\tau\left(\frac{M}{N}\right)+\frac{L}{N}}{L/N}$. Then M/N is $\tau$-H-cofinitelysupplemented.
- Let M be a module and let $N \leq M$ be a submodule such that for each decomposition $M = M_1 \oplus M_2$ we have $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$. If M is $\tau$-H-cofinitely supplemented, then M/N is $\tau$-H-cofinitely supplemented.

**How to cite:** Amouzegar, T., (2022) Goldie supplemented modules with respect to a preradical. *Mathematical Researches*, 8 (3), 1-14


Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# مدول‌های گلدی مکمل‌پذیر در ارتباط با پیش رادیکال

طیبه آموزگار[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران. پست الکترونیکی: t.amouzgar@qiet.ac.ir

**اطلاعات مقاله** | **چکیده**

**نوع مقاله:** مقاله پژوهشی

**تاریخ دریافت:** ۱۳۹۸/۱۰/۱۴
**تاریخ بازنگری:** ۱۳۹۹/۱۰/۲۱
**تاریخ پذیرش:** ۱۳۹۹/۱۰/۳۰
**تاریخ انتشار:** ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

فرض کنید $\tau$ یک پیش رادیکال باشد. در این مقاله رابطه روی زیرمدول‌های یک مدول را تعریف و بررسی می کنیم. نشان می‌دهیم که رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ یک رابطهٔ هم ارزی است. این رابطه را برای تعریف مدول‌های گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر و مدول‌های به طور قوی$\tau$-H مکمل‌پذیر و بررسی ویژگی‌های آنها به کار می‌بریم.

**واژه‌های کلیدی:**
مدول‌های-H مکمل‌پذیر،
مدول‌های به طور قوی$\tau$-H-مکمل‌پذیر،
مدول‌های گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر.

**استناد**: آموزگار، طیبه؛ (۱۴۰۱). مدول‌های گلدی مکمل‌پذیر در ارتباط با پیش رادیکال. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۱۴-۱.



ناشر: دانشگاه خوارزمی

## مقدمه

در این مقاله $R$ حلقهٔ شرکت‌پذیر با عنصر همانی و $M$ یک $R$-مدول راست یکانی است. نماد $N \leq^{\oplus} M$ نشان می‌دهد که $N$ جمعوند مستقیم $M$ است. $Rad(M)$ رادیکال جیکبسون[1] از $M$ را نشان می‌دهد. زیرمدول $N$ را در $M$ کوچک[2] گویند و با $N \ll M$ نشان می‌دهند هرگاه برای هر $L \subsetneq M$، داشته باشیم $L + N \neq M$. مدول $M$ را بالابرنده[3] گویند هرگاه برای هر $A \leq M$، جمعوند مستقیم $B$ از $M$ وجود داشته باشد به طوری که $B \subseteq A$ و $A/B \ll M/B$ [۷].

فرض کنید $K$ و $N$ زیرمدول‌هایی از $M$ باشند. $K$ را یک مکمل[4] از $N$ در $M$ گویند هرگاه $M = K + N$ و $K$ نسبت به این ویژگی مینیمال باشد یا به طور معادل $M = K + N$ و $K \cap N \ll K$. $M$ یک مدول مکمل پذیر[5] نامیده می‌شود هرگاه هر زیر مدول از $M$ دارای یک مکمل در $M$ باشد. مطابق با [۷] مدول $M$، $H$-مکمل‌پذیر[6] است هرگاه برای هر زیرمدول $A$ از $M$ جمعوند مستقیم $D$ از $M$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر زیرمدول $X$ از $M$، $A + X = M$ اگر و تنها اگر $D + X = M$.

در [۵]، اثبات شده است که $M$، $H$-مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر زیر مدول $A$ از $M$ جمعوند مستقیم $D$ از $M$ وجود داشته باشد به طوری که $\frac{A+D}{A} \ll \frac{M}{A}$ و $\frac{A+D}{D} \ll \frac{M}{D}$. مدول‌های $H$- مکمل‌پذیر در [۷] به عنوان تعمیم مدول‌های بالابرنده معرفی شده‌اند. برای اطلاعات بیشتر درباره مدول‌های $H$- مکمل‌پذیر به مراجع [۵]، [۶] و [۷] ارجاع می‌دهیم.

فانکتور $\tau$ از رستهٔ $R$-مدول‌های راست به خودش را یک پیش رادیکال[7] گویند هرگاه در ویژگی‌های زیر صدق کند:

(۱) برای هر $R$-مدول $M$، $\tau(M)$ یک زیرمدول از $M$ است.

(۲) اگر $f: M' \to M$ یک همریختی $R$-مدولی باشد، آن‌گاه $f(\tau(M')) \leq \tau(M)$ و $\tau(f)$ تحدید $f$ به $\tau(M')$ است.

