

بررسی مترهای فینسلری حاصل ضربی وارپ از انحنای E ایزوتروپیک

مهران گبرانی^۱، بهمن رضایی^{۱*}، اسرا شنگلن سوییم^۲؛

۱- دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم، گروه ریاضی

۲- دانشگاه استانبول بیلگی، دانشکده ریاضی

دریافت: ۹۸/۱۲/۰۶

پذیرش: ۹۹/۰۷/۳۰

چکیده

در سال ۲۰۱۶، پروفیسور شن^۱ و همکارانش یکی از مهم‌ترین ساختارهای حاصل ضربی وارپ از مترهای فینسلری را مطالعه و اینشتینی بودن این مترها را بررسی کردند. در این مقاله انحنای E این نوع از مترهای فینسلری را محاسبه و دسته‌بندی کاملی از مترهای فینسلری حاصل ضربی وارپ از انحنای E ایزوتروپیک را ارائه خواهیم کرد. **واژه‌های کلیدی:** متر فینسلر، متر فینسلری حاصل ضربی وارپ، انحنای E .

مقدمه

وجود کمیت‌های غیرریمانی یکی از مهم‌ترین دلایل وسیع بودن هندسه فینسلر از هندسه ریمان می‌باشد. صفر شدن این کمیت‌ها در هندسه ریمان علت نامگذاری این نوع کمیت‌هاست. تاکنون کمیت‌های غیرریمانی بسیاری توسط هندسه دانان فینسلری معرفی شده‌اند. از جمله انحنای بروالد^۲، انحنای میانگین بروالد، انحنای S ، انحنای \mathcal{H} ، انحنای H و غیره. دسته‌بندی فضاهای فینسلری از انحنای بیان شده به شناخت هرچه بیشتر این فضاها کمک می‌کند. برای متر فینسلری $F = F(u, v)$ با ضرایب اسپری^۳ $G^A = G^A(u, v)$ ؛ ضرایب کمیت غیرریمانی تانسور بروالد

$$B = B_{CDE}^A du^C \otimes du^D \otimes du^E \otimes \frac{\partial}{\partial u^A}$$

$$B_{CDE}^A := \frac{\partial^3 G^A}{\partial v^C \partial v^D \partial v^E}$$

بنابر تعریف متر فینسلری F را بروالدی گوئیم هرگاه $B = 0$. از سوی دیگر با دوبار اثر گرفتن از تانسور فوق کمیت غیرریمانی مهم دیگری در هندسه فینسلر به نام انحنای میانگین بروالد (که با نماد E نشان می‌دهیم) $E := E_{AB} du^A \otimes du^B$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

*نویسنده مسئول: b.rezaei@urmia.ac.ir

¹ Z. Shen

² Berwald curvature

³ Spray coefficients

$$E_{AB} := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^A \partial v^B} \left(\frac{\partial G^C}{\partial v^C} \right). \quad (1)$$

متر فینسلری F را متر بروالدی ضعیف گوییم هرگاه $E = 0$.

تعریف: فرض کنیم F یک متر فینسلری روی منیفلد n -بعدی M و E نشان‌دهندهٔ انحنا E وابسته به آن باشد. در این صورت F را از انحنا E ایزوتروپیک^۴ گوییم هرگاه:

$$E = \frac{(n+1)kh}{2F} \quad (2)$$

که در آن h یک خانواده از دو فرمی های متقارن $h_v := h_{AB} du^A \otimes du^B$ است که ضرایب آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h_{AB} := FF_{v^A v^B},$$

و $k = k(u)$ یک تابع اسکالر روی M می‌باشد.

چن^۵-شن مترهای راندرزی از انحنا E و S را مطالعه و معادل بودن شرطهای از انحنا E ایزوتروپیک بودن این نوع مترها با از انحنا S ایزوتروپیک بودن را اثبات کردند [۲]. طبیی-نانکلی-پیغان اثبات کردند که هر فضای کارتان ریشه m -ام از انحنا E به فضای بروالدی ضعیف کاهش پیدا می‌کند [۳]. رضایی-گبرانی (α, β) -مترهای کلی از انحنا E ایزوتروپیک را مطالعه کردند [۴]. سپس گبرانی-رضایی-سویم‌شنگلن مترهای کروی متقارن کلی^۶ را بررسی کرده و ثابت کردند که یک متر کروی متقارن کلی از انحنا E ایزوتروپیک است اگر و فقط اگر از انحنا S ایزوتروپیک باشد [۵].

