



The Aluffi algebra and linearity condition

Parisa Solhi¹ , Abbas Nasrollahnejad²

1. Department of Mathematics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.

E-mail: pa.solhi@uma.ac.ir

2. Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran.

✉E-mail: abbasnn@iasbs.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:

19 January 2020

Received in revised form:

4 April 2020

Accepted:

14 June 2020

Published online:

31 December 2022

Keywords:

Aluffi algebra,
Blowup algebra,
Singularity,
Ideal of linear type.

Introduction

Paolo Aluffi in [1] introduced a graded Algebra for purpose of defining a characteristic cycle of a hypersurface in parallel to Conormal cycle in intersection theory. Let $Y \subseteq X \subseteq M$ be closed embedding of schemes, where X is a hypersurface in the smooth variety M and Y is the singular subscheme of X . Aluffi constructed a graded \mathcal{O}_X -algebra $\text{qSym}_{X \subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X})$, which he called quasi-symmetric algebra, defined by

$$\text{qSym}_{X \subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X}) := \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X}) \otimes_{\text{Sym}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M}),$$

where $\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X})$ is the symmetric algebra of the ideal sheaf $\mathcal{J}_{Y,X}$ of Y in X and $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})$ is the Rees algebra of the ideal sheaf $\mathcal{J}_{Y,M}$ of Y in M . Aluffi proved that the characteristic cycle of X in M is equal

$$(-1)^{\dim X} \left[\text{Proj} \left(\text{qSym}_{X \subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X}) \right) \right]. \quad (1)$$

Furthermore, the Chern-Mather and Schwartz-MacPherson classes of X are (up to sing) the shadows of the principal cycles $[\text{Proj}(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X}))]$ and $[\text{Proj}(\text{qSym}_{X \subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X}))]$ in $\mathbb{P}(T^*M|X)$, respectively [1. Theorems 3.2 and 4.4].

Inspired by this construction, the second author and A. Simis studied algebraic and geometric properties of this algebra, naming it the Aluffi algebra [2] and [3]. Let R be a commutative Noetherian ring and $J \subseteq I \subseteq R$ ideals of R . The Aluffi algebra of I/J is

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) := \text{Sym}_{R/J}(I/J) \otimes_{\text{Sym}_R(I)} \mathcal{R}_R(I).$$

The Aluffi algebra is an intermediate graded algebra between the Rees and symmetric algebras. The latter algebras are important in the resolution of singularities [4]. Given an ideals $J \subseteq I \subseteq R$ we have

$$\text{Sym}_{R/J}(I/J) \rightarrow \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \rightarrow \mathcal{R}_{R/J}(I/J). \quad (2)$$

The right-hand surjection studied in [5] and [6]. The kernel of this homomorphism which is the Valabrega-Valla module has close relation with the other themes in commutative algebra as the Artin-Rees number, the relation type number and standard basis in the sense of Hironaka.

Let R be a Noetherian ring and $I = (f_1, \dots, f_m)$ ideal of R . There is a natural R -algebra homomorphism from the symmetric algebra of I to the Rees algebra $\alpha: \text{Sym}_R(I) \rightarrow \mathcal{R}_R(I)$. The ideal I is called of linear type if α is an isomorphism. By the definition of the Aluffi algebra, if I is of linear type, then the left surjective homomorphism in (2) is an isomorphism. Therefore, by using the formula (1) to compute the characteristic cycles of X , we just need to compute the principal cycles of the naïve blowup $\text{Proj}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X}))$. Therefore, it is reasonable to ask, when or for which classes of pair of ideals the Aluffi algebra is isomorphic with the symmetric algebra. For the importance of this isomorphism in algebraic geometry, we give a definition provided this isomorphism hold. A pair of ideals $J \subseteq I \subseteq R$ satisfies in linearity condition when the Aluffi algebra of I/J is isomorphism with the corresponding symmetric algebra. It is clear that if I or I/J are of linear type, then $J \subseteq I$ satisfies in linearity condition. In the case that J is the defining ideal of a reduced hypersurface with isolated singularities and I is the Jacobian ideal of J , the linearity condition characterized in terms of type of singularities. In particular, any hypersurface with simple singularity satisfies in linearity condition [7] and [8].

Results

In this work, we study the linearity condition. Given an ideal $J \subseteq I \subseteq R$ in the Noetherian ring R , we prove that $J \subseteq I$ satisfies in linearity condition if and only if $N_r \subseteq \tilde{J}N_{r-1}$ for $r \geq 1$, where N_r is the kernel of homogeneous component of degree r of the R -algebra homomorphism $\alpha: \text{Sym}_R(I) \rightarrow \mathcal{R}_R(I)$. We show that the following classes of ideals satisfy in linearity condition:

1. The ideals $(f) \subseteq I_f$, where f is defining equation of a reduced affine hypersurface $X = \text{Spec}(K[X_1, \dots, X_n]/(f)) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ such that the singular subscheme of X is non-singular and $I_f = (f, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n})$ is the Jacobian ideal of f .
 2. The ideals $J \subseteq I$, where J, I are monomial ideals in the polynomial ring $R = K[X_1, \dots, X_n]$ and I minimally is generated by J and a monomial m .
-

We prove that a pair of ideals $J \subseteq I = (X_1, \dots, X_n)^d \subseteq R = K[X_1, \dots, X_n]$ satisfies linearity condition if and only if $d = 1$. Finally, we prove that if $J \subseteq R$ is a complete intersection and I is an ideal contain J , then $J \subseteq I$ satisfies linearity condition if and only if the ideal I is of linear type.