برای مثال $Rad$، $Soc$ و $Z_M$ پیش رادیکال هستند. توجه می‌کنیم که اگر $K$ یک جمعوند مستقیم از $M$ باشد آن‌گاه $K \cap \tau(M) = \tau(K)$. در [۲]، التخمان[8]، لمپ[9] و ویزبایر[10] مفهوم مدول های $\tau$-بالابرنده و $\tau$-مکمل‌پذیر، که در آن $\tau$ یک پیش رادیکال است، را بیان و مطالعه کردند. یک مدول $M$ را $\tau$-بالابرنده[11] گویند هرگاه هر زیر مدول $N$ از $M$ دارای یک تجزیهٔ $N = A \oplus B$ باشد به طوری که $A$ یک جمعوند مستقیم از $M$ و $B \subseteq \tau(M)$. بنابر [۲]، یک زیرمدول $K \subseteq M$، $\tau$-مکمل[12] ($\tau$-مکمل ضعیف[13]) نامیده می‌شود هرگاه بعضی $U \subseteq M$ وجود داشته باشد به طوری که $M = U + K$ و $U \cap K \subseteq \tau(K)$. $(U \cap K \subseteq \tau(M))$ مدول $M$، $\tau$-مکمل پذیر($\tau$-مکمل پذیر ضعیف) نامیده می‌شود هرگاه هر یک از زیر مدول های آن دارای یک $\tau$-مکمل( $\tau$-مکمل ضعیف) در $M$ باشد. یک مدول $M$، $\tau$-H-مکمل‌پذیر[14] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $N \leq M$ یک جمعوند مستقیم $D$ از $M$ وجود داشته باشد به طوری که $\frac{N+D}{N} \subseteq \tau(M/N)$ و $\frac{N+D}{D} \subseteq \tau(M/D)$ [۹].

فرض کنید $X$ و $Y$ زیرمدول هایی از مدول $M$ باشند. نویسندگان در [۳]، $X$ و $Y$ را هم ارز $\beta^*$ نامیدند، $X\beta^*Y$، هرگاه $\frac{X+Y}{X} \ll$

---

[1] Jacobsonradical
[2] Small
[3] Lifting
[4] Supplement
[5] Supplemented
[6] H-Supplemented
[7] Preradical
[8] Al-Takhman
[9] Lomp
[10] Wisbauer
[11] $\tau$-Lifting
[12] $\tau$-Supplement
[13] Weakly $\tau$-supplement
[14] $\tau$-H- Supplemented

$\frac{M}{X}$ و $\frac{M}{Y} \ll \frac{X+Y}{Y}$. آنها بر اساس تعریف رابطهٔ $\beta^*$ دو ردهٔ جدید از مدول‌ها به نام‌های گلدی *- بالابرنده و گلدی *-مکمل‌پذیر را معرفی کردند. آنها نشان دادند که دو مفهوم $H$-مکمل‌پذیر و گلدی *-بالابرنده بر هم منطبق هستند. نویسندگان در [۱۰]، برگرفته از [۳]، رابطه $\beta^{**}$ را معرفی و با استفاده از این رابطه مدول‌های گلدی $Rad$-مکمل‌پذیر و $H$-$Rad$-مکمل‌پذیر را تعریف و مطالعه کردند.

در این مقاله، با انگیزه از مراجع [۲]، [۳] و [۱۰]، مدول‌های گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر و به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر را معرفی و بررسی می‌کنیم. در بخش ۲، رابطه $\overline{\beta_\tau^*}$ را معرفی و بعضی از ویژگی‌های این رابطه را بررسی می کنیم. فرض کنید $X$ و $Y$ زیرمدول‌هایی از مدول $M$ باشند. $X$ و $Y$ را نسبت به رابطه $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز نامیم هرگاه $X + Y \subseteq \tau(M) + X$ و $X + Y \subseteq \tau(M) + Y$. نشان می‌دهیم این رابطه یک رابطهٔ هم ارزی است. در بخش ۳، مدول‌های گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر و به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر را تعریف می‌کنیم. با انگیزه از [۳] و بر اساس تعریف رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ مدول $M$ را گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر[۱۵] (به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر[۱۶]) گوییم هرگاه برای هر زیر مدول $N$ از $M$، زیر مدول $\tau$-مکمل (یک جمعوند $D$) از $M$ وجود داشته باشد به طوری که $N\overline{\beta_\tau^*}D$. به وضوح هر مدول به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر، گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر است. در این متن مجموع مستقیم مدول‌های به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر و نیز گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر را بررسی خواهیم کرد. فرض کنید مدول $M = A \oplus B$ یک مدول توزیع‌پذیر باشد. در این صورت $M$، گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر (به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر) است اگر و تنها اگر $A$ و $B$، گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر (به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر) باشند (قضیهٔ ۹). همچنین مدول‌های هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر را تعریف می‌کنیم و شرایطی را به دست می‌آوریم که تحت آنها مدول کسری از یک مدول هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر یک مدول هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر باشد.

## رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$

در این بخش رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ روی زیرمدول‌های یک مدول تعریف و بررسی می‌شود. فرض کنید $X$ و $Y$ زیرمدول‌هایی از مدول $M$ باشند. $X$ و $Y$ را نسبت به رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز نامیم

هرگاه

$$X + Y \subseteq \tau(M) + Y \text{ و } X + Y \subseteq \tau(M) + X.$$

**لم ۱.** رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

**اثبات:** ویژگی‌های تقارن و بازتابی بدیهی هستند. برای خاصیت تعدی، فرض کنید $X\overline{\beta_\tau^*}Y$ و $Y\overline{\beta_\tau^*}Z$ بنابراین داریم

$$X + Y \subseteq \tau(M) + X \quad ; \quad X + Y \subseteq \tau(M) + Y$$

$$Y + Z \subseteq \tau(M) + Y \quad ; \quad Y + Z \subseteq \tau(M) + Z.$$

[15] Goldie-$\tau$-supplemented [16] Strongly $\tau$-H-supplemented

به آسانی دیده می‌شود که $X + Z \subseteq \tau(M) + X$ و $X + Z \subseteq \tau(M) + Z$. در نتیجه $X\overline{\beta_\tau^*}Z$.$\square$

بدیهی است که هر زیرمدولی که مشمول در $\tau(M)$ باشد با زیرمدول صفر نسبت به رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز است. توجه می‌کنیم که دو زیرمدول ممکن است یکریخت باشند ولی نسبت به رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز نباشند. برای مثال، فرض کنید $F$ یک میدان، $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$، $X = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$.

فرض کنید $\tau = Rad$. در این صورت $X$ ، $R-$ یکریخت با $Y$ است اما $X$ نسبت به رابطهٔ $\overline{\beta_{Rad}^*}$ با $Y$ هم‌ارز نیست زیرا $Rad(R_R) = X$.

به علاوه، اگر $M = \mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ آن‌گاه $m\mathbb{Z}\overline{\beta_{Rad}^*}n\mathbb{Z}$ اگر و تنها اگر $m$ و $n$ توسط اعداد اول یکسانی تقسیم‌پذیر باشند.

**گزارهٔ ۲.** فرض کنید $f: M \to N$ یک یروریختی باشد. اگر $X, Y \leq M$ به طوری که $X\overline{\beta_\tau^*}Y$، آن‌گاه $f(X)\overline{\beta_\tau^*}f(Y)$.

**اثبات:** فرض کنید برای بعضی زیرمدول‌های $X, Y$ از $M$، $X\overline{\beta_\tau^*}Y$. آن‌گاه $X + Y \subseteq \tau(M) + X$ و $X + Y \subseteq \tau(M) + Y$. بنابراین

$$f(X) + f(Y) \subseteq \tau(N) + f(X) \text{ و } f(X) + f(Y) \subseteq \tau(N) + f(Y).$$

این نتیجه می‌دهد که $f(X)\overline{\beta_\tau^*}f(Y)$ .$\square$

**گزارهٔ ۳.** فرض کنید $X_1$، $X_2$، $Y_1$، و $Y_2$ زیرمدول‌هایی از $M$ باشند به طوری که $X_1\overline{\beta_\tau^*}Y_1$ و $X_2\overline{\beta_\tau^*}Y_2$، در این صورت

$$(X_1 + X_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + Y_2) \text{ و } (X_1 + Y_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + X_2).$$

**اثبات:** فرض کنید $X_1\overline{\beta_\tau^*}Y_1$ و $X_2\overline{\beta_\tau^*}Y_2$ . در این صورت

$$X_1 + Y_1 \subseteq \tau(M) + X_1; X_1 + Y_1 \subseteq \tau(M) + Y_1$$

$$X_2 + Y_2 \subseteq \tau(M) + X_2; X_2 + Y_2 \subseteq \tau(M) + Y_2.$$

بنا بر نامساوی‌های بالا داریم $(X_1 + X_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + Y_2)$ و $(X_1 + Y_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + X_2)$ .$\square$

**نتیجهٔ ۴.** فرض کنید $X$ ، $Y \leq M$ و $K \subseteq \tau(M)$. در این صورت $X\overline{\beta_\tau^*}Y$ اگر و تنها اگر $X\overline{\beta_\tau^*}(Y + K)$.