با فرض منیفلد ریمانی بودن (M, ds_1^2) و (N, ds_2^2) ، یک حاصلضرب وارپ؛ منیفلدی به فرم $M \times N$ مجهز به متر ریمانی به فرم زیر است:

$$ds^2 = ds_1^2 + f^2 ds_2^2,$$

که در آن f تابعی هموار وابسته به مختصات منیفلد M است. پیغان-طیبی-نجفی ساختار حاصل ضربی وارپ و وارپ مضاعف را به هندسه فینسلر تعمیم داده و مترهای فینسلری حاصل ضربی وارپ از انحنا پرچمی اسکالر و برخی از کمیت‌های مهم غیرریمانی مانند انحنا بروالد، انحنا لندزبرگ و انحنا میانگین لندزبرگ را در چنین فضاهایی بررسی کردند [۶،۷]. اخیرا چن-شن-ژائو^۷ و نیز کوزما-پیترو-وارگا^۸ منیفلدهای حاصل ضربی $R \times M$ مجهز به مترهای فینسلری که به طریقی که در ادامه بحث خواهیم کرد را معرفی کردند [۸،۹]. بنابر تعریف، روی منیفلد حاصل ضربی

⁴ Isotropic E-curvature

⁵ X. Chen

⁶ General spherically symmetric Finsler metrics

⁷ L. Zhao

⁸ L. Kozma, R. Peter, C. Varga

$M := I \times \bar{M}$ که در آن I یک بازه باز از \mathbb{R} و \bar{M} یک منیفلد $(n-1)$ -بعدی مجهز به متر ریمانی $\bar{\alpha}$ است، یک متر حاصلضربی وارپ F را می‌توان به فرم زیر تعریف کرد:

$$F(u, v) := \bar{\alpha}(\bar{u}, \bar{v}) \phi\left(u^1, \frac{v^1}{\bar{\alpha}(\bar{u}, \bar{v})}\right),$$

که در آن $u = (u^1, \bar{u})$ ، $v = v^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \bar{v}$ و ϕ تابعی روی حوزه‌ای از \mathbb{R}^2 است. این متر فینسلری را متر فینسلری حاصلضربی وارپ می‌نامند.

متر فینسلری F روی \mathbb{R}^n را کروی متقارن گوییم هرگاه تحت تمام دوران‌ها \mathbb{R}^n پایا بماند. به عبارت دیگر در رابطه زیر صدق کند:

$$F(Ax, Ay) = F(x, y)$$

که در آن $A \in O(n)$. مترهای کروی متقارن به فرم زیر می‌باشند:

$$F(x, y) = |y| \phi\left(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|}\right),$$

که $x \in \mathbb{R}^n$ ، $y \in T_x \mathbb{R}^n$ ، ϕ یک تابع هموار و مثبت و $\langle x, y \rangle$ ضرب داخلی استاندارد روی \mathbb{R}^n است. نکته مهم که باید به آن اشاره کرد این است که مترهای فینسلری حاصلضربی وارپ شامل مترهای فینسلری کروی متقارن می‌باشند:

لم ۱ [۸]: هر متر فینسلری کروی متقارن یک متر فینسلری حاصلضربی است.

در واقع هر متر کروی متقارن را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$F = \bar{\alpha}_+ \sqrt{s^2 + r^2} \cdot \phi\left(r, \frac{rs}{\sqrt{s^2 + r^2}}\right),$$

که در آن $\bar{\alpha}_+$ متر ریمانی استاندارد روی کره واحد S^{n-1} است. متر فینسلری فوق به وضوح یک متر فینسلری حاصلضربی وارپ است.

مثال: متر زیر

$$F = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2) + \langle x, y \rangle}}{1 - |x|^2}$$

متر فانک^۹؛ تعریف شده روی گوی باز واحد است. با استفاده از لم ۱؛ فرم حاصلضربی وارپ آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

^۹ Funk metric

$$F = \tilde{\alpha}_+ \frac{\sqrt{s^2 + r^2(1-r^2)} + sr}{1-r^2}.$$

در این مقاله، فرم اندیس‌های قراردادی به صورت زیر می‌باشند:

$$1 \leq A \leq B \leq \dots \leq n, \quad 2 \leq i \leq j \leq \dots \leq n.$$

در ادامه مترهای فینسلری حاصلضربی وارپ از انحنای E ایزوتروپیک را دسته‌بندی می‌کنیم. در واقع قضیه زیر قابل بیان و اثبات می‌باشد:

قضیه ۱ فرض کنیم $F = \tilde{\alpha}\phi$ یک متر فینسلری حاصلضربی وارپ روی منیفلد n -بعدی M باشد، در این صورت F از انحنای E ایزوتروپیک است اگر و فقط اگر

$$n(\Psi - s\Psi_s) + s^2\Psi_{ss} + \Phi_s - s\Phi_{ss} = (n+1)k(\phi - s\phi_s), \quad (3)$$

که در آن $k = k(u)$ یک تابع اسکالر روی M می‌باشد و Φ و Ψ در لم ۲ تعریف خواهند شد.

از آن جایی که شرط لازم و کافی برای بروالدی بودن یک متر فینسلری حاصلضربی وارپ عبارت است از این که

$$\Phi = a(r)s^2 + b(r), \quad \Psi = c(r)s,$$

که $a = a(r), b = b(r)$ و $c = c(r)$ توابع دیفرانسیل‌پذیرند [۱۰]. بنابراین می‌توان دید که این شرایط در شرط اینکه متر از انحنای E ایزوتروپیک باشد صادق است.

