



Kharazmi University

# Solving the fractional order integro-differential equations using fractional Jacobi functions

Zahra Delkhoush<sup>1</sup> , Maryam Arabameri<sup>2</sup>  

1. Department of Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.

E-mail: [delkhoush.z@gmail.com](mailto:delkhoush.z@gmail.com)

2. Department of Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran., Iran.

✉E-mail: [arabameri@math.usb.ac.ir](mailto:arabameri@math.usb.ac.ir)

---

## Article Info

## ABSTRACT

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:

5 January 2020

Received in revised form:

26 December 2020

Accepted:

4 April 2021

Published online:

31 December 2022

### Keywords:

Integro-differential equations,  
Orthogonal polynomials,  
Operational matrix,  
Least squares method,  
Best approximation.

### Introduction

Many problems which appear in different sciences such as physics, engineering, biology, applied mathematics and different branches can be modeled by using fractional integro-differential equations. In recent years, some different basis functions have been used to estimate the solution of integro-differential equations. In this paper, we develop operational matrix method based on fractional Jacobi functions to solve fractional order Fredholm, Volterra and Fredholm-Volterra integro-differential equations. Fractional Jacobi functions have received considerable attention in dealing with various problems and equations.

### Material and methods

In this scheme, the approximated solution is written in terms of fractional Jacobi functions. In this way, firstly we define Riemann-Liouville fractional operational matrix of fractional order Jacobi functions, then by using this matrix and the least squares method the solution of equation reduce to a system of algebraic equations which is solved through the Newton's iterative method. In the next step we analyze convergence of the solution, and then to confirm the theoretical issue we examine some numerical examples.

---

---

### Results and discussion

We solve some test examples by using present technique to demonstrate the efficiency, high accuracy and the simplicity of the present method, then compare the proposed method with the method based on fractional-order Bernoulli functions. The reported results demonstrate that there is a good agreement between approximate solution and exact solution. Also, the numerical results reported in the tables indicate that the accuracy improve by increasing the  $m$ . Notice that, obtained results confirm that proposed method enables us to find some more reasonable approximate solutions than fractional-order Bernoulli functions.

### Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- Coefficients of the approximate function via fractional Jacobi function are found easily.
- The main characteristic of this method is that it reduces consideration problem to a system of algebraic equations which can be easily solved by using Newton's iterative method.
- The excellence of this method is its generality, which includes the fractional order Legendre and Chebyshev functions and can solve fractional order Fredholm, Volterra and Fredholm-Volterra integro-differential equations.
- It is also easy to use for linear and nonlinear integro-differential equations and provides good results.

---

**How to cite:** Delkhoush, Z., Arabameri, M. (2022). Solving the fractional order integro-differential equations using fractional Jacobi functions. *Mathematical Researches*, 8 (4), 74-93.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---



Kharazmi University

## حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری با استفاده از توابع ژاکوبی کسری

زهرا دلخوش<sup>۱</sup>، مریم عرب‌عامری<sup>۲</sup> ✉۱. گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران. رایانامه: [delkhoush.z@gmail.com](mailto:delkhoush.z@gmail.com)۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران. رایانامه: [arabameri@math.usb.ac.ir](mailto:arabameri@math.usb.ac.ir)

چکیده	اطلاعات مقاله
	نوع مقاله: مقاله پژوهشی
در این مقاله قصد داریم الگوریتمی عددی برای محاسبه جواب تقریبی معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری فردهلم، ولترا و فردهلم ولترای خطی و غیر خطی ارائه کنیم. در روش مورد نظر تقریب جواب معادله بر حسب توابع ژاکوبی کسری انجام می‌شود، بدین ترتیب که ابتدا ماتریس عملیاتی کسری توابع ژاکوبی کسری بدست می‌آید، سپس با به‌کار بردن این ماتریس و روش کمترین مربعات، حل معادله اولیه را به حل یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنیم. برای حل دستگاه به دست آمده نهایی از روش تکراری نیوتن بهره می‌جوییم. در مرحله‌ی بعد به تحلیل رفتار همگرایی جواب تقریبی می‌پردازیم، سپس برای تصدیق مباحث تئوری چند مثال عددی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نتایج بدست آمده حاکی از دقت و کارایی روش است. مزیت این روش جامعیت آن است، که حالت کسری چندجمله‌ای‌های لژاندر و انواع چبیشف را در بر می‌گیرد، همچنین برای معادلات انتگرال دیفرانسیل خطی و غیر خطی به راحتی قابل استفاده است و نتایج خوبی را ارائه می‌دهد.	<p>تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۵</p> <p>تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۰۶</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۱۵</p> <p>تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰</p> <p><b>واژه‌های کلیدی:</b>  معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری، چندجمله‌ای‌های متعامد، ماتریس عملیاتی، روش کمترین مربعات، بهترین تقریب.</p>
	<p><b>استناد:</b> دلخوش، زهرا؛ عرب‌عامری، مریم؛ (۱۴۰۱). حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری با استفاده از توابع ژاکوبی کسری. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۴)، ۹۳-۷۴.</p> <p>ناشر: دانشگاه خوارزمی</p>
	<p>© نویسندگان. </p>

## مقدمه

چندجمله‌ای‌های متعامد، کاربرد بسیار زیادی در زمینه حل انواع معادلات دیفرانسیلی کسری و غیر کسری دارند. تا کنون با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد و سایر الگوریتم‌های مرتبط، روش‌های مفیدی برای حل مسائل مختلف ارائه شده است. به عنوان مثال از چندجمله‌ای‌های هرمیت و برنولی در حل معادلات انتگرال دیفرانسیل به ترتیب در [۱] و [۲] استفاده شده است، همچنین حالت‌های خاص چندجمله‌ای‌های ژاکوبی مثل چندجمله‌ای‌های لژاندر به طور وسیعی برای حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفته‌اند؛ به عنوان نمونه می‌توان به چند مورد از آن‌ها اشاره کرد [۳]، [۴] و [۵]. همچنین در بسیاری از موارد برای دستیابی به جواب با دقت مناسب از چندجمله‌ای‌های چیشف نوع اول [۶]، دوم [۷] و سوم [۸] برای حل معادلات دیفرانسیل کسری استفاده شده است.