References

1. Aluffi P., "Shadows of blow-up algebras", *Tohoku Math. J.*, 56, (2004) 593-619.
2. Nasrollah Nejad A., "The Aluffi Algebra of an Ideal", Ph. D. Thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Brazil, 2010.
3. Nasrollah Nejad A., Simis A., "The Aluffi algebra", *J. Singularities*, 3 (2011) 20-47.
4. Ellwood D., Hauser H., Mori S., Schicho J., "The resolution of singular algebraic varieties", *Clay Mathematics Institute Summer School 2012*, Obergrgl. CMI series, Amer. Math. Soc. 2014.
5. Nasrollah Nejad A., Shahidi Z., Zaare-Nahandi R., "Torsion-free Aluffi algebras", *J. Algebra*, 513 (2018) 190-207.
6. Nasrollah Nejad A., Zaare Nahandi R., "Aluffi torsion-free ideal," *J. Algebra*, 346 (2011) 284-298.
7. Nasrollah Nejad A., "The Aluffi algebra of a hypersurface with isolated singularities", *Communication in algebra*, 46 (8) (2018) 3353-3562.
8. Farrahy A.B., Nasrollah Nejad A., "Hypersurface with linear type singular loci", *Journal of Algebra and its Application*, <https://doi.org/10.1142/S0219498820501698>.

How to cite: Solhi, P., Nasrollahnejad, A. (2022). The Aluffi algebra and linearity condition. *Mathematical Researches*, 8 (4), 137-150.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University



Kharazmi University

جبر آلفی و شرط خطی

پریسا صلحی^۱، عباس نصراله‌نژاد^۲✉

۱. گروه ریاضی، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران. رایانامه: pa.solhi@uma.ac.ir

۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: abbasnm@iasbs.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

جبر آلفی نسخه جبری دوره‌های مشخصه در هندسه جبری و یک جبر مدرج میانی بین جبر ریس و جبر متقارن است. فرض کنیم R حلقه جابجایی نوتری و $I \subseteq J$ ایده آل‌هایی از حلقه R باشند. گوئیم $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند هرگاه جبر آلفی و جبر متقارن $I//I$ یکرخت باشند. در این مقاله شرط لازم و کافی برای شرط خطی ارائه می‌دهیم و کلاس‌هایی از ایده آل‌های $J \subseteq I$ را معرفی می‌کنیم که در شرط خطی صدق می‌کنند. ثابت می‌کنیم که اگر J ایده آل اشتراکی کامل باشد، آن‌گاه شرط خطی $J \subseteq I$ و نوع خطی بودن I معادلند.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۲۹

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۱/۱۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۲۵

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

واژه‌های کلیدی:

جبر آلفی،

جبر فراگستری،

تکینگی،

ایده آل از نوع خطی.

استناد: صلحی، پریسا؛ نصراله‌نژاد، عباس؛ (۱۴۰۱). جبر آلفی و شرط خطی. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۴)، ۱۵۰-۱۳۷.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در [۱] پائولو آلفوی^۱ جبر مدرجی را برای تعریف دوره‌های مشخصه به موازات دوره‌های هم‌نورمال برای یک ابررویه در نظریه اشتراک‌ها معرفی می‌کند. فرض کنیم $Y \subseteq X \subseteq M$ که X یک ابررویه در چندگونای هموار M و Y زیر چندگونای تکین X باشد. در این حالت آلفوی، \mathcal{O}_X -جبر مدرج $\text{qSym}_{X \subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X})$ را ساخت و آن را جبر شبه‌متقارن نامید که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{qSym}_{X \subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X}) := \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X}) \otimes_{\text{Sym}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})$$

که $\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X})$ جبر متقارن ایده‌آل تعریف $\mathcal{J}_{Y,X}$ از Y در X ، $\text{Sym}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})$ و $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})$ به ترتیب جبر متقارن و جبر ریس ایده‌آل تعریف $\mathcal{J}_{Y,M}$ از Y در M هستند. آلفوی ثابت کرد که دوره‌های مشخصه $[\text{Ch}(X)]$ از X برابر است با

$$(-1)^{\dim X} \left[\text{Proj} \left(\text{qSym}_{X \subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X}) \right) \right] \quad (۱)$$

