



Uniformly separation property in vector-valued little Lipschitz space

Azin Golbaharan

Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, Tehran, Iran.

✉E-mail: golbaharan@khu.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:

11 January 2020

Revised form:

6 July 2020

Accepted:

28 July 2020

Published online:

14 May 2022

Keywords:

Banach space;

Lipschitz space;

Uniform separation property.

Introduction

Suppose that (X, d) be a compact metric space with a distinguished point e and E be a Banach space. Collection of E -valued function f on X such that

$$\mathcal{L}(f) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)} < \infty, \quad f(e) = 0$$

is called vector-valued Lipschitz space and denoted by $Lip_0(X, E)$. The space $Lip_0(X, E)$ with respect to the point wise operations on functions and the norm $\mathcal{L}(\cdot)$ is a Banach space that separates points of X . The subset consists of all functions such that

$$\lim_{d(x, y) \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)} = 0$$

is a closed subspace of $Lip_0(X, E)$, denoted by $lip_0(X, E)$ and called little vector-valued Lipschitz space. In particular when Banach space E coincides with scalar field, $Lip_0(X, E)$ and $lip_0(X, E)$ is denoted by $Lip_0(X)$ and $lip_0(X)$ respectively.

Definition. The space $lip_0(X)$ separates points of X uniformly when there exists $C > 1$ such that for each distinct pair point $x, y \in X$ there is $f \in lip_0(X, E)$ with $f(y) = 0$, $\|f(x)\| = d(x, y)$, $\mathcal{L}(f) \leq C$.

Definition. The Banach space E has approximation property if for each $\varepsilon > 0$ and compact subset K of E there exists a finite dimensional bounded operator $T: E \rightarrow E$ such that $\sup_{x \in K} \|Tx - x\| < \varepsilon$.

Results and discussion

In this paper we deal with the uniform separation property of a metric space X by the little vector-valued Lipschitz space, namely $lip_0(X, E)$.

Conclusion

We show that if $lip_0(X)$ has the approximation property and E be a topological dual of some Banach space, then there exists a compact metric space Y with a distinguished point and a non-expansive function $\pi: X \rightarrow Y$ such that $lip_0(Y, E)$ separates the point of Y uniformly and C_π , the composition operator induced by π , is a surjective linear isometry from $lip_0(Y, E)$ to $lip_0(X, E)$.

How to cite: Golbaharan, A., (2022) Uniformly separation property in vector-valued little Lipschitz space. *Mathematical Researches*, 8 (1), 119-126



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

یکنواخت جداسازی در فضای توابع لیپ‌شیتس کوچک برداری مقدار

آذین گل‌بهاران ✉

نویسنده مسئول، دانشگاه خوارزمی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر دانشگاه خوارزمی، گروه ریاضی، تهران، ایران.

پست الکترونیکی: golbaharan@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۲۱ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۰۷ تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴ واژه‌های کلیدی: فضای باناخ، فضای توابع لیپ‌شیتس، یکنواخت جداسازی،	فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده و E یک فضای باناخ است. در این مقاله خاصیت یکنواخت جداسازی نقاط X توسط فضای (X, E) lip_0 مورد مطالعه قرار می‌گیرد.
استناد: گل‌بهاران، آذین؛ (۱۴۰۱) یکنواخت جداسازی در فضای توابع لیپ‌شیتس کوچک برداری مقدار. پژوهش‌های ریاضی، ۸(۱)، ۱۱۹-۱۲۶. ناشر: دانشگاه خوارزمی	© نویسندگان.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک با یک نقطه متمایز e و E یک فضای باناخ باشند. گردابه تمامی توابع E -مقداری f بر X که

$$\mathcal{L}(f) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)} < \infty$$

با $Lip(X, E)$ نمایش داده می‌شود و فضای توابع لیپشیتس برداری مقدار نام دارد. مجموعه $Lip(X, E)$ نسبت به اعمال نقطه‌وار روی توابع و نرم

$$\|f\| = \|f(e)\| + \mathcal{L}(f), \quad f \in Lip(X, E)$$

یک فضای باناخ است که نقاط X را جدا می‌کند. زیرمجموعه همه توابع f با ویژگی

$$\lim_{d(x, y) \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)} = 0$$

زیرفضای بسته $Lip(X, E)$ است که فضای توابع لیپشیتس برداری مقدار کوچک نام دارد و با نماد $lip(X, E)$ نشان داده می‌شود. در حالت خاصی که فضای باناخ E میدان اسکالر باشد، فضاهای $Lip(X, E)$ و $lip(X, E)$ را به ترتیب با $Lip(X)$ و $lip(X)$ نمایش می‌دهند. همچنین زیر فضای بسته $Lip(X, E)$ متشکل از همه توابعی که در نقطه e مقدار صفر اختیار می‌کنند را با $Lip_0(X, E)$ و $lip_0(X, E)$ نمایش می‌دهند.