**اثبات:** $(\Rightarrow)$ از گزارهٔ ۳ و این حقیقت که $0\,\overline{\beta_\tau^*}K$ نتیجه می‌شود.

$(\Leftarrow)$ چون $K \subseteq \tau(M)$، داریم $Y\overline{\beta_\tau^*}(Y + K)$. نتیجه بنا بر ویژگی تعدی رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ برقرار است.$\square$

**نتیجهٔ ۵.** فرض کنید $X$، $Y_1$، ...، $Y_n \leq M$ اگر $X\overline{\beta_\tau^*}Y_i$ برای هر $i = 1, \ldots, n$، در این صورت $X\overline{\beta_\tau^*} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ .

## مدول‌های گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر

در این بخش مدول‌های گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر و به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر را بررسی می‌کنیم.

**تعریف.** فرض کنید $M$ یک مدول باشد.

(۱) $M$ را گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر گوییم هرگاه برای هر زیرمدول $N$ از $M$، یک زیرمدول $\tau$-مکمل $S$ در $M$ وجود داشته باشد به طوری که $N\overline{\beta_\tau^*}S$.

(۲) $M$ را به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر گویند هرگاه برای هر زیرمدول $N$ از $M$ جمعوند $D$ از $M$ وجود داشته باشد به طوری که $N\overline{\beta_\tau^*}D$.

بدیهی است که هر مدول به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر، $\tau$-H-مکمل‌پذیراست و عکس آن زمانی برقرار است که $\tau$ پیش رادیکال هم‌ارثی باشد. به آسانی دیده می‌شود که هر مدول به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر، گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر است. توجه می‌کنیم که اگر $M$ مدولی با این ویژگی باشد که هر زیرمدول $\tau$-مکمل یک جمعوند مستقیم باشد، آن‌گاه گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر و به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر معادل یکدیگر هستند.

**گزارهٔ ۶.** فرض کنید $M$ یک مدول باشد. در این صورت $M$، گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $X \leq M$ یک زیرمدول $\tau$-مکمل $S$ از $M$ وجود داشته باشد به طوری که

$$S + \tau(M) = X + \tau(M).$$

**اثبات:** فرض کنید $M$، مدول گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر باشد و $X \leq M$. در این صورت یک زیرمدول $\tau$-مکمل $S$ از $M$ وجود دارد به طوری که $X + S \subseteq \tau(M) + X$ و $X + S \subseteq \tau(M) + S$. آن‌گاه

$$X + \tau(M) \subseteq S + \tau(M) \text{ و } S + \tau(M) \subseteq X + \tau(M).$$

بنابراین $S + \tau(M) = X + \tau(M)$. عکس به آسانی بررسی می‌شود$\square$.

**نتیجهٔ ۷.** فرض کنید $M$ یک مدول باشد. اگر برای هر $X \leq M$، یک زیرمدول $\tau$-مکمل $S$ از $M$ و یک $H \subseteq \tau(M)$ وجود داشته باشد به طوری که $X = S + H$، آن‌گاه $M$ یک مدول گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** نشان می دهیم $X\overline{\beta_\tau^*}S$. از آن‌جا که

$$X + S = S + H \subseteq \tau(M) + S + H = \tau(M) + X$$

و $X + S = S + H + S \subseteq \tau(M) + S$، نتیجه می‌گیریم که $X\overline{\beta_\tau^*}S$. $\square$

**نتیجه ۸.** فرض کنید $M$ یک مدول گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر باشد. در این صورت برای هر $X \leq M$ با $\tau(M) \subseteq X$، داریم $X = S + H$ که در آن $S$ یک $\tau$-مکمل در $M$ و $H \subseteq \tau(M)$.

**اثبات:** فرض کنید $X \leq M$ به طوری که $\tau(M) \subseteq X$. بنا بر فرض یک زیرمدول $\tau$-مکمل $S$ از $M$ وجود دارد به طوری که $X\overline{\beta_\tau^*}S$. سپس $S \subseteq X$ و $X = \tau(M) + (S \cap X) = \tau(M) + S$. □

**تعریف.** فرض کنید $M$ یک مدول باشد. در این صورت $M$ را توزیع‌پذیر [17] گویند هرگاه شبکهٔ زیرمدول‌های آن تشکیل شبکهٔ توزیع‌پذیر دهد، به طور معادل برای زیرمدول‌های $K, L, N$ از $M$ داشته باشیم،

$$N \cap (K + L) = (N \cap K) + (N \cap L) \text{ یا } N + (K \cap L) = (N + K) \cap (N + L).$$

**قضیهٔ ۹.** فرض کنید $M = A \oplus B$ یک مدول توزیع‌پذیر باشد. در این صورت $M$ یک مدول گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر (به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر) است اگر و تنها اگر $A$ و $B$ گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر (به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر) باشند.