هم چنین او ثابت کرد که کلاس‌های چرن - ماترز^۲ و شوارتز - ماک فرسن^۳ با تقریب علامت بنا به قضیه‌های ۳.۲ و ۴.۴ [۱] به ترتیب تصویر دوره‌های $[\text{Proj}(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X}))]$ و $[\text{Proj}(\text{qSym}_{X \subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X}))]$ در $\mathbb{P}(T^*M|X)$ هستند. با الهام از این ساختار، نویسنده دوم و آرون سیمیس^۴ در [۲] و [۳] ویژگی‌های جبری و هندسی این جبر را مطالعه کردند و آن را جبر آلفوی نامیدند. فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری و $I \subseteq R$ ایده‌آلی از حلقه R باشند. در این صورت جبر آلفوی $I//I$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A}_{R//I}(I//I) := \text{Sym}_{R//I}(I//I) \otimes_{\text{Sym}_R(I)} \mathcal{R}_R(I)$$

مهم‌ترین ویژگی جبر آلفوی این است که جبر آلفوی یک جبر میانی بین جبر متقارن و جبر ریس است. این دو جبر از دیدگاه هندسی جبرهای فراگستری نامیده می‌شوند و از اهمیت ویژه‌ای در نظریه تحلیل تکینگی چندگونا‌های جبری برخوردارند [۴]. برای ایده‌آل‌های $I \subseteq R$ از R داریم:

$$\text{Sym}_{R//I}(I//I) \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{R//I}(I//I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{R//I}(I//I) \quad (۲)$$

هم‌ریختی سمت راست و این که چه زمانی این هم‌ریختی، یکرختی است در مقاله‌های [۵] و [۶] بررسی شده است و ارتباط نزدیکی با سایر مفاهیم در جبر جابه‌جایی نظیر عدد آرتین ریس، عدد ارتباط نوعی و پایه‌های استاندارد دارد. فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری و $I = (f_1, \dots, f_m) \subseteq R$ ایده‌آلی از R باشد، در این صورت همواره هم‌ریختی $R -$ جبری پوشا از جبر متقارن I به جبر ریس I وجود دارد.

$$\text{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I) \quad (۳)$$

¹ Paolo Aluffi

² Chern-Mather

³ Schwatz-MacPherson

⁴ Aron Simis

ایده‌آل I را از نوع خطی گوئیم اگر هم‌ریختی بالا، یکرختی باشد. با تعریف جبر آلفوی اگر I از نوع خطی باشد، آن‌گاه هم‌ریختی سمت چپ (۲) یکرختی است. بنابراین با استفاده از فرمول (۱) برای محاسبهٔ دوره‌های مشخصه X فقط کافی است دوره‌های اصلی جبر متقارن $I//I$ را محاسبه کنیم. بنابراین کاملاً طبیعی است این سوال را مطرح کنیم که چه موقع یا برای چه کلاس‌هایی از ایده‌آل‌ها، جبر آلفوی یکرخت با جبر متقارن است. چون ایده‌آل تعریف جبر متقارن $I//I$ فقط به اولین سیزجی ایده‌آل I بستگی دارد و توسط چندجمله‌ای‌های خطی روی حلقه چندجمله‌ای‌های $R//J[T_1, \dots, T_m]$ تعریف می‌شود. از دیدگاه محاسباتی توصیف کردن ایده‌آل تعریف جبر متقارن ساده است و بیشتر ویژگی‌های جبری اعم از کوهن - مکالی، گرنشتاین، ایده‌آل‌های اول وابسته و غیره مطالعه شده است [۷] و [۸]. بنا به اهمیت یکرختی جبر متقارن و آلفوی از لحاظ هندسی و جبری تعریف شرط خطی را ارائه می‌دهیم. می‌گوئیم ایده‌آل‌های $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کنند هرگاه جبر آلفوی $I//I$ با جبر متقارن یکرخت باشد. به وضوح اگر I از نوع خطی باشد یا $I//I$ از نوع خطی باشد، $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کنند.

در این مقاله ابتدا جبر آلفوی و ویژگی‌های مهم آن را بیان می‌کنیم و به مطالعهٔ ایده‌آل‌هایی می‌پردازیم که در شرط خطی صدق می‌کنند. شرط لازم و کافی بر حسب مؤلفه‌های همگن هم‌ریختی (۲) ارائه می‌دهیم و کلاس‌هایی از ایده‌آل‌ها را معرفی می‌کنیم که در شرط خطی صدق می‌کنند. در ادامه به این سوال جواب می‌دهیم که آیا شرط خطی بودن $J \subseteq I$ و از نوع خطی بودن I معادلند؟ مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم که در حالت کلی شرط خطی و نوع خطی بودن I معادل نیستند. برای حالتی که ایده‌آل اصلی و توسط یک عنصر منظم تولید می‌شود و I شامل J است، اثبات شده است که شرط خطی و نوع خطی بودن I بنا به گزارهٔ ۴.۱ [۳] معادل هستند. این نتیجه را برای حالتی که J ایده‌آل اشتراکی کامل و I شامل J است، تعمیم می‌دهیم.