به ازای بردار ناصفر $v_0 \in E$ و نقطه حدی x_0 از X تابع

$$f: X \rightarrow E, \quad f(x) = (d(x, x_0) - d(e, x_0))v_0$$

را در نظر بگیرید. روشن است که $f \in Lip_0(X, E)$ و $f \notin lip_0(X, E)$. بنابراین اگر توپولوژی حاصل از متر d روی فضای X گسسته نباشد (X دارای نقطه حدی باشد)، آن‌گاه $lip_0(X, E)$ زیرفضای سره‌ی $Lip_0(X, E)$ است و در صورتی که فضای متریک (X, d) یکنواخت گسسته باشد (عدد ثابت C موجود باشد که به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ نامساوی $d(x, y) > c$ برقرار باشد)، $Lip_0(X, E) = lip_0(X, E)$. این فضاها تا کنون به‌طور گسترده در مقالات پژوهشی مورد توجه قرار گرفته‌اند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۳] مراجعه نمایید.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X, Y دو مجموعه ناتهی و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع از X به Y باشد. گوییم خانواده $\mathcal{F}$ نقاط X را جدا می‌کند هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ تابع $f \in \mathcal{F}$ یافت شود که $f(y) \neq f(x)$.

فضای $Lip_0(X)$ نقاط X را جدا می‌کند ولی فضای $lip_0(X)$ لزوماً نقاط X را جدا نمی‌کند. به عنوان نمونه اگر مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را مجهز به متر قدر مطلق در نظر بگیریم، آن‌گاه $lip_0(\mathbb{R}) = \{0\}$. البته دسته بزرگی از فضاهای متریک X موجود هستند که $lip_0(X)$ نقاط X را جدا می‌کند.

تعریف ۲.۱. گوییم فضای $lip_0(X)$ به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا می‌کند هرگاه ثابت $C > 1$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ تابع $f \in lip_0(X)$ یافت شود که

$$f(y) = 0, \quad f(x) = d(x, y), \quad \mathcal{L}(f) \leq C.$$

برای $0 < \alpha < 1$ اگر X^α را فضای متریک (X, d^α) در نظر بگیریم، آن‌گاه به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ تابع

$$f(t) = d(x, t) - d(e, x) \quad (t \in X)$$

متعلق به $lip_0(X^\alpha)$ ، فضای توابع هلدر از نمای α است، لذا این فضا به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا می‌کند. شایان ذکر است همان‌طور که در قضیه زیر بیان شده، به ازای هر فضای متریک فشرده X ، فضای متریک فشرده Y یافت می‌شود که $lip_0(Y)$ به‌طور یکنواخت نقاط Y را جدا می‌کند و با $lip_0(X)$ به‌طور طول‌پا یک‌ریخت است. رابطه هم‌ارزی $\sim$ را روی X به این صورت در نظر بگیریم که به ازای هر $x, y \in X$ ، تعریف می‌کنیم $x \sim y$ اگر $f(x) = f(y)$ برای همه $f \in lip_0(X)$. در قضیه زیر مجموعه Y برابر با $\frac{X}{\sim}$ ، فضای خارج قسمتی رابطه هم‌ارزی $\sim$ است.

قضیه ۳.۱. [3, Corollary 4.4.9] فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با یک نقطه متمایز باشد. در این صورت عملگر

$$C_\pi: lip_0(Y) \rightarrow lip_0(X), \quad C_\pi(f) = f \circ \pi$$

که در آن Y فضای خارج قسمتی با تعریف فوق و $\pi: X \rightarrow Y$ نگاشت تصویر طبیعی است، یک‌ریختی طول‌پا است.