**اثبات:**($\Rightarrow$) فرض کنید $X \leq A$. در این صورت زیرمدول‌های $S$ و $L$ از $M$ وجود دارند به طوری که $S + L = M$، $S \cap L \subseteq \tau(S)$ و $X\overline{\beta_\tau^*}S$. نشان می‌دهیم که $X\overline{\beta_\tau^*}(A \cap S)$. از آن‌جا که $X\overline{\beta_\tau^*}S$، داریم $X + S \subseteq \tau(M) + X$ و $X + S \subseteq \tau(M) + S$. از آن‌جا که $X \subseteq A$، به دست می‌آوریم

$$X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + X,$$
$$X + (A \cap S) \subseteq \big(\tau(A) + A \cap S + B \cap S + \tau(B)\big) \cap A.$$

بنا بر مدولاریتی داریم $X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + X$ و $X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + (A \cap S)$. سپس $X\overline{\beta_\tau^*}(A \cap S)$. بنا بر فرض داریم، $A = (A \cap S) + (A \cap L)$ و

$$(A \cap S) \cap (A \cap L) = A \cap S \cap L \subseteq A \cap \big(\tau(A \cap S) \oplus \tau(B \cap S)\big).$$

این نتیجه می‌دهد که $A \cap S \cap L \subseteq \tau(A \cap S)$. پس $A \cap S$ یک $\tau$-مکمل از $A \cap L$ در $A$ است. بنابراین $A$ گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر است. به طور مشابه $B$ گلدی $\tau$-مکمل‌پذیر است.

($\Leftarrow$) فرض کنید $U \leq M, U_1 = A \cap U$ و $U_2 = B \cap U$. وجود دارند $L_1, S_1 \leq A$ به طوری که $U_1\overline{\beta_\tau^*}S_1, L_1 + S_1 = A$ و $L_1 \cap S_1 \subseteq \tau(S_1)$. همچنین وجود دارند $L_2, S_2 \leq B$ به طوری که $U_2\overline{\beta_\tau^*}S_2$، $L_2 + S_2 = B$ و $L_2 \cap S_2 \subseteq \tau(S_2)$. بنا برگزارهٔ ۲، $U\overline{\beta_\tau^*}(S_1 + S_2)$. به علاوهٔ $S_1 + S_2 + L_1 + L_2 = M$ و $(S_1 + S_2) \cap (L_1 + L_2) = (S_1 \cap L_1) + (S_2 \cap L_2) \subseteq \tau(S_1) + \tau(S_2) \subseteq \tau(S_1 + S_2)$ این نتیجه می‌دهد

[17] Distributive

که $S_1 + S_2$ زیرمدول $\tau$- مکمل در $M$ است. بنابراین $M$ گلدی- $\tau$مکمل‌پذیر است. اثبات برای این‌که $A$ و $B$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر باشند مشابه است□.

**تعریف.** مدول $M$ را فرا $\tau$-مکمل‌پذیر[18] گویند هرگاه برای تمام زیرمدول‌های $K$ و $L$ از $M$ با $K + L = M$، $K$ شامل یک $\tau$ -مکمل $\tau$ مکمل از $L$ در $M$ باشد.

**گزارهٔ ۱۰.** هر مدول فرا$\tau$-مکمل‌پذیر، گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید $M$ فرا$\tau$-مکمل‌پذیر و $X \leq M$. فرض کنید $X \subseteq \tau(M)$. واضح است $X\overline{\beta_\tau^*}0$. همچنین فرض کنید که $X \nsubseteq \tau(M)$. از آن‌جا که $M$ به طور ضعیف $\tau$-مکمل‌پذیر است، زیرمدول $L$ از $M$ وجود دارد به طوری که $X + L = M$ و $X \cap L \subseteq \tau(M)$ .بنا بر فرض یک $\tau$-مکمل $S$ از $L$ در $X$ وجود دارد. پس $M = S + L$ و $S \cap L \subseteq \tau(S)$. چون $S \subseteq X$، داریم $X = S + (L \cap X) \subseteq \tau(M) + S$. این نتیجه می‌دهد که $X\overline{\beta_\tau^*}S$. بنابراین $M$ گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر است□.

**تعریف.**فرض کنید $M$یک مدول باشد. زیرمدول $U$ از $M$ را به طور قوی شبه بالابرنده[19] (QSL) در $M$ گویند اگر هر زمان که $(A + U)/U$ جمعوند مستقیم از $M/U$ باشد، آن‌گاه جمعوند مستقیم $P$ از $M$ وجود داشته باشد به طوری که $P \leq A$ و $P + U = A + U$ (مرجع [۱] را ببینید).