جبرهای آلفوی

فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری و I ایده‌آلی از حلقهٔ R و $\{f_1, \dots, f_m\}$ یک مجموعه مولد برای I باشد. به این داده‌ها دو جبر وابسته می‌کنیم که در جبر جابه‌جایی و هندسهٔ جبری از اهمیت زیادی برخوردار هستند. اولین جبر، جبر متقارن ایده‌آل I است که یک جبر مدرج است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Sym}_R(I) := \bigoplus_{n \geq 0} \text{Sym}_R^n(I) = \bigoplus_{n \geq 0} T_R^n(I)/J \cap T_R^n(I)$$

$$J = (x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in I) \subseteq T_R^2(I) \text{ که } T_R^n(I) \text{ جبر تانسوری از مرتبه } n \text{ و}$$

ایده‌آل دوطرفه از جبر تانسوری $T_R(I) = \bigoplus_{n \geq 0} T_R^n(I)$ است. اگر ایده‌آل I نمایش مینیمال زیر را داشته باشد:

$$R^n \xrightarrow{\varphi=(a_{ij})} R^m \rightarrow I \rightarrow 0$$

که φ اولین سیزیجی ماتریس ایده‌آل I است، آن‌گاه با خاصیت جهانی جبر متقارن، نمایش زیر را برای جبر متقارن I خواهیم داشت:

$$\text{Sym}_R(I) \cong \frac{R[T_1, \dots, T_m]}{\mathcal{L}}$$

که $R[T_1, \dots, T_m]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با متغیرهای T_i روی R است و \mathcal{L} ایده‌آلی است که توسط چندجمله‌ای‌های خطی $\mathcal{L}_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} T_j$ تولید می‌شود. در حقیقت \mathcal{L} توسط درایه‌های ماتریس $[T_1 \dots T_m] \cdot \varphi$ تولید می‌شود. \mathcal{L} را ایده‌آل تعریف جبر متقارن I گوئیم. دومین جبر، جبر ریس ایده‌آل I است که به جبر فراگستری معروف است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{R}_R(I) := \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n = R[f_1 t, \dots, f_m t] \subseteq R[t]$$

هم‌ریختی R - جبری پوشای زیر را داریم:

$$R[T_1, \dots, T_m] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I) \quad , \quad T_i \mapsto f_i t$$

هسته هم‌ریختی بالا که با نماد \mathcal{J} نمایش می‌دهیم، توسط تمام چندجمله‌ای‌ها در $R[T_1, \dots, T_m]$ تولید می‌شود که با مقداردهی $f_i t$ به صفر می‌روند. اگر $R[T_1, \dots, T_m]$ را حلقه مدجری در نظر بگیریم که $\deg(T_i) = 1$ ، آن‌گاه \mathcal{J} یک ایده‌آل مدرج است و $\mathcal{J} = \bigoplus_{i \geq 1} \mathcal{J}_i$ و همان ایده‌آل تعریف جبر متقارن است. بنابراین همواره هم‌ریختی R - جبری طبیعی پوشای $\mathcal{R}_R(I) \twoheadrightarrow \text{Sym}_R(I)$ را داریم.

تعریف ۱. ایده‌آل $I \subseteq R$ را از نوع خطی گوئیم اگر λ یک به یک باشد. به عبارت دیگر اگر $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1$.

اگر I توسط یک دنباله منظم تولید شود، آن‌گاه بنا به قضیه ۲.۳.۲ [۹]، I از نوع خطی است. دسته‌بندی ایده‌آل‌ها از نوع خطی یکی از مسأله‌های مهم در جبر جابه‌جایی است [۹] و [۱۰]. جبرهای متقارن و ریس به جبرهای فراگستری معروف هستند چون چندگونای تصویری وابسته به این جبرها همان فراگستری یک چندگونا در تحلیل تکینگی است [۴]. حال فرض کنیم $I \subseteq J$ ایده‌آلهایی از حلقه R باشند. با خاصیت تابعگونی جبر متقارن، هم‌ریختی R - جبری پوشای $\text{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \text{Sym}_{R/J}(I/J)$ و در نتیجه دیاگرام زیر را داریم:

$$\text{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I)$$

↓

$$\text{Sym}_{R/J}(I/J)$$

می‌توانیم این دیاگرام را با حاصل ضرب تانسوری کامل کنیم که منجر به بیان مفهوم زیر می‌شود.

تعریف ۲. فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری و $I \subseteq J$ ایده‌آلهایی از R باشند. جبر آلفی I/J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) := \text{Sym}_{R/J}(I/J) \otimes_{\text{Sym}_R(I)} \mathcal{R}_R(I).$$

جبر آلفوی نسخه جبری دوره‌های مشخصه در نظریه اشتراک‌ها در هندسه جبری می‌باشد [۱]. مهم‌ترین ویژگی‌های جبر آلفوی در گزاره زیر آورده شده است.

گزاره ۳ [۲.۲.۱]. فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری، $I \subseteq J$ ایده‌آلهایی از حلقه R باشند.

$$(۱) \quad \text{اگر } I \text{ از نوع خطی باشد، آن گاه } \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \text{Sym}_{R/J}(I/J).$$

(۲) جبر آلفوی نمایش زیر را دارد:

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \frac{\mathcal{R}_R(I)}{(J, \bar{J})\mathcal{R}_R(I)} \cong \bigoplus_{n \geq 1} I^n / JI^{n-1}$$

که J از درجه صفر، \bar{J} از درجه ۱ در جبر ریس I هستند.