تعریف ۴.۱. گوییم فضای $lip_0(X, E)$ به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا می‌کند هرگاه ثابت $C > 1$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ تابع $f \in lip_0(X, E)$ یافت شود که

$$f(y) = 0, \quad \|f(x)\| = d(x, y), \quad \mathcal{L}(f) \leq C.$$

به ازای هر $f \in lip_0(X)$ و $v \in E$ تابع $f.v$ از X به E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f.v)(x) = f(x)v \quad (x \in X).$$

در این صورت $f.v \in lip_0(X, E)$ و $\mathcal{L}(f.v) = \mathcal{L}(f)\|v\|$ با استفاده از این مطلب همان‌طور که در [1, Section 3] اشاره شده است می‌توان نشان داد اگر فضای $lip_0(X)$ به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا کند آن‌گاه فضای $lip_0(X, E)$ نیز به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا خواهد کرد. البته در [۱] ویژگی یکنواخت جدا کردن به صورت زیر تعریف شده است

گوییم فضای $lip_0(X, E)$ به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا می‌کند هرگاه ثابت $C > 1$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ و $v \in E$ با شرط $\|v\| = 1$ تابع $f \in lip_0(X, E)$ یافت شود که

$$f(y) = 0, \quad f(x) = d(x, y)v, \quad \mathcal{L}(f) \leq C.$$

که با تعریف ۴,۱ تطابق دارد.

در این مقاله هدف آن است که قضیه ۳,۱ را به فضای توابع لیپشیتس برداری مقدار کوچک بر مجموعه فشرده X گسترش دهیم.

۲. نتایج

نخست به بیان یک تعریف و یک نتیجه از [۲] را می‌پردازیم که در ادامه به آن نیاز داریم.

تعریف ۱,۲. فضای باناخ E دارای خاصیت تقریب است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر زیرمجموعه فشرده K از E ، یک

$$\text{عملگر خطی کران دار با رتبه متناهی مانند } T: E \rightarrow E \text{ وجود داشته باشد که } \sup_{x \in K} \|Tx - x\| < \varepsilon$$

قضیه ۲,۲. [2, Corollary 5.17] فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده است. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

(الف) فضای $lip(X)$ دارای خاصیت تقریب است.

(ب) به ازای هر فضای باناخ E ، $\varepsilon > 0$ و $f \in lip(X, E^*)$ ، عناصر $f_1, \dots, f_n \in lip(X)$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E^*$

$$\text{وجود دارند که به ازای } g = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \lambda_i \text{ داریم } \|f - g\| < \varepsilon$$

قضیه بالا درباره فضای $lip_0(X)$ نیز برقرار است.

لم ۳,۲. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با یک نقطه متمایز و فضای $lip_0(X)$ دارای خاصیت تقریب است. در

این صورت به ازای هر فضای باناخ E ، $\varepsilon > 0$ و $f \in lip_0(X, E^*)$ ، عناصر $f_1, \dots, f_n \in lip_0(X)$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E^*$

$$\text{وجود دارند که به ازای } g = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \lambda_i \text{ داریم } \mathcal{L}(f - g) < \varepsilon$$

برهان. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با نقطه متمایز e فضای $lip_0(X)$ دارای خاصیت تقریب است. به ازای

هر $f \in lip(X)$ ، تابع $f - f(e)1$ متعلق به $lip_0(X)$ است که در آن 1 تابع ثابت یک است. در واقع می‌توان گفت

$$lip(X) = lip_0(X) \oplus \mathbb{C}1. \text{ همچنین نگاشت تصویر } \tau: lip(X) \rightarrow lip_0(X) \text{ با ضابطه } \tau(f) = f - f(e)1 \text{ خطی}$$

و پیوسته است. زیرمجموعه فشرده K از $lip(X)$ و $\varepsilon > 0$ را دلخواه در نظر بگیرید زیرمجموعه $L = \tau(K)$ از

$lip_0(X)$ فشرده است. در نتیجه یک عملگر خطی کران دار با رتبه متناهی مانند $S: lip_0(X) \rightarrow lip_0(X)$ وجود دارد

$$\text{که } \sup_{f \in L} \mathcal{L}(S(f) - f) < \varepsilon \text{ به این ترتیب نگاشت}$$

$$T: lip(X) \rightarrow lip(X), \quad T(f) = S(f - f(e)1) + f(e)1$$

یک عملگر خطی کران‌دار با رتبه متناهی است. به علاوه به ازای هر $f \in K$

$$\|T(f) - f\| = \|S(f - f(e)1) + f(e)1 - f\| = \mathcal{L}(S(\tau(f)) - \tau(f)) < \varepsilon.$$