**قضیهٔ ۱۱.** فرض کنید $M$ یک مدول تصویری باشد به طوری که هر زیرمدول $\tau$-مکمل از $M$ یک جمعوند مستقیم باشد. فرض کنید $\tau$پیش رادیکال هم ارثی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) $M$، $\tau$-مکمل‌پذیر است.

(۲) $M$، $\tau$ -بالابرنده است.

(۳) $M$، فرا $\tau$-مکمل‌پذیر است.

(۴) $M$، به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر و $\tau(M)$، QSL در $M$ است.

(۵) $M$، گلدی$\tau$-مکمل‌پذیر است و $\tau(M)$، QSL در $M$ است.

**اثبات:** $(4) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (1)$ با استفاده از [۹, قضیهٔ ۶]. (۵) ⇔ (۴) بدیهی است□.

**تعریف.** فرض کنید $M$ یک مدول باشد. زیرمدول $X$ از $M$ را پایای کامل[20] گویند هرگاه برای هر $f \in End(M)$، $f(X) \subseteq X$ .

[18] Amply $\tau$-supplemented
[19] Quasi strongly lifting
[20] Fully invariant

**قضیهٔ ۱۲.** فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$، که در آن $M_1$ زیرمدول پایای کامل از $M$ است. فرض کنید $\tau$ یک پیش رادیکال هم ارثی باشد. اگر $M$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر باشد، آن‌گاه $M_1$ و $M_2$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر هستند.

**اثبات:** بدیهی است $M_2$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است. نشان می‌دهیم که $M_1$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است. فرض کنید $K$ زیرمدول $M_1$ باشد. چون $M$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است، جمعوند مستقیم $D$ از $M$ وجود دارد به طوری که $K + D \subseteq \tau(M) + K$ و $K + D \subseteq \tau(M) + D$. قرار دهید $M = D \oplus D'$، که در آن $D' \leq M$. از آن‌جا که $M_1$ زیرمدول پایا از $M$ است، داریم $M_1 = (M_1 \cap D) \oplus (M_1 \cap D')$. بنابراین $M_1 \cap D$ جمعوند مستقیم از $M_1$ است. می‌دانیم که $K + D \subseteq \tau(M) + K$ و $K + D \subseteq \tau(M) + D$. به آسانی دیده می‌شود که $K + (D \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + K$ و $K + (D \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + (D \cap M_1)$. پس $M_1$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است□.

**قضیهٔ ۱۳.** فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$. همچنین فرض کنید برای هر زیرمدول $N$ از $M_1$ جمعوند مستقیم $K$ از $M$ وجود دارد به طوری که $M_2 \leq K$، $N + K \subseteq \tau(M) + K$ و $N + K \subseteq \tau(M) + N$. دراین صورت $M_1$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید $L$ زیرمدول $M_1$ باشد. بنا بر فرض، جمعوند مستقیم $K$ از $M$ وجود دارد به طوری که $M_2 \leq K,\ L + K \subseteq \tau(M) + K$ و $L + K \subseteq \tau(M) + L$. حال داریم $K = (K \cap M_1) \oplus M_2$. پس $K \cap M_1$ یک جمعوند مستقیم از $M_1$ است. به آسانی بررسی می‌شود که $L + (K \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + L$ و $L + (K \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + (K \cap M_1)$. بنابراین $M_1$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است□.

**تعریف.** فرض کنید $M_1$ و $M_2$ مدول‌هایی باشند به طوری که $M = M_1 \oplus M_2$. گوییم $M_1$، $\tau$-$M_2$–سجکتیو[21] است هرگاه برای هر $A \leq M$ که $M = A + M_2$، $K \leq M$ وجود داشته باشد به طوری که $M = K \oplus M_2$ و $A + K \subseteq M_1.$ $\tau(M) + A$ و $M_2$ را نسبت به هم $\tau$-سجکتیو گویند هرگاه $M_1$، $\tau$-$M_2$–سجکتیو و $M_2$ نیز $\tau$-$M_1$–سجکتیو باشد.

**تعریف.** مدول $M$، $\tau$-$\oplus$–مکمل‌پذیر[22] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $A \leq M$، وجود داشته باشد $B \leq^{\oplus} M$ به طوری که $M = A + B$ و $A \cap B \leq \tau(B)$. واضح است که هرمدول $\tau$-بالابرنده، $\tau$-$\oplus$–مکمل‌پذیر است و هر مدول $\tau$-$\oplus$–مکمل‌پذیر، $\tau$-مکمل‌پذیر است.