در این مقاله قصد داریم روشی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری به شکل کلی زیر ارائه دهیم.

(۱)

$$D^{\nu}y(x) = \delta y(x) + g(x) + \delta_1 \int_0^x k_1(x,t)[y(t)]^{q_1}[D^{\nu_1}y(t)]^{q_2} dt + \delta_2 \int_0^1 k_2(x,t)[y(t)]^{q_3}[D^{\nu_2}y(t)]^{q_4} dt,$$

$$0 < x, t \leq 1, n-1 < \nu \leq n, 0 \leq \nu_1, \nu_2 \leq \nu,$$

که در آن  $k_1$  و  $k_2$  هسته‌های جدایی پذیر،  $q_1, q_2, q_3, q_4$  اعداد صحیح مثبت و  $\delta, \delta_1, \delta_2$  ضرایب ثابت و اعداد حقیقی هستند. تابع  $g(x)$  معلوم،  $y(x)$  جواب مجهول معادله و  $D^{\nu}, D^{\nu_1}, D^{\nu_2}$  نشانگر مشتقات کسری کاپوتو به ترتیب از مراتب  $\nu, \nu_1, \nu_2$  هستند. همچنین  $n$  کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از  $\nu$  می‌باشد.

شرایط اولیه برای معادله (۱) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$y^{(i)}(0) = \eta_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (۱)$$

که  $\eta_i$  ها اعداد ثابت حقیقی هستند.

هدف، به دست آوردن جواب تقریبی معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری به فرم (۱) با استفاده از توابع ژاکوبی انتقال یافته کسری می‌باشد. چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، تعدادی از چندجمله‌ای‌های متعامد مهم، مانند لژاندر و انواع چیشف را در بر می‌گیرد. به همین منظور ابتدا به بیان مفاهیم مقدماتی مورد نیاز می‌پردازیم و بازه چندجمله‌ای‌های متعامد ژاکوبی را به بازه

تغییرات متغیر معادله، انتقال و به حالت کسری تعمیم می‌دهیم، به این ترتیب توابع ژاکوبی کسری انتقال یافته ( $SFJFS^1$ ) حاصل می‌شوند. سپس از  $SFJF$  ها برای تقریب تابع بهره می‌گیریم، در بخش چهارم ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان لیوویل  $SFJF$  را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم به عملگر انتگرال کسری ریمان لیوویل همگراست. در ادامه به نحوه‌ی پیاده سازی روش و تحلیل رفتار همگرایی روش مورد نظر پرداخته می‌شود. در پایان چند مثال عددی را برای تصدیق مباحث تئوری آزمایش می‌کنیم و نهایتاً به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

## تعاریف و مقدمات

**تعریف ۱.** [۹] انتگرال کسری ریمان لیوویل<sup>۲</sup> تابع  $f$  از مرتبه  $\nu \geq 0$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J^\nu f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\nu}} ds, & \nu > 0, x > 0, \\ f(x), & \nu = 0. \end{cases} \quad (۳)$$

برخی از خواص انتگرال ریمان لیوویل برای  $\nu \geq 0$  و  $\gamma \geq -1$  به صورت زیر هستند: [۹]

$$J^\nu (f(x) + g(x)) = J^\nu f(x) + J^\nu g(x), \quad (۴)$$

$$J^\nu x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\nu+1)} x^{\nu+\gamma}.$$

**تعریف ۲.** [۹] مشتق کسری کاپوتوی<sup>۳</sup> تابع  $f$  از مرتبه  $\nu$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\nu+1-n}} ds, \quad n-1 < \nu \leq n, n \in \mathbb{N}, s > 0, \quad (۶)$$

که برخی از خواص آن برای  $x > 0$  عبارتند از:

$$D^\nu f(x) = J^{n-\nu} D^n f(x), \quad (۷)$$

$$D^\nu (g(x) + f(x)) = D^\nu g(x) + D^\nu f(x), \quad (۸)$$

<sup>۱</sup> Shifted Fractional Jacobi Functions

<sup>۲</sup> Grünwald-Letnikov

<sup>۳</sup> Caputo

$$D^\nu x^\gamma = \begin{cases} 0, & \gamma \in \mathbb{N}_0, \gamma < [\nu], \\ \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \nu + 1)} x^{\gamma - \nu}, & \gamma \in \mathbb{N}_0, \gamma \geq [\nu]. \end{cases} \quad (9)$$

لم ۱. [۹] اگر  $n - 1 < \nu \leq n$ ،  $n \in \mathbb{N}$  و  $x > 0$  در این صورت داریم:

$$D^\nu J^\nu f(x) = f(x), \quad (10)$$

$$(11)$$

$$J^\nu D^\nu f(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0^+) \frac{x^i}{i!}.$$

تعریف ۳. چندجمله‌ای‌های ژاکوبی مرتبه  $n$  با پارامترهای  $\alpha, \beta > -1$ ، با نماد  $P_n^{(\alpha, \beta)}(y)$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شوند: [۱۰]، [۱۱]

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \sum_{k=0}^n E_k^{(\alpha, \beta, n)} \left( \frac{y+1}{2} \right)^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

که در آن

$$E_k^{(\alpha, \beta, n)} = (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n + k + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)(n - k)! k!}. \quad (13)$$

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی نسبت به تابع وزن  $\chi^{(\alpha, \beta)}(y) = (1 + y)^\beta (1 - y)^\alpha$  روی بازه  $I = [-1, 1]$  متعامد هستند و رابطه تعامد آنها به صورت زیر است:

$$\int_{-1}^1 P_i^{(\alpha, \beta)}(y) P_j^{(\alpha, \beta)}(y) \chi^{(\alpha, \beta)}(y) dy = k_j^{(\alpha, \beta)} \delta_{ij},$$

$\delta_{ij}$  تابع دلتای کرونکر است و

$$k_j^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{(\alpha + \beta + 1)} \Gamma(j + \alpha + 1) \Gamma(j + \beta + 1)}{(2j + \alpha + \beta + 1) \Gamma(j + 1) \Gamma(j + \alpha + \beta + 1)}. \quad (14)$$

با انتقال بازه چندجمله‌ای‌های ژاکوبی از  $I = [-1, 1]$  به  $[0, 1]$  و ایجاد حالت کسری برای  $0 < \lambda < 1$  با استفاده از تغییر متغیر  $y = 2x^\lambda - 1$ ، توابعی به فرم زیر به دست می‌آیند که همان  $SFJF$  ها هستند.