بنابراین $lip(X)$ دارای خاصیت تقریب است. اکنون فضای باناخ E ، $\varepsilon > 0$ و $f \in lip_0(X, E^*)$ را دلخواه در نظر بگیرید. بنابر قضیه ۲،۲ عناصر $g_1, \dots, g_n \in lip(X)$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E^*$ وجود دارند که $\|f - \sum_{i=1}^n g_i \cdot \lambda_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ به این ترتیب

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(f - \sum_{i=1}^n \tau(g_i) \cdot \lambda_i\right) &= \left\|f - \sum_{i=1}^n \tau(g_i) \cdot \lambda_i\right\| \\ &\leq \left\|f - \sum_{i=1}^n g_i \cdot \lambda_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^n g_i(e) \cdot \lambda_i\right\| \leq 2 \left\|f - \sum_{i=1}^n g_i \cdot \lambda_i\right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

■

اکنون قضیه اصلی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴،۲. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با یک نقطه متمایز و $lip_0(X)$ دارای خاصیت تقریب باشد. به علاوه فرض کنیم E دوگان یک فضای باناخ باشد. در این صورت فضای متریک فشرده Y با یک نقطه متمایز و یک نگاشت غیرانبساطی $\pi: X \rightarrow Y$ وجود دارد که $lip_0(Y, E)$ به طور یکنواخت نقاط Y را جدا می‌کند و عملگر ترکیبی القا شده توسط π فضای $lip_0(Y, E)$ را به طور طول‌پا به روی $lip_0(X, E)$ تصویر می‌کند.

برهان. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با یک نقطه متمایز و $lip_0(X)$ دارای خاصیت تقریب باشد. به علاوه E یک فضای دوگان باشد. رابطه هم‌ارزی $\approx$ را روی X به این صورت در نظر بگیریم. به ازای هر $x, y \in X$ ، تعریف می‌کنیم $x \approx y$ اگر $f(x) = f(y)$ برای همه $f \in lip_0(X, E)$ مجموعه Y را $\frac{X}{\approx}$ ، فضای خارج قسمتی این رابطه هم‌ارزی قرار دهید. تابع زیر یک متر روی Y بدست می‌دهد.

$$\rho([x], [y]) = \sup\{\|f(x) - f(y)\| : f \in lip_0(X, E), \mathcal{L}(f) \leq 1\} \quad ([x], [y] \in \frac{X}{\approx})$$

به این ترتیب نگاشت خارج قسمتی $\pi: X \rightarrow Y$ ؛ $\pi(x) = [x]$ یک نگاشت غیرانبساطی است.

به ازای هر $x, y \in X$ ، تعریف می‌کنیم $x \sim y$ اگر $f(x) = f(y)$ برای همه $f \in lip_0(X)$. روشن است که اگر $x \approx y$ آن‌گاه $x \sim y$ برعکس فرض کنید $y \not\approx x$ پس تابع f متعلق به $lip_0(X, E)$ وجود دارد که $f(x) \neq f(y)$ بنابر قضیه هان-باناخ، $\gamma \in E^*$ یافت می‌شود که $\gamma(f(x)) \neq \gamma(f(y))$. به این ترتیب $\gamma \circ f \in lip_0(X)$ و $\gamma \circ f(x) \neq \gamma \circ f(y)$ لذا $x \not\sim y$ بنابراین روابط $\sim$ و $\approx$ منطبق هستند.

عملگر ترکیبی زیر را در نظر بگیرید.

$$C_\pi: \text{lip}_0(Y, E) \rightarrow \text{lip}_0(X, E), \quad C_\pi(F) = F \circ \pi$$

با توجه به غیرانبساطی بودن نگاشت π روشن است که عملگر ترکیبی C_π خوش تعریف است. اکنون نشان می‌دهیم این عملگر یک طول پایی پوشا است. برای این منظور باید به ازای هر $F \in \text{lip}_0(Y, E)$ ثابت کنیم $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(F \circ \pi)$ روشن است که

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F \circ \pi) &= \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{\|F \circ \pi(x) - F \circ \pi(y)\|}{d(x, y)} \leq \\ \sup_{\substack{x, y \in X \\ \pi(x) \neq \pi(y)}} \frac{\|F(\pi(x)) - F(\pi(y))\|}{\rho(\pi(x), \pi(y))} &= \sup_{\substack{[x], [y] \in Y \\ [x] \neq [y]}} \frac{\|F([x]) - F([y])\|}{\rho([x], [y])} = \mathcal{L}(F). \end{aligned}$$

اینک $x, y \in X$ را با ویژگی $[x] \neq [y]$ دل‌خواه در نظر بگیریم و تابع g را بر X با ضابطه

$$g(t) = \frac{1}{\mathcal{L}(F \circ \pi)} \|F \circ \pi(t) - F \circ \pi(y)\|$$