**تعریف.** مدول $M$ رامدول زوج[23] گویند هرگاه هر زیر مدول از $M$ پایای کامل باشد [۴].

[21] $\tau$-$M_2$-sejective
[22] $\tau$-$\oplus$-supplemented
[23] Duo module

**قضیهٔ ۱۴.** فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$، $-\tau$-$\oplus$-مکمل‌پذیر و مدول زوج باشد. اگر $M_1$، $\tau$ -$M_2$ $-$–سجکتیو (یا $M_2$، $\tau$ -$M_1$ $-$–سجکتیو) باشد, آن‌گاه $M$، مدول به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید $N$ زیرمدول از $M$ باشد. چون $M$، $-\tau$-$\oplus$-مکمل‌پذیراست، تجزیه $M = M_1 \oplus M_2$ وجود دارد به طوری که $M = N + M_2$ و $N \cap M_2 \subseteq \tau(M_2)$ برای بعضی زیرمدول‌های $M_1$ و $M_2$. چون $M_1$، $\tau$ -$M_2$ –سجکتیو است، وجود دارد $K \leq M$ به طوری که $M = K \oplus M_2$ و $N + K \subseteq \tau(M) + N$. حال نشان می‌دهیم که $N + K \subseteq \tau(M) + K$.
چون $M$ یک مدول زوج است، $N$پایای کامل است و $N = (N + K) \cap (N + M2) = N + K$.پس $K \leq N$ و $N + K =$.
$N = (N \cap M_2) \oplus K \subseteq \tau(M) + K$بنابراین $M$ به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است □.

**تعریف.** زیرمدول $N$ از $M$ را هم متناهی[۲۴] در $M$ گویند هرگاه مدول کسری $\frac{M}{N}$ به طور متناهی تولید شده باشد. مدول $M$ را هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر[۲۵] گویند هرگاه برای هر زیرمدول هم متناهی $Y$ از $M$، جمعوند $D$ از $M$ وجود داشته باشد به طوری که $Y + D \subseteq \tau(M) + D$ و $Y + D \subseteq \tau(M) + Y$.

بدیهی است که هر مدول به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر، هم متناهی $\tau$ -H-مکمل‌پذیراست. از طرف دیگر هر مدول هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر و به طور متناهی تولید شده، به طور قوی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است. مثال زیر نشان می‌دهد که برای $\tau = Rad$، هر مدول کسری از مدول‌های هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر نیازی ندارد مدول‌های هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم تحت بعضی شرایط این مطلب درست است.

**مثال ۱۵.** فرض کنید $R$ یک حلقه موضعی نوتری جابه‌جایی باشد که حلقهٔ ایده‌آل اصلی نیست (به عنوان مثال $R =$ $k[x^2, x^3]/(x^4)$ که در آن $k$ یک میدان است یا می‌توانیم حلقه را $R = F[[x, y]]$ حلقه سری‌های توانی روی میدان $F$ با متغیرهای $x$ و $y$ را انتخاب کنیم). آن‌گاه $R$ یک حلقهٔ ارزیابی نیست. فرض کنید $n \geq 2$. بنابر [۱۱, قضیهٔ ۲]، زیرمدول $L$ از $R$–مدول $M = R^{(n)}$ وجود دارد به طوری که $R$–مدول $N = M/L$ تجزیه‌ناپذیر است و $N$ نمی‌تواند به وسیله کمتر از $n$ عنصر تولید شود. لذا $N$، $R$–مدول موضعی نیست. پس بنابر [۸, گزاره ۲,۸]، $N$ هم متناهی $H$–مکمل‌پذیر نیست. بنابراین $N$، هم متناهی $H - Rad$-مکمل‌پذیر نیست. توجه می‌کنیم که چون $M/L$ نوتری است، $M/L$ به طور متناهی تولید شده است و بنابراین $Rad(M/L) \ll M/L$ و در نتیجه $N$ هم متناهی $H$-مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر $N$، هم متناهی- $H - Rad$ مکمل‌پذیر باشد. از طرف دیگر [۸, گزارهٔ ۲,۱] نشان می‌دهد که $M$، هم متناهی $H$-مکمل‌پذیر است و بنابراین هم متناهی $H - Rad$-مکمل‌پذیر است.