(۱۵)

$$P_n^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) = \sum_{k=0}^n E_k^{(\alpha, \beta, n)} x^{\lambda k}.$$

توابع ذکر شده، نسبت به تابع وزن  $\chi^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) = \lambda x^{\lambda\beta + \lambda - 1} (1 - x^\lambda)^\alpha$  بر بازه  $[0, 1]$  بر یکدیگر عمود هستند و رابطهٔ تعامد آنها به شکل زیر است:

$$\int_0^1 P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) P_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \chi^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) dx = h_j^{(\alpha, \beta)} \delta_{ij}, \quad (۱۶)$$

که

(۱۷)

$$h_j^{(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(j + \alpha + 1) \Gamma(j + \beta + 1)}{(2j + \alpha + \beta + 1) \Gamma(j + 1) \Gamma(j + \alpha + \beta + 1)}.$$

### تقریب توابع با استفاده از $SFJF$ ها

هدف این بخش، ساختن بهترین تقریب برای تابع دلخواه  $f \in L^2[0, 1]$  براساس توابع متعامد ژاکوبی کسری است. به همین منظور به بیان لم‌های زیر می‌پردازیم.

لم ۲. [۱۲] اگر  $H$  یک فضای هیلبرت،  $Y$  یک زیر فضای متناهی‌البعد از آن و  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  به عنوان پایه‌ای از  $Y$  باشد در این صورت هر عضو دلخواهی از  $H$  مانند  $Z$  دارای بهترین تقریب در  $Y$  مانند  $y^*$  است و داریم:

$$\|z - y^*\|_2^2 = \frac{G(z, y_1, y_2, \dots, y_m)}{G(y_1, y_2, \dots, y_m)}.$$

که  $G$  دترمینان گرام است. همچنین نمایش منحصر به فردی برای  $y^*$ ، به شکل زیر وجود دارد

$$y^* = \sum_{i=1}^m c_i y_i,$$

که  $c_i$  ها از حل دستگاه زیر به دست می‌آیند:

$$c_1 \langle y_j, y_1 \rangle + c_2 \langle y_j, y_2 \rangle + \dots + c_n \langle y_j, y_n \rangle = \langle y_j, z \rangle, j = 1, 2, \dots, m. \quad (۱۸)$$

لم ۳. [۱۲] مجموعه‌ی مستقل خطی  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  در فضای هیلبرت  $H$  چگال است اگر و فقط اگر برای هر  $z \in H$  مادامی که  $m \rightarrow \infty$  داشته باشیم:

$$\frac{G(z, y_1, y_2, \dots, y_m)}{G(y_1, y_2, \dots, y_m)} \rightarrow 0.$$

حال بر اساس لم‌های ۱ و ۲، اگر قرار دهیم  $Y = \text{span}\{P_0^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), P_1^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), \dots, P_m^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)\}$ ، با توجه به این‌که  $L^2[0, 1]$ ، فضای هیلبرت و  $Y$  یک زیرفضای متناهی‌البعد از آن است، می‌توان هر عضو دلخواه  $f \in L^2[0, 1]$  را به بهترین شکل به صورت زیر تقریب زد:

(۱۹)

$$f(x) \simeq f_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) = C^T P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x),$$

که در آن

$$C^T = [c_0, c_1, \dots, c_m],$$

و

$$P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) = [P_0^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), P_1^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), \dots, P_m^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)]^T.$$

با توجه به رابطه (۱۸) و متعامد بودن توابع  $P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)$ ، داریم:

$$c_i = \frac{1}{h_i^{(\alpha, \beta)}} \int_0^1 P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) f(x) \chi^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (20)$$

$f_m(x)$  بهترین تقریب برای تابع  $f(x)$  نسبت به هر تقریب دلخواه  $g$  است، به قسمی که:

$$\forall g \in Y, \|f - f_m\| \leq \|f - g\|,$$

و مادامی که  $m \rightarrow \infty$  داریم  $\|f - f_m\| \rightarrow 0$ .

### ماتریس عملیاتی انتگرال کسری $SFJF$

هدف اصلی این بخش به دست آوردن ماتریس عملیاتی انتگرال ریمان لیوویل  $SFJF$  می‌باشد، که تقریبی از عملگر کسری انتگرال ریمان لیوویل  $SFJF$  است. فرض می‌کنیم:

(۲۱)

$$J^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \simeq I^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x),$$

هدف محاسبه  $I^\nu$  است که در قالب قضیه زیر بیان و اثبات می‌شود.

قضیه ۴. فرض کنید  $I^\nu$  ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان لیوویل  $SFJF$  از مرتبه  $\nu > 0$  باشد، در این صورت درایه‌های آن به صورت زیر قابل محاسبه‌اند:

(۲۲)

$$I_{ij}^\nu = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j E_k^{(\alpha, \beta, i)} E_l^{(\alpha, \beta, j)} \frac{\Gamma(\lambda k + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{h_j^{(\alpha, \beta)} \Gamma(\lambda k + \nu + 1)} \frac{\Gamma(k + l + \nu/\lambda + \beta + 1)}{\Gamma(k + l + \frac{\nu}{\lambda} + \alpha + \beta + 2)}, i, j = 0, 1, \dots, m.$$

اثبات. با ضرب طرفین رابطه (۲۱) در بردار  $(P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x))^T$  و با توجه به خاصیت تعامد (۱۶) برای  $SFJP$  ها داریم:

$$I^\nu = \langle J^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), (P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x))^T \rangle \mathcal{D}^{-1}, \quad (23)$$

که  $\langle J^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), (P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x))^T \rangle$  و  $\mathcal{D}^{-1}$  دو ماتریس مربعی از مرتبه  $m + 1$  هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle J^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), (P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x))^T \rangle = \left\{ \langle J^\nu P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), P_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \rangle \right\}_{i, j=0}^m,$$