(۳) جبر آلفوی یک جبر میانی است:

$$\text{Sym}_{R/J}(I/J) \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{R/J}(I/J)$$

همریختی R - جبری سمت راست در ویژگی (۳) و هسته آن که مدول والبرگا - والا^۵ است در حالت کلی و برای چندگونا‌های جبری خاصی مطالعه شده است [۶] و ارتباط نزدیکی با دیگر مفاهیم جبر جابه‌جایی بنا به گزاره ۲.۱۴ و نتیجه ۲.۱۷ [۳] نظیر عدد آرتین - ریس، پایه‌های استاندارد و عدد نوع ربطی دارد. در قسمت بعدی این مقاله به مطالعه همریختی R - جبری در بند ۳ گزاره بالا خواهیم پرداخت.

شرط خطی

از دیدگاه آلفوی و هم‌چنین هندسی همریختی سمت چپ در ویژگی (۳) از اهمیت زیادی برخوردار است که در مقدمه به آن اشاره کردیم. برای حالتی که J ایده‌آل تعریف یک ابررویه با تکینگی‌های ایزوله و I ایده‌آل تعریف تکینگی‌های ابررویه وابسته به J است، به مقاله‌های [۱۱] و [۱۲] مراجعه کنید. در این مقاله‌ها بیشتر حالتی که I از نوع خطی است مطالعه شده است و در حالت کلی این همریختی مطالعه نشده است. بنا به اهمیت این همریختی تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۴. فرض کنیم $I \subseteq J$ ایده‌آلهایی از حلقه جابه‌جایی نوتری R باشند. می‌گوییم $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند اگر جبر آلفوی I/J و جبر متقارن متناظر یکرخت باشند.

فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه جابه‌جایی نوتری R باشد. همریختی $\lambda: \text{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I)$ همریختی‌های $\lambda^{(r)}: \text{Sym}_R^r(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R^r(I) = I^r$ از مؤلفه‌های همگن از درجه $r \geq 1$ را القا می‌کند. توجه کنیم که برای $r = 0, 1$ ، $\lambda^{(r)}$ یکرختی مدرج طبیعی است. پس اولین جایی که این دو جبر یکرخت نیستند، $r = 2$ خواهد بود. هسته $\lambda^{(r)}$ را با N_r نمایش می‌دهیم.

⁵ Valabrega-Valla

گزاره ۵. فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری و $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. شرایط زیر معادلند:

$$(۱) \quad J \subseteq I \text{ در شرط خطی صدق می‌کند.}$$

$$(۲) \quad \text{برای } r \geq 1, N_r \subseteq \tilde{J} N_{r-1}.$$

اثبات. دیاگرام زیر با سطرها و ستون‌های دقیق را داریم:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \tilde{J}N_{r-1} & \rightarrow & N_r & \rightarrow & K_r \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \tilde{J}\text{Sym}_R^{r-1}(I) & \rightarrow & \text{Sym}_R^r(I) & \rightarrow & \text{Sym}_{\tilde{J}}^r(I/J) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & JI^{r-1} & \rightarrow & I^r & \rightarrow & \mathcal{A}_{R/J}^r(I/J) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

که K_r برای کامل کردن دیاگرام بالا تعریف شده است. $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر

$$r \geq 2, K_r = 0 \text{ و در نتیجه } N_r \subseteq \tilde{J} N_{r-1}.$$

فرض کنیم $R = K[X_1, \dots, X_n]$ حلقه چندجمله‌ای با n متغیر روی میدان K با مشخصه صفر باشد. فرض کنیم $f \in R$

چندجمله‌ای کاهش یافته باشد که ابررویه کاهش یافته $X = \text{Spec}(R/(f))$ در فضای آفین $\mathbb{A}_K^n = \text{Spec}(R)$ را

تعریف می‌کند. فرض کنیم $I_f = (f, J_f)$ ایده‌آل ژاکوبی f باشد که

$$J_f = (\partial f / \partial X_1, \dots, \partial f / \partial X_n)$$

ایده‌آل گرادینانی f است. زیر اسکیم تکین ابررویه X توسط ایده‌آل ژاکوبی تعریف می‌شود.

گزاره ۶. فرض کنیم $X = \text{Spec}(R/(f))$ ابررویه کاهش یافته در فضای آفین n -بعدی \mathbb{A}_K^n باشد. اگر زیراسکیم

تکین X ، نانتکین باشد آن‌گاه $I_f \subseteq (f)$ در شرط خطی صدق می‌کند.