[24]Cofinite [25]$\tau$-H-cofinitely supplemented

**گزارهٔ ۱۶.** فرض کنید $M$ یک مدول هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر و $N \leq M$ باشد. فرض کنید برای هر جمعوند مستقیم $K$ از $M$، یک زیرمدول $L$ از $M$ وجود داشته باشد به طوری که $N \subseteq L \subseteq K+N$، $L/N$ جمعوند مستقیم از $M/N$ و $(K+N)/N \subseteq \tau(M/N)+L/N$. در این صورت $M/N$، هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید $Y/N \leq M/N$ یک زیر مدول هم متناهی باشد. چون $M$، هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است، جمعوند مستقیم $K$ از $M$ وجود دارد به طوری که $Y+K \subseteq \tau(M)+K$ و $Y+K \subseteq \tau(M)+Y$. بنا بر فرض، زیر مدول $L$ از $M$ وجود دارد به طوری که $N \subseteq L \subseteq K+N$، $\frac{L}{N}$ جمعوند مستقیم از $\frac{M}{N}$ و $\frac{K+N}{N} \subseteq \tau\left(\frac{M}{N}\right)+\frac{L}{N}$. بدیهی است که $Y/N+L/N \subseteq \tau(M/N)+L/N$. چون $Y+K \subseteq \tau(M)+Y$، داریم

$$\frac{Y}{N}+\frac{L}{N} \subseteq \frac{Y}{N}+\frac{K+N}{N} \subseteq \frac{\tau(M)+N}{N}+\frac{Y}{N} \subseteq \tau\left(\frac{M}{N}\right)+\frac{Y}{N}.$$

این اثبات را کامل می‌کند□.

**گزارهٔ ۱۷.** فرض کنید $M$ یک مدول و $N \leq M$ یک زیرمدول باشد به طوری که برای هر تجزیهٔ $M = M_1 \oplus M_2$ داشته باشیم $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$. اگر $M$، هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر باشد، آن‌گاه $M/N$، هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** فرض کنید $D$ و $D'$ زیرمدول‌هایی از $M$ باشند به طوری که $M = D \oplus D'$. بنا بر فرض، داریم $N = (D \cap N) \oplus (D' \cap N)$. در این صورت

$$(D+N) \cap (D'+N) = [D \oplus (D' \cap N)] \cap [(D \cap N) \oplus D'] = (D \cap N) \oplus (D' \cap N) = N.$$

پس $M/N = [(D+N)/N] \oplus [(D'+N)/N]$. گزارهٔ ۱۶ نشان می‌دهد که $M/N$، هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است□.

**نتیجهٔ ۱۸.** (۱) اگر $M$ یک مدول هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر و $N$ زیر مدول پایای کامل از $M$ باشد، آن‌گاه $M/N$، هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است.

(۲) اگر $M$، هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر مدول زوج باشد، آن‌گاه هر جمعوند مستقیم از $M$، هم متناهی $\tau$-H-مکمل‌پذیر است.

**اثبات:** از گزارهٔ ۱۷ نتیجه حاصل می‌شود□.

## تشکر و قدردانی

این مقاله نتیجهٔ طرح تحقیقاتی مصوب دانشگاه صنعتی قوچان به شماره قرارداد ۸۶۴۴ در تاریخ ۱۳۹۹/۱۲/۱۷ می‌باشد.

## References

1. Alkan M., On $\tau$-lifting Modules and $\tau$-semiperfect Modules, *Turk. J. Math.*, 33 (2009), 117–130.

2. Al-Takhman K., Lomp C. and Wisbaure R., $\tau$-complemented and $\tau$-upplemented modules, *Algebra Discrete Math.*, 3 (2006), 1-15.

3. BirkenmeierG. F., Takil MutluF., NebiyevC., Sokmez N. and TercanA., Goldie $^{*}$-supplemented modules, *Glasg. Math. J.*, 52A (2010), 41–52.

4. Clark J., Lomp C., Vanaja N. and WisbauerR., *Lifting modules -supplements and projectivity in module theory*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 2006.

5. KeskinD., Nematollahi M. J. and TalebiY., On H-supplemented modules, *Algebra Colloq.*, 18 (Spec 1) (2011), 915-924.

6. Koşan M. T. and KeskinD., H-supplemented duo modules, *J. Algebra Appl.* 6(6) (2007), 965-971.

7. Mohamed S. H. and MüllerB. J., *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 147, Cambridge, University Press, 1990.

8. TalebiY., Tribak R. and Moniri HamzekolaeiA. R., On H-Cofinitely supplemented Modules, *Bull. Iran. Math. Soc.*, 39 (2) (2013), 325-346.

9. TalebiY., Moniri Hamzekolaei A. R. and Keskin-TütüncüD., H-supplemented modules with respect to a preradical, *Algebra Discrete Math.*, 12 (1) (2011), 116–131.

10. TalebiY., Moniri Hamzekolaei A. R. and TercanA., Goldie-Rad-supplemented modules, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, 22(3) (2014), 205–218.

11. WarfieldR.B., Jr., Decomposability of finitely presented modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25 (1970) 167-172.

12. WisbauerR., *Foundations of module and ring theory*, Gordon and Breach, Reading, 1991.