همچنین

$$\mathcal{D}^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{h_i^{(\alpha, \beta)}} \right\}_{i=0}^m.$$

اکنون قرار می‌دهیم:

(۲۴)

$$\rho_{ij} = \langle J^\nu P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), P_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \rangle = \int_0^1 J^\nu P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) P_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \chi^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) dx,$$

با استفاده از (۵) خواهیم داشت:

$$J^\nu P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) = \sum_{k=0}^i E_k^{(\alpha, \beta, i)} \frac{\Gamma(\lambda k + 1)}{\Gamma(\lambda k + \nu + 1)} x^{\lambda k + \nu},$$

سپس می‌توان نوشت:

$$\rho_{ij} = \sum_{k=0}^i E_k^{(\alpha, \beta, i)} \frac{\Gamma(\lambda k + 1)}{\Gamma(\lambda k + \nu + 1)} \int_0^1 x^{\lambda k + \nu} P_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \chi^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) dx,$$

بنابراین

$$\rho_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j E_k^{(\alpha, \beta, i)} E_l^{(\alpha, \beta, j)} \frac{\Gamma(\lambda k + 1)}{\Gamma(\lambda k + \nu + 1)} B(k + l + \nu/\lambda + \beta + 1, \alpha + 1).$$

که در آن  $B$  تابع بتا است. حال با توجه به (۲۴) و با جایگذاری  $\rho_{ij}$  در (۲۳) اثبات کامل خواهد شد. ■

در ادامه نشان دهیم ماتریس عملیاتی انتگرال ریمان لیوویل  $SFJF$  به عملگر انتگرال کسری ریمان لیوویل همگراست.

**قضیه ۵.** فرض کنید  $P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) = [P_0^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), P_1^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), \dots, P_m^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)]^T$  نشانگر انتگرال کسری ریمان لیوویل  $P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)$  و  $I^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)$  ماتریس عملیاتی انتگرال ریمان لیوویل  $P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)$  تعریف شده در رابطه (۲۲) باشد، آن‌گاه مادامی که  $n \rightarrow \infty$ ،  $|I^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) - J^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)| \rightarrow 0$ .

اثبات. قرار می‌دهیم

$$E = J^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) - I^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x),$$

داریم

$$\begin{aligned} \|E\| &= \left\| J^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) - \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j E_k^{(\alpha, \beta, i)} E_l^{(\alpha, \beta, j)} \frac{\Gamma(\lambda k + 1)}{\Gamma(\lambda k + \nu + 1)} B(k + l + \nu/\lambda + \beta + 1, \alpha + 1) P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \right\|, \\ &\leq \sum_{k=0}^i E_k^{(\alpha, \beta, i)} \frac{\Gamma(\lambda k + 1)}{\Gamma(\lambda k + \nu + 1)} \left\| x^{k\lambda} - \sum_{j=0}^m \sigma_j P_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \right\|, \end{aligned}$$

حال با توجه به این که  $\sum_{j=0}^m \sigma_j P_j^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)$  بهترین تقریب برای  $x^{k\lambda}$  است، به استناد قضیه ۲ می توان نوشت

$$\|E\| \leq \sum_{k=0}^i E_k^{(\alpha, \beta, i)} \frac{\Gamma(\lambda k + 1)}{\Gamma(\lambda k + \nu + 1)} \left( \frac{G(x^{k\lambda}, P_0^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), P_1^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), \dots, P_m^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x))}{G(P_0^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), P_1^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), \dots, P_m^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x))} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

با توجه به لم ۳ و با توجه به اینکه چند جمله‌ای‌ها در  $L^2[0, 1]$  چگال هستند، به وضوح می توان دید در صورتی که  $m$  یعنی تعداد  $SFJF$  ها به بی نهایت میل کند، نرم بردار خطای ماتریس عملیاتی انتگرال نیز به صفر میل خواهد کرد. ■

### حل معادله (۱) با استفاده از $SFJF$ ها و تحلیل همگرایی

حال که تمامی مقدمات لازم جهت ارائه روش را در اختیار داریم، به بیان نحوه اجرای آن می پردازیم.

برای شروع، ابتدا با توجه به رابطه (۱۹)، عبارت  $D^\nu y(x)$  در سمت چپ (۱) را با استفاده از ترکیب خطی متناهی از  $SFJF$  ها تقریب می زنیم:

$$D^\nu y(x) \simeq D^\nu y_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) = C^T P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x), \quad (25)$$

با تأثیر عملگر انتگرال کسری ریمان لیوویل از مرتبه  $\nu$  بر طرفین (۲۵) و با استفاده از روابط (۱۱) و (۲) خواهیم داشت:

(۲۶)

$$y(x) \simeq y_m(x) = J^\nu \sum_{i=0}^m c_i P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \frac{x^i}{i!}.$$

اکنون با توجه به (۴) داریم:

(۲۷)

$$y(x) \simeq y_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i J^\nu P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \frac{x^i}{i!}.$$

اگر  $x^i$  را طبق رابطه (۱۹) بر حسب  $SFJF$  ها تقریب بزنیم، با محاسبه ضرایب تقریب از رابطه (۲۰) داریم:

(۲۸)

$$y(x) \simeq y_m(x) = C^T I^\nu P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) + A^T P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x),$$

حال برای  $D^{\nu_1}y(x)$  و  $D^{\nu_2}y(x)$  به صورت زیر عمل می‌کنیم. با تأثیر عملگر  $D^{\nu_1}$  بر طرفین رابطه (۲۷) داریم:

$$D^{\nu_1}y(x) \simeq D^{\nu_1}y_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i D^{\nu_1} J^{\nu} P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\eta_i}{i!} D^{\nu_1} x^i$$

اکنون با توجه به (۷) و لم ۱ داریم:

$$D^{\nu_1}y(x) \simeq D^{\nu_1}y_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i J^{\nu-\nu_1} P_i^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \frac{x^{i-\nu_1}}{\Gamma(i-\nu_1+1)},$$

حال با تقریب جمله  $x^{i-\nu_1}$  بنا به رابطه (۱۹) و استفاده از رابطه (۲۰) خواهیم داشت:

(۲۹)

$$D^{\nu_1}y(x) \simeq D^{\nu_1}y_m(x) = C^T I^{(\nu-\nu_1)} P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) + A_1^T P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x),$$

با روندی مشابه می‌توان نشان داد:

(۳۰)

$$D^{\nu_2}y(x) \simeq D^{\nu_2}y_m(x) = C^T I^{(\nu-\nu_2)} P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) + A_2^T P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x),$$

که با تقریب  $x^{i-\nu_2}$  با روندی مشابه فوق، ضرایب تقریب و در نتیجه بردار  $A_2^T$  قابل محاسبه است.