تعریف می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g) &= \sup_{\substack{s, t \in X \\ s \neq t}} \frac{|g(s) - g(t)|}{d(s, t)} \\ &= \sup_{\substack{s, t \in X \\ s \neq t}} \frac{1}{\mathcal{L}(F \circ \pi)} \frac{||F \circ \pi(s) - F \circ \pi(y)|| - ||F \circ \pi(t) - F \circ \pi(y)||}{d(s, t)} \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}(F \circ \pi)} \sup_{\substack{s, t \in X \\ s \neq t}} \frac{||F \circ \pi(s) - F \circ \pi(t)||}{d(s, t)} \leq 1. \end{aligned}$$

به این ترتیب $\mathcal{L}(g) \leq 1$ و نیز $g \in \text{lip}_0(X)$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{\|F([x]) - F([y])\|}{\rho([x], [y])} &= \\ \frac{|g(x) - g(y)|}{\sup\{\|f(x) - f(y)\|: f \in \text{lip}_0(X, E), \mathcal{L}(f) \leq 1\}} \mathcal{L}(F \circ \pi) &\leq \mathcal{L}(F \circ \pi). \end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{L}(F) \leq \mathcal{L}(F \circ \pi)$ در نهایت داریم $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(F \circ \pi)$

اکنون کافی است نشان دهیم C_π پوشا است. عناصر $n \in \mathbb{N}$ و $v_1, \dots, v_n \in E$ و $f_1, f_2, \dots, f_n \in \text{lip}_0(X)$ را $g_i \circ \pi = f_i$ به $g_1, \dots, g_n \in \text{lip}_0(Y)$ می‌گیریم. بنابر قضیه ۳،۱ نتیجه می‌گیریم وجود دارند که $C_\pi(\sum_{i=1}^n g_i \cdot v_i) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot v_i$ پس $i \in \{1, \dots, n\}$ ازای هر i چون C_π یک طول پایی است، برد آن بسته است. لذا طبق قضیه ۲،۲، C_π پوشا است.

در انتها ثابت کنیم $\text{lip}_0(Y, E)$ نقاط Y را به‌طور یکنواخت جدا می‌کند. نقاط متمایز $[x], [y] \in Y$ را دل‌خواه در نظر بگیریم. بنابر تعریف متر ρ تابع $k \in \text{lip}_0(X, E)$ وجود دارد که $\mathcal{L}(k) = 1$

$$0 < \frac{1}{2} \rho([x], [y]) < \|k(x) - k(y)\| \leq \rho([x], [y]).$$

چون C_π پوشا است، $f \in \text{lip}_0(Y, E)$ وجود دارد که $f \circ \pi = k$ و $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(k)$ چون $0 < \|k(x) - k(y)\|$ داریم $f([x]) \neq f([y])$. فرض کنید $\|f([x])\| \leq \|f([y])\|$. توجه کنیم که از $f([x]) \neq f([y])$ و $\|f([x])\| \leq \|f([y])\|$ نتیجه می‌گیریم $f([y]) \neq 0$. تعریف کنید

$$h: E \rightarrow \mathbb{R}; \quad h(v) = \min\{2\|v\|, \|v - f([x])\|\}.$$

به سادگی دیده می‌شود که $\mathcal{L}(h) \leq 2$. بردار ثابت $v_0 \in E$ را که $\|v_0\| = 1$ اختیار کرده و اسکالر ثابت C را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$1 \leq C = \frac{\rho([x], [y])}{\|f([x]) - f([y])\|} \leq 2$$

به ازای هر $t \in Y$ قرار دهید $g(t) = \text{Chof}(t)v_0$. در این صورت $g \in \text{lip}_0(Y, E)$ و

$$\|g([y])\| = \rho([x], [y]), \quad g([x]) = 0, \quad \mathcal{L}(g) \leq 4.$$

پس $\text{lip}_0(Y, E)$ نقاط Y را به‌طور یکنواخت جدا می‌کند.

References

1. A. Jimenez-Vargas, A. Morales Campoy and M. Villegas-Vallecillos, *The uniform separation property and Banach-Stone theorems for lattice-valued Lipschitz functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 3769-3777.
2. J. A. Johnson, *Banach spaces of Lipschitz functions and vector valued Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970), 147-169.
3. N. Weaver, *Lipschitz algebras*, World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 1999.