اثبات. چون $\text{Spec}(R/(f))$ نانتکین است پس نشاندن $\text{Spec}(R/(f)) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ با [B.7. ۱۳]، جبر

متقارن مدول کونرمال I_f/I_f^2 یکریخت با حلقه مدرج وابسته I_f است. بنا به قضیه ۲.۲ [۹]، این معادل با این است

که I_f به صورت موضعی ایده‌آل از نوع خطی است و چون از نوع خطی بودن ویژگی موضعی است پس I_f از نوع خطی است و در نتیجه $I_f \subseteq (f)$ در شرط خطی صدق می‌کند.

قضیه ۷. فرض کنیم $R = K[X_1, \dots, X_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K و $J \subseteq I$ ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای از R باشد. اگر I به صورت مینیمال توسط J و تک‌جمله‌ای m تولید شود، آن‌گاه $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند. اثبات. قرار می‌دهیم $J = (m_1, \dots, m_r)$ و $I = (J, m = m_{r+1})$. فرض کنیم Λ_s مجموعه همه دنباله‌های غیرصعودی از اعداد $\alpha = (i_1, \dots, i_s) \subseteq \{1, \dots, r+1\}$ از طول s باشد. در این صورت $M_\alpha = m_{i_1} \dots m_{i_s}$ حاصل ضرب تک جمله‌ای‌های متناظر با اندیس α در I است و همچنین $T_\alpha = T_{i_1} \dots T_{i_s}$ تک‌جمله‌ای متناظر با α در $R[T_1, \dots, T_{r+1}]$ است. برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda_s$ دوجمله‌ای زیر را داریم:

$$T_{\alpha, \beta} = \frac{M_\beta}{\gcd(M_\alpha, M_\beta)} T_\alpha - \frac{M_\alpha}{\gcd(M_\alpha, M_\beta)} T_\beta$$

بنابر [۱۴] ایده‌آل تعریف \mathcal{J} جبر ریس I ، توسط ایده‌آل تعریف جبر متقارن \mathcal{L} و دوجمله‌ای‌های $\mathcal{J}_s = \{T_{\alpha, \beta} \mid \alpha, \beta \in \Lambda_s\}$ تولید می‌شود به عبارت دیگر $\mathcal{J} = \mathcal{L}S + (\cup_{s \geq 2} \mathcal{J}_s)S$ بنابراین جبر آلفی I/J نمایش زیر را دارد:

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \frac{R[T_1, \dots, T_{r+1}]}{(J, \mathcal{J}, \mathcal{J})} \cong \frac{R[T_1, \dots, T_{r+1}]}{(\mathcal{J}, T_1, \dots, T_r, \mathcal{L}) + (\mathcal{J}_s \mid s \geq 2)}$$

حال فرض کنیم $s \geq 2$ و \mathcal{J}_s $T_{\alpha, \beta}$. اگر T_i برای بعضی $i = 1, \dots, r$ و T_α و T_β را عادی کند، آن‌گاه $T_{\alpha, \beta}$ متعلق به ایده‌آل $\tilde{\mathcal{J}} = (T_1, \dots, T_r)$ و در نتیجه متعلق به ایده‌آل تعریف جبر متقارن I/J است. فرض کنیم $\alpha = (i_1, \dots, i_s)$ و $\beta = (r+1, \dots, r+1)$ داریم:

$$\gcd(M_\alpha, M_\beta) = \gcd(M_\alpha, m_{r+1}^{s'}) = m_{r+1}^{s'}$$

که $1 \leq s' \leq s$ است. در نتیجه داریم:

$$T_{\alpha, \beta} = m_{r+1}^{s-s'} T_\alpha - m T_{r+1}^s \in \mathcal{J}_s$$

که $M = f_\alpha / m_{r+1}^{s'}$. چون برای $i = 1, \dots, r$ دوجمله‌ای‌های $\mathcal{L}_i = m_{r+1} T_i - m_i T_{r+1} \in \mathcal{L}$ متعلق به ایده‌آل تعریف جبر متقارن I هستند. بنابراین هر $T_{\alpha, \beta} \in \mathcal{J}_s$ با $\beta = (r+1, \dots, r+1)$ را می‌توانیم بر حسب \mathcal{L}_i و عناصر دیگر از \mathcal{L} که از سیزیجی عناصر J بدست می‌آیند بنویسیم. پس برای $s \geq 2$ داریم:

$$\mathcal{J}_s \subseteq (\mathcal{J}, T_1, \dots, T_r, \mathcal{L})$$

که این نشان می‌دهد برای $J \subseteq I$ شرط خطی برقرار است.

گزاره ۸. فرض کنیم $R = K[X_1, \dots, X_n]$ و $J \subseteq I = (X_1, \dots, X_n)^d$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. در این صورت $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند اگر و تنها اگر $d = 1$.