اکنون برای انتگرال‌های سمت راست رابطه (۱) به شکل زیر عمل می‌کنیم.

با توجه به جدایی‌پذیر بودن هسته انتگرال‌ها می‌توان نوشت:

(۳۱)

$$k_1(x, t) = \sum_{i=1}^{m_1} M_i(x) N_i(t),$$

(۳۲)

$$k_2(x, t) = \sum_{i=1}^{m_2} R_i(x) S_i(t),$$

که اعداد  $m_1$  و  $m_2$  اعداد صحیح مثبت هستند.

با در نظر گرفتن (۲۸)، (۲۹) و (۳۱) داریم:

(۳۳)

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \int_0^x k_1(x, t)[y(t)]^{q_1}[D^{\nu_1}y(t)]^{q_2} dt \simeq U_{1m}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} M_i(x) \int_0^x N_i(t)[C^T I^{\nu} P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \\ &\quad + A^T P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)]^{q_1} [C^T I^{\nu-\nu_1} P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) + A_1^T P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)]^{q_2} dt, \end{aligned}$$

همچنین با در نظر گرفتن (۲۸)، (۳۰) و (۳۲) داریم:

(۳۴)

$$\begin{aligned} U_2(x) &= \int_0^1 k_2(x, t)[y(t)]^{q_3}[D^{\nu_2}y(t)]^{q_4} dt \simeq U_{2m}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m_2} R_i(x) \int_0^1 S_i(t)[C^T I^{\nu} P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) \\ &\quad + A^T P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)]^{q_3} [C^T I^{\nu-\nu_2} P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x) + A_2^T P^{(\alpha, \beta, \lambda)}(x)]^{q_4} dt, \end{aligned}$$

اکنون با جایگذاری عبارت‌های (۲۵)–(۳۴) در (۱) خواهیم داشت:

$$D^{\nu}y_m(x) - \delta y_m(x) - g(x) - \delta_1 U_{1m}(x) - \delta_2 U_{2m}(x) \simeq 0, \quad (۳۵)$$

با استفاده از الگوریتم روش کمترین مربعات، تعریف می‌کنیم:

$$Q[c_0, c_1, \dots, c_m] = \int_0^1 (D^{\nu}y_m(x) - \delta y_m(x) - g(x) - \delta_1 U_{1m}(x) - \delta_2 U_{2m}(x))^2 dx. \quad (۳۶)$$

حال برای محاسبه ضرایب مجهول  $c_0, c_1, \dots, c_m$  قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial Q}{\partial c_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (۳۷)$$

با حل دستگاه معادلات به روش تکراری نیوتن، بردار ضرایب مجهول  $C = [c_0, c_1, \dots, c_m]$  به دست می‌آید که با جایگذاری آن در (۲۸)، جواب تقریبی معادله به دست می‌آید.

قضیه ۶. اگر  $y(x)$  جواب دقیق معادله (۱) و  $y_m(x)$  جواب تقریبی به دست آمده از رابطه (۲۸) (با جایگذاری ضرایب به دست آمده از (۳۷)) باشد، داریم:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 (y(x) - y_m(x))^2 dx = 0$$

اثبات. ابتدا تابع  $E_m$  را بر اساس رابطه (۳۵) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_m = D^\nu y_m(x) - \delta y_m(x) - g(x) - \delta_1 U_{1m}(x) - \delta_2 U_{2m}(x).$$

برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_m\|_2 = \left[ \int_0^1 E_m^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|E_m\|_2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|D^\nu y_m(x) - \delta y_m(x) - g(x) - \delta_1 U_{1m}(x) - \delta_2 U_{2m}(x)\|_2 \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|D^\nu y_m(x) - \delta y_m(x) - g(x) - \delta_1 U_{1m}(x) - \delta_2 U_{2m}(x) \\ &\quad - (D^\nu y(x) - \delta y(x) - g(x) - \delta_1 U_1(x) - \delta_2 U_2(x))\|_2, \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} [ \|D^\nu y_m(x) - D^\nu y(x)\|_2 + |\delta| \|y_m(x) - y(x)\|_2 \\ &\quad + |\delta_1| \|U_{1m}(x) - U_1(x)\|_2 + |\delta_2| \|U_{2m}(x) - U_2(x)\|_2 ]. \end{aligned}$$

حال با توجه به این که تمام تقریب‌ها بر اساس توابع متعامد ژاکوبی کسری ساخته شده است، با استفاده از لم ۲ و لم ۳ می‌توان نتیجه گرفت  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_m\|_2 = 0$  ■

## نتایج عددی

مثال ۱. معادله انتگرال دیفرانسیل ولترای کسری خطی زیر را در نظر بگیرید: [۲]

$$D^{0.5} y(x) = y(x) + \frac{8}{3\Gamma(0.5)} x^{1.5} - x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \int_0^x y(t) dt, \quad 0 < x \leq 1,$$

$$y(0) = 0.$$

جواب دقیق مسئله عبارت است از  $y(x) = x^2$

جدول ۱ مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی معادله بر اساس توابع ژاکوبی با پارامترهای  $\alpha = -0.5$  و  $\beta = 0$  از مرتبه‌ی ۱،  $\lambda = 0.5$  را نشان می‌دهد. همان طور که در جدول مشاهده می‌شود، تنها با استفاده از تعداد کمی از جملات بسط (۱۹)، جواب تقریبی از دقت قابل ملاحظه‌ای برخوردار است. اما برای حالت توابع ژاکوبی غیرکسری دقت جواب به طور چشمگیری کاهش پیدا کرده است.

همچنین در جدول ۲ مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی با استفاده از بسط توابع ژاکوبی، به ازای پارامترهای  $\alpha = \beta = 0$ ، یعنی توابع لژاندر کسری را برای مثال ۱ مورد بررسی قرار داده‌ایم که نتایج مشابهی را ارائه می‌کند.

جدول ۱. مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی مثال ۱ برای پارامترهای  $\alpha = -0.5, \beta = 0$  و  $m = 3, 4$  و  $\lambda = 0.5, 1$  در نقاط گره مختلف

$x$	$\alpha = -0.5, \beta = 0$		
	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1$
	$m = 3$	$m = 4$	$m = 4$
0.1	$4/44 \times 10^{-3}$	$3/45 \times 10^{-14}$	$4/61 \times 10^{-6}$
0.2	$3/89 \times 10^{-3}$	$1/60 \times 10^{-14}$	$6/06 \times 10^{-6}$
0.3	$6/78 \times 10^{-3}$	$3/25 \times 10^{-14}$	$1/92 \times 10^{-6}$
0.4	$5/54 \times 10^{-3}$	$2/30 \times 10^{-14}$	$2/83 \times 10^{-6}$
0.5	$1/52 \times 10^{-3}$	$3/21 \times 10^{-17}$	$5/13 \times 10^{-6}$
0.6	$2/21 \times 10^{-3}$	$2/58 \times 10^{-14}$	$3/75 \times 10^{-6}$
0.7	$4/30 \times 10^{-3}$	$4/53 \times 10^{-14}$	$6/02 \times 10^{-7}$
0.8	$4/96 \times 10^{-3}$	$5/07 \times 10^{-14}$	$5/37 \times 10^{-6}$
0.9	$2/54 \times 10^{-3}$	$3/57 \times 10^{-14}$	$6/11 \times 10^{-6}$

جدول ۲. مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی مثال ۱ برای پارامترهای  $\alpha = 0, \beta = 0$  و  $m = 3, 4$  و  $\lambda = 0.5, 1$  در نقاط گره مختلف

$x$	$\alpha = \beta = 0$		
	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1$
	$m = 3$	$m = 4$	$m = 4$
0.1	$3/39 \times 10^{-3}$	$3/81 \times 10^{-15}$	$5/62 \times 10^{-5}$
0.2	$6/07 \times 10^{-3}$	$8/42 \times 10^{-15}$	$1/00 \times 10^{-4}$
0.3	$3/25 \times 10^{-3}$	$4/69 \times 10^{-15}$	$2/48 \times 10^{-5}$
0.4	$1/54 \times 10^{-3}$	$2/21 \times 10^{-15}$	$6/12 \times 10^{-5}$
0.5	$5/86 \times 10^{-3}$	$8/75 \times 10^{-15}$	$9/32 \times 10^{-5}$
0.6	$7/89 \times 10^{-3}$	$1/16 \times 10^{-14}$	$5/15 \times 10^{-5}$
0.7	$6/25 \times 10^{-3}$	$9/16 \times 10^{-15}$	$3/86 \times 10^{-5}$
0.8	$1/64 \times 10^{-4}$	$4/58 \times 10^{-16}$	$1/07 \times 10^{-4}$
0.9	$1/22 \times 10^{-3}$	$1/86 \times 10^{-14}$	$3/85 \times 10^{-5}$

رحیم‌خانی و همکارانش معادله انتگرال دیفرانسیل ولترای کسری ارائه شده در مثال ۱ را با استفاده از توابع برنولی کسری حل کرده‌اند [۲]. جدول خطای مطلق حاصل از روش استفاده شده در [۲] در جدول ۳ آورده شده است که در مقایسه با جداول ۱ و ۲ مشاهده می‌شود که روش ارائه شده در مقاله حاضر به ازای مقادیر کوچکتر  $m$  جواب‌های با دقت بالاتر نتیجه می‌دهد. همچنین به علت حجم محاسبات کمتر، الگوریتم روش حاضر سریع‌تر به جواب با دقت مناسب رسیده است.

جدول ۳. مقادیر خطای مطلق مثال ۱ با استفاده از توابع برنولی به ازای  $m = 5, 7, 9$  و  $\lambda = 0.5, 1, 2$ .

$x$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$		$\lambda = 2$	
	$m = 5$	$m = 5$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 5$
۰/۱	$7/16 \times 10^{-14}$	$4,40 \times 10^{-5}$	$6/99 \times 10^{-6}$	$2/18 \times 10^{-6}$	$5/33 \times 10^{-3}$
۰/۳	$6/33 \times 10^{-15}$	$3/07 \times 10^{-5}$	$9/98 \times 10^{-7}$	$2/16 \times 10^{-6}$	$4/84 \times 10^{-3}$
۰/۵	$9/18 \times 10^{-14}$	$2/75 \times 10^{-6}$	$9/76 \times 10^{-7}$	$4/47 \times 10^{-7}$	$7/01 \times 10^{-3}$
۰/۷	$3/35 \times 10^{-14}$	$2/61 \times 10^{-5}$	$9/20 \times 10^{-7}$	$2/54 \times 10^{-6}$	$1/06 \times 10^{-3}$
۰/۹	$1/07 \times 10^{-13}$	$4/61 \times 10^{-5}$	$1/03 \times 10^{-5}$	$1/93 \times 10^{-6}$	$1/60 \times 10^{-3}$

مثال ۲. معادله انتگرال دیفرانسیل فردهم کسری زیر را در نظر بگیرید: [۱۳]

$$D^{0.5}y(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{12} + \int_0^1 xt[y(t)]dt, \quad 0 < x \leq 1$$

$$y(0) = 0.$$

جواب دقیق این معادله عبارت است از  $y(x) = x^2 - x$ .

معادله ارائه شده در مثال ۲ با استفاده از توابع ژاکوبی کسری به ازای مقادیر متفاوت  $\alpha, \beta, m$  و  $\lambda$  حل شده است.