اثبات: اگر $d = 1$ آن‌گاه I از نوع خطی است و $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند. حال فرض کنیم $d \geq 2$. مولدهای $I = (X_1, \dots, X_n)^d$ را به صورت الفبایی با شرط $X_1 > \dots > X_n$ مرتب می‌کنیم. فرض کنیم $\varphi: R[T_1, \dots, T_N] \rightarrow \mathcal{R}_R(I)$. هم ریختی R - جبر پوشا باشد که هر T_i را به i امین تک جمله‌ای از درجه d در I می‌برد که $N = \binom{d+n-1}{n-1}$ هسته هم ریختی φ همان ایده‌آل تعریف جبر ریس I است. همه تک جمله‌ای‌ها m_1, \dots, m_r از درجه $d-1$ در R را که به صورت الفبایی مرتب شده‌اند را در نظر می‌گیریم که $r = \binom{d+n-1}{n-1}$. فرض کنیم \mathbf{M} یک ماتریس از اندازه $n \times r$ است که درایه (i, j) ام آن متغیر T_{K_j} است که $\varphi(T_{K_j}) = x_i m_j$ و فرض کنیم $\mathbf{X} = [X_1 \dots X_n]^T$ ماتریس ستونی از متغیرها حلقه R باشد. قرار می‌دهیم $\mathbf{Q} = [\mathbf{X} | \mathbf{M}]$ که یک ماتریس از اندازه $(r+1) \times n$ است. بنا به قضیه ۴ [۱۵]، ایده‌آل تولید شده توسط ۲-کهدهای ماتریس \mathbf{Q} ، $I_2(\mathbf{Q})$ ایده‌آل تعریف جبر ریس I است. پس جبر آلفی نمایش زیر را دارد:

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \frac{R[T_1, \dots, T_N]}{(J, L_1, \dots, L_s, I_2(\mathbf{Q}))}$$

که L_i ها چندجمله‌ای‌های خطی در $R[T_1, \dots, T_N]$ هستند که ایده‌آل \tilde{J} را تعریف می‌کنند. ایده‌آل تعریف جبر متقارن توسط $(J, L_1, \dots, L_s, I_2(\mathbf{Q}))$ و تمام ۲-کهدهای ماتریس \mathbf{Q} تولید می‌شود که ستون متغیرها، \mathbf{X} انتخاب شده است و این ۲-کهدها به فرم $X_i T_j - X_j T_i$ هستند. بنابراین مولدهای $I_2(\mathbf{Q})$ که به فرم $T_i^2 - T_k T_l$ و $T_i T_j - T_k T_l$ هستند متعلق به ایده‌آل تعریف جبر متقارن I/J نمی‌توانند باشند و این اثبات را کامل می‌کند.

شرط خطی و نوع خطی

دیدیم که اگر I از نوع خطی باشد، آن‌گاه $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند. ولی عکس این گزاره در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۹. فرض کنیم $R = K[x_0, \dots, x_n] = K[X_0, \dots, X_n]/(f)$ و $f = \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} X_i X_j - X_n^2$. ایده‌آل‌های $J \subseteq I$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$J = (x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) \subseteq I = (x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \subseteq R$$

آن‌گاه $I/J \cong (X_{n-1})$ ، $R/J \cong K[X_{n-1}]$ ، چون $I/J \subseteq R/J$ توسط یک عنصر منظم تولید می‌شود I/J از نوع خطی است و

$$\text{Sym}_{R/J}(I/J) \cong \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \mathcal{R}_{R/J}(I/J)$$

ایده‌آل I از نوع خطی نیست چون چندجمله‌ای $\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} T_i T_j - T_n^2 \in R[T_0, \dots, T_n]$ متعلق به ایده‌آل تعریف جبر ریس I است.

مثال بالا را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم.

گزاره ۱۰. فرض کنیم (R, \mathfrak{m}) حلقه موضعی نامنظم و $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. اگر $I = \mathfrak{m}$ و R/J حلقه موضعی منظم باشد، آن‌گاه $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند و I از نوع خطی نیست.

اثبات. چون R/J حلقه موضعی منظم است، ایده‌آل I/J توسط یک دنباله منظم تولید می‌شود و از ویژگی (۳) جبر آلفی داریم:

$$\text{Sym}_{R/J}(I/J) \cong \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \mathcal{R}_{R/J}(I/J)$$

در نتیجه $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند.

حال فرض کنیم $I = \mathfrak{m}$ از نوع خطی باشد پس $\text{Sym}_R(I) \cong \mathcal{R}_R(I)$ و داریم:

$$\text{Sym}_{R/I}(I/I^2) \cong \text{Sym}_R(I) \otimes_R R/I \cong \mathcal{R}_R(I) \otimes_R R/I = gr_I(R)$$

که $gr_I(R)$ حلقه مدرج وابسته I است. با لم ناکایاما و قضیه ۷.۱۵ [۱۶]، داریم:

$$\mu(I) = \dim_{R/I} \text{Sym}_{R/I}(I/I^2) = \dim gr_I(R) = \dim R$$

که $\mu(I)$ تعداد عناصر یک مجموعه مولد مینیمال برای I است و $\mu(I) = \dim R$ تناقض با نامنظم بودن حلقه R است.