جدول ۴ شامل مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی مثال ۲ برای پارامترهای  $\alpha = 0.5$  و  $\beta = 0$  به ازای  $m = 3, 4$  و  $\lambda = 0.5, 1$  می‌باشد که نشان دهنده دقت بالای توابع ژاکوبی کسری است. همچنین ملاحظه می‌شود با افزایش  $m$ ، دقت جواب نیز افزایش می‌یابد.

برای مثال ۲ توابع ژاکوبی با پارامترهای  $\alpha = \beta = 0.5$  که همان چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم از نوع کسری هستند را نیز بررسی کرده‌ایم که نتایج آن در جدول ۵ قابل مشاهده است.

جدول ۴. مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی مثال ۲ برای پارامترهای  $\alpha = 0.5$  و  $\beta = 0$ ، به ازای  $m = 3, 4$  و  $\lambda = 0.5, 1$  در نقاط گره مختلف

$x$	$\alpha = 0.5, \beta = 0$		
	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1$
	$m = 3$	$m = 4$	$m = 4$
۰/۱	$7/22 \times 10^{-4}$	$3/17 \times 10^{-15}$	$9/00 \times 10^{-4}$
۰/۲	$4/54 \times 10^{-3}$	$8/71 \times 10^{-15}$	$1/16 \times 10^{-3}$
۰/۳	$3/53 \times 10^{-3}$	$4/60 \times 10^{-15}$	$1/28 \times 10^{-5}$
۰/۴	$1/26 \times 10^{-3}$	$3/28 \times 10^{-15}$	$1/11 \times 10^{-3}$
۰/۵	$3/67 \times 10^{-3}$	$1/04 \times 10^{-17}$	$1/28 \times 10^{-3}$
۰/۶	$5/55 \times 10^{-3}$	$1/36 \times 10^{-14}$	$4/02 \times 10^{-4}$
۰/۷	$4/43 \times 10^{-3}$	$1/00 \times 10^{-14}$	$9/98 \times 10^{-4}$
۰/۸	$8/00 \times 10^{-4}$	$2/39 \times 10^{-15}$	$1/66 \times 10^{-3}$
۰/۹	$1/10 \times 10^{-3}$	$2/54 \times 10^{-14}$	$3/46 \times 10^{-4}$

جدول ۵. مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی مثال ۲ برای پارامترهای  $\alpha = \beta = 0.5$ ، به ازای  $m = 3, 4$  و  $\lambda = 0.5, 1$  در نقاط گره مختلف

$x$	$\alpha = \beta = 0.5$		
	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1$
	$m = 3$	$m = 4$	$m = 4$
۰/۱	$1/26 \times 10^{-3}$	$4/05 \times 10^{-15}$	$1/08 \times 10^{-3}$
۰/۲	$3/46 \times 10^{-3}$	$1/99 \times 10^{-14}$	$4/23 \times 10^{-4}$
۰/۳	$3/61 \times 10^{-3}$	$1/29 \times 10^{-14}$	$4/34 \times 10^{-5}$
۰/۴	$1/12 \times 10^{-3}$	$4/21 \times 10^{-15}$	$9/02 \times 10^{-4}$
۰/۵	$2/01 \times 10^{-3}$	$2/11 \times 10^{-14}$	$7/31 \times 10^{-4}$
۰/۶	$4/17 \times 10^{-3}$	$2/96 \times 10^{-14}$	$1/09 \times 10^{-5}$
۰/۷	$4/02 \times 10^{-3}$	$2/35 \times 10^{-14}$	$8/37 \times 10^{-4}$
۰/۸	$4/86 \times 10^{-4}$	$2/31 \times 10^{-15}$	$1/05 \times 10^{-3}$
۰/۹	$7/37 \times 10^{-3}$	$5/23 \times 10^{-14}$	$4/44 \times 10^{-4}$

مثال ۳. معادله انتگرال دیفرانسیل فردهم ولترا غیر خطی زیر را به همراه شرایط اولیه داده شده در نظر بگیرید: [۲]

$$D^{2.2}y(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(1.8)}x^{0.8} - \frac{5}{56}x^8 - \frac{1}{40}x + \frac{1}{44} + \frac{1}{3}\int_0^x(x+t)[y(t)]^2dt + \frac{1}{4}\int_0^1(x-t)[y(t)]^3dt, 0 < x \leq 1.$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

جواب دقیق مسئله عبارت است از  $y(x) = x^3$ . جداول ۶ و ۷ مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی مثال ۳ برای  $\alpha = 0.8$  و  $\beta = 0$  به ازای  $m = 2, 3, 4$  را به ترتیب برای  $\lambda = 1$  و  $\lambda = 0.5$  نشان می‌دهند. همان طور که انتظار می‌رود روش ارائه شده برای مثال‌های غیر خطی نیز با حجم محاسبات کم دارای دقت قابل ملاحظه‌ای است.

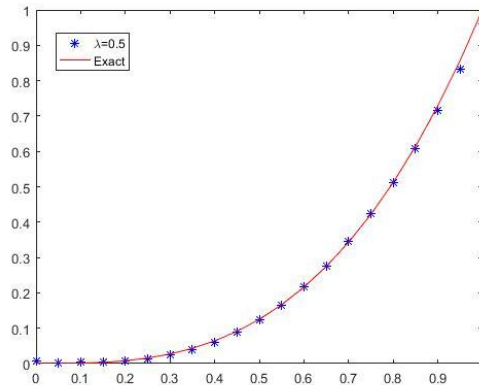
جدول ۶. مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی مثال ۳ برای پارامترهای  $\alpha = 0.8$  و  $\beta = 0$ ، به ازای  $m = 2, 3, 4$  و  $\lambda = 1$  در نقاط گره مختلف

$\alpha = 0.8, \beta = 0$			
$\lambda = 1$			
$x$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
۰/۱	$3/24 \times 10^{-2}$	$1/69 \times 10^{-2}$	$2/54 \times 10^{-2}$
۰/۲	$6/44 \times 10^{-2}$	$1/39 \times 10^{-2}$	$1/01 \times 10^{-5}$
۰/۳	$2/75 \times 10^{-2}$	$1/01 \times 10^{-2}$	$3/46 \times 10^{-2}$
۰/۴	$5/38 \times 10^{-2}$	$2/91 \times 10^{-2}$	$4/21 \times 10^{-2}$
۰/۵	$6/28 \times 10^{-2}$	$1/73 \times 10^{-2}$	$2/20 \times 10^{-2}$
۰/۶	$4/64 \times 10^{-2}$	$2/55 \times 10^{-2}$	$9/70 \times 10^{-4}$
۰/۷	$2/33 \times 10^{-2}$	$1/98 \times 10^{-2}$	$2/54 \times 10^{-2}$
۰/۸	$9/03 \times 10^{-2}$	$6/91 \times 10^{-2}$	$9/30 \times 10^{-4}$
۰/۹	$2/24 \times 10^{-1}$	$6/18 \times 10^{-2}$	$1/33 \times 10^{-2}$

جدول ۷. مقادیر خطای مطلق جواب تقریبی مثال ۳ برای پارامترهای  $\alpha = 0.8$  و  $\beta = 0$ ، به ازای  $m = 2, 3, 4$  و  $\lambda = 0.5$  در نقاط گره مختلف

$\alpha = 0.8, \beta = 0$			
$\lambda = 0.5$			
$x$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
۰/۱	$1/37 \times 10^{-2}$	$7/07 \times 10^{-5}$	$1/38 \times 10^{-5}$
۰/۲	$1/42 \times 10^{-2}$	$4/83 \times 10^{-5}$	$6/64 \times 10^{-6}$
۰/۳	$1/26 \times 10^{-2}$	$4/89 \times 10^{-6}$	$2/28 \times 10^{-5}$
۰/۴	$2/61 \times 10^{-2}$	$4/44 \times 10^{-5}$	$2/55 \times 10^{-5}$
۰/۵	$9/83 \times 10^{-2}$	$8/47 \times 10^{-5}$	$1/25 \times 10^{-5}$
۰/۶	$1/87 \times 10^{-2}$	$1/00 \times 10^{-4}$	$1/10 \times 10^{-5}$
۰/۷	$1/80 \times 10^{-2}$	$7/76 \times 10^{-5}$	$3/27 \times 10^{-5}$
۰/۸	$1/79 \times 10^{-2}$	$1/17 \times 10^{-7}$	$3/28 \times 10^{-5}$
۰/۹	$3/60 \times 10^{-2}$	$1/42 \times 10^{-4}$	$1/57 \times 10^{-5}$

نمودار مقادیر جواب تقریبی و جواب دقیق مثال ۳ برای  $\alpha = 0.8$  و  $\beta = 0$  به ازای  $m = 4$  و  $\lambda = 0.5$  در شکل (۱) رسم شده است.



شکل (۱). مقایسه جواب دقیق و تقریبی مثال ۳ با پارامترهای  $\alpha = 0.8$ ،  $\beta = 0$ ، به ازای  $m = 4$  و  $\lambda = 0.5$

## نتیجه گیری

در این مقاله یک الگوریتم عددی بر اساس توابع ژاکوبی کسری ارائه کردیم که در آن با استفاده از مفاهیم شناخته شده‌ای از جمله تقریب تابع بر پایه توابع متعامد، تقریب کمترین مربعات و ماتریس عملیاتی، راه حلی تقریبی برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری معرفی کردیم. برای اثبات ادعای خود مبنی بر موثر و کارآمد بودن روش به اثبات قضایایی جهت نشان دادن همگرایی جواب تقریبی به جواب دقیق پرداختیم و چند مثال عددی را نیز به ازای مقادیر مختلف پارامترهای موجود در روش ارائه شده حل کردیم و میزان خطای هر کدام از آن‌ها را در جداولی نمایش دادیم. نتایج به دست آمده ادعای ما مبنی بر کارآمد بودن روش را تایید می‌کند.

## References

1. A. Mahdy, "Numerical studies for solving fractional integro\_differential equations," *Journal of Ocean Engineering and Science*, vol. 3, pp. 127-132, 2018.
2. P. Rahimkhani, Y. Ordokhani and E. Babolian, "Fractional-order Bernoulli functions and their applications in solving fractional Fredholm\_Volterra integro\_differential equations," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 122, pp. 66-81, 2017.

3. A. Mohebbi, "Crank-Nicolson and Legendre spectral collocation methods for a partial integro-differential equation with singular kernel," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 349, pp. 197-206, 2019.
4. F. Fakhr-Izadi and M. Dehghan, "Fully spectral collocation method for nonlinear parabolic partial integro-differential equations," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 123, pp. 99-120, 2018.
5. Z. Taheri, S. Javadi and E. Babolian, "Numerical solution of stochastic fractional integro-differential equation by the spectral collocation method," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 321, pp. 336-347, 2017.
6. E. Doha, A. Bhrawy and S. Ezz-Eldien, "Efficient Chebyshev spectral methods for solving multi-term fractional orders differential equations," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, pp. 5662-5672, 2011.
7. S. Nemati, S. Sedaghat and I. Mohammadi, "A fast numerical algorithm based on the second kind Chebyshev polynomials for fractional integro-differential equations with weakly singular kernels," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 308, pp. 231-242, 2016.
8. M. Sakran, "Numerical solutions of integral and integro-differential equations using Chebyshev polynomials of the third kind," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 351, pp. 66-82, 2019.
9. K. Diethelm, *The Analysis of fractional differetial equations*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
10. A. Bhrawy and M. Zaky, "Shifted fractional-order Jacobi orthogonal functions: Application to a system of fractional differential equations," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 40, pp. 832-845, 2016.
11. C. Canuto, M. Hossaini, A. Quarteroni and T. A. Zang, *Spectral methods*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
12. E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, New York: John Wiley & Sons, 1978.
13. D. Sh. Mohammed, "Numerical solution of fractional integro-differential equations by least squares method and shifted Chebyshev polynomial," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 1, pp. 1-5, 2014.
14. H. D. Kasmaei, M. Senol, "On the numerical solution of nonlinear fractional integro-differential equations," *New Trends in Mathematical Sciences*, vol.5, pp. 118-127, 2017.