مثال ۱۱. فرض کنیم $R = K[x, y, z, w]$ و

$$J = (xy, xz, xw, yz, yw, zw) \subseteq I = (J, w^2)$$

بنا به قضیه (۷)، $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند ولی I از نوع خطی نیست. ایده‌آل تعریف جبر ریس I دوجمله‌ای‌هایی

از درجه ۲ به صورت زیر دارد:

$$T_2T_5 - T_1T_6, T_3T_4 - T_1T_6, T_3T_5 - T_1T_7, T_3T_6 - T_2T_7, T_5T_6 - T_4T_7$$

سؤال. فرض کنیم (R, \mathfrak{m}) حلقه موضعی منظم، $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از R باشند به طوری که $J \subseteq \mathfrak{m}I$. مثال‌هایی ارائه

دهید که $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند و I از نوع خطی نیست.

در حالتی که J ایده‌آل اصلی در حلقه نوتری R و توسط یک عنصر منظم تولید می‌شود و I ایده‌آلی شامل J است، بنا به

گزاره ۱.۴ [۳] شرط خطی و از نوع خطی بودن I معادلند. این نتیجه را به حالتی که J اشتراکی کامل است، تعمیم

می‌دهیم. ایده‌آلی را اشتراکی کامل گوییم اگر توسط یک دنباله منظم تولید شود.

قضیه ۱۲. فرض کنیم R حلقه نوتری و $J \subseteq R$ اشتراکی کامل و I ایده‌آلی شامل J باشد. شرایط زیر معادلند:

$$(1) \quad J \subseteq I \text{ در شرط خطی صدق می‌کند.}$$

$$(2) \quad I \text{ از نوع خطی است.}$$

اثبات. (۱) \Rightarrow (۲) بنا به ویژگی (۱) جبر آلفی برقرار است. فرض کنیم $\{f_1, \dots, f_m\}$ یک دنباله منظم در R

باشد و $J = (f_1, \dots, f_m)$ و $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند. قرار می‌دهیم:

$$\bar{R} = R/(f_1, \dots, f_{m-1}), \quad \bar{J} = J/(f_1, \dots, f_{m-1}) = (\bar{f}_m) \subseteq \bar{I} = I/(f_1, \dots, f_{m-1})$$

داریم $\bar{I}/\bar{J} \cong I/J$, $\bar{I}/\bar{J} \cong I/J$ از این که $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند، نتیجه می‌شود که $\bar{I}/\bar{J} \subseteq \bar{R}/\bar{J}$ در شرط خطی صدق می‌کند و بنا به گزاره ۱.۴ [۳]، \bar{I} از نوع خطی است و در نتیجه بنا به نتیجه ۱.۵ [۳]، I از نوع خطی است که (۲) \Rightarrow (۱) را ثابت می‌کند.

References

1. Aluffi P., "Shadows of blow-up algebras", Tohoku Math. J, 56, (2004) 593-619.
2. Nasrollah Nejad A., "The Aluffi Algebra of an Ideal", Ph. D. Thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Brazil, 2010.
3. Nasrollah Nejad A., Simis A., "The Aluffi algebra", J. Singularities, 3 (2011) 20-47.
4. Ellwood D., Hauser H., Mori S., Schicho J., "The resolution of singular algebraic varieties", Clay Mathematics Institute Summer School 2012, Obergrugl. CMI series, Amer. Math. Soc. 2014.
5. Nasrollah Nejad A., Shahidi Z., Zaare-Nahandi R., "Torsion-free Aluffi algebras", J. Algebra, 513 (2018) 190-207.
6. Nasrollah Nejad A., Zaare Nahandi R., "Aluffi torsion-free ideal," J. Algebra, 346 (2011) 284-298.
7. Herzog J., Simis A., Vasconcelos W., "Koszul homology and blowing-up rings", in Commutative Algebra, Proceedings, Trento (S. Greco and G. Valla, Eds.). Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 84, Marcel-Dekker, 1983, 79--169.
8. Huneke C., Rossi M., "The dimension and components of Symmetric algebras", J. Algebra, 98 (1986) 200-210.
9. Vasconcelos W., "Arithmetic of Blowup Algebras", London Mathematical Society, Lecture Notes Series 195, Cambridge University Press, 1994.

10. Herrmann M., Moonen, B., Villamayor O., "Ideals of linear type and some variants", The Curves Seminar at Queen's, Vol. VI (Kingston, ON, 1989), Exp. No. H, 37 pp., Queen's Papers in Pure and Appl. Math., 83, Queen's Univ., Kingston, ON, 1989.
11. Nasrollah Nejad A., "The Aluffi algebra of a hypersurface with isolated singularities", Communication in algebra, 46 (8) (2018) 3353-3562.
12. Farrahy A.B., Nasrollah Nejad A., "Hypersurface with linear type singular loci", Journal of Algebra and its Application, <https://doi.org/10.1142/S0219498820501698>.
13. Fulton W., "Intersection Theory", Springer-Verlag, Berlin, 1984.
14. Taylor D., "Ideals generated by monomials in an R-sequence", Ph. D. thesis, University of Chicago, 1966.
15. Barshay J., "Graded Algebras of Powers of Ideals Generated by A-Sequences", J. Algebra, 25 (1973) 90-99.
16. Matsumura H., "Commutative Ring Theory", Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge University Press, 1986.