در حالت خاص، بنا بر لم ۱، هر متر فینسلری کروی متقارن یک متر فینسلری حاصلضربی است. بنا بر قضیه ۱، نتیجه زیر را داریم. لذا قضیه ۱ تعمیمی از کار مقاله [۱۱] است.

نتیجه ۱ [۱۱]: یک متر فینسلری کروی متقارن $F(x, y) = u\phi(r, s)$ از انحنای E ایزوتروپیک است اگر و فقط اگر

$$(P - sP_s)(n+1) + (r^2 - s^2)(Q_s - sQ_{ss}) = (n+1)(\phi - s\phi_s)\kappa(x),$$

که در آن

$$Q := \frac{r\phi_{ss} - \phi_r + s\phi_{rs}}{2r[\phi - s\phi_s + (r^2 - s^2)\phi_{ss}]}, \quad P := \frac{r\phi_s + s\phi_r}{2r\phi} - \frac{Q}{\phi} [s\phi + (r^2 - s^2)\phi_s],$$

$$s = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|}, \quad r = |x|, \quad u = |y| \quad \text{روی } \mathbf{R}^n \text{ می‌باشد.}$$

۱. مقدمات

نگاشت $F: TM \rightarrow [0, \infty)$ روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M یک ساختار فینسلری روی M است هرگاه در شرایط

زیر صدق کند:

$$(1) \quad F \text{ روی } TM_0 = TM - \{0\} \text{ هموار باشد؛}$$

(۲) F روی v همگن مثبت^{۱۰} از درجه یک باشد. یعنی به ازای هر $\lambda > 0$

$$F(u, \lambda v) = \lambda F(u, v),$$

(۳) به ازای هر (u, v) از TM ماتریس زیر موسوم به ماتریس هسیان^{۱۱} معین مثبت باشد؛

$$g_{AB}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(u, v)}{\partial v^A \partial v^B},$$

یعنی به ازای $U \neq 0$ داشته باشیم $g(U, U) > 0$ ، که g_{AB} مولفه‌های تانسور g می‌باشند. در این صورت (M, F) را منیفلد فینسلری و F را تابع اساسی فینسلری^{۱۲} گوئیم.

فرض کنیم F یک متر فینسلری روی منیفلد M باشد، در این صورت ضرایب اسپری G^A حاصل از متر F به صورت زیر روی M تعریف می‌شود:

$$G^A = \frac{1}{4} g^{AB} \{ [F^2]_{u^C v^B} v^C - [F^2]_{u^B} \},$$

که در آن $(g^{AB}) := (g_{AB})^{-1}$ ، $v \in T_u M$

انحنای ریمان یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماس $T_p M$ می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R = \{ R_v : T_p M \rightarrow T_p M \mid v \in T_p M, p \in M \},$$

که در حالت موضعی R_v را می‌توان نسبت به پایه‌های فضای $T_p M$ به صورت زیر بیان کرد:

$$R_v = R^A{}_C \frac{\partial}{\partial u^A} \otimes du^C,$$

به طوری که $R^A{}_C = R^A{}_C(u, v)$ نشان‌دهنده‌ی ضرایب انحنای ریمان^{۱۳} F بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R^A{}_C = 2 \frac{\partial G^A}{\partial u^C} - y^B \frac{\partial^2 G^A}{\partial u^B \partial v^C} + 2G^B \frac{\partial^2 G^A}{\partial v^B \partial v^C} - \frac{\partial G^A}{\partial v^B} \frac{\partial G^B}{\partial v^C}.$$

انحنای ریچی^{۱۴}، اثر انحنای ریمان بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ric(u, v) = R^A{}_A(u, v).$$

طبق تعریف، انحنای ریچی یک تابع معین مثبت از درجه ۲ روی v است.

برای یک بردار $v \in T_u M - \{0\}$ ، انحنای S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(u, v) = \frac{d}{dt} [\tau(c(t), \dot{c}(t))] |_{t=0},$$

¹⁰ Positive homogeneity

¹¹ Hessian matrix

¹² Fundamental Finsler function

¹³ Riemann curvature

¹⁴ Ricci curvature

که در آن $c = c(t)$ یک ژئودوزیک^{۱۵} با شرایط $c(0) = u$ و $\dot{c}(0) = v$ و $\tau = \tau(u, v)$ انحراف از معیار^{۱۶} است که یک کمیت همگن مثبت از درجه صفر می‌باشد. بنابر تعریف فوق در واقع انحنای S تحدید مشتق τ به روی ژئودوزیک‌ها می‌باشد. یعنی در واقع اندازه تغییرات آنی انحراف معیار روی ژئودوزیک‌های وابسته به متر F . به عبارت دیگر:

$$S(u, v) = \tau_{|A}(u, v)v^A$$

از طرفی در مختصات موضعی داریم:

$$S(u, v) = y^A \frac{\partial \tau}{\partial u^A} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial v^A} G^A.$$

با توجه به رابطه فوق می‌توان رابطه دیگری برای انحنای S به صورت زیر به دست آورد:

$$S(u, v) = \frac{\partial G^C}{\partial v^C} - v^C \frac{\partial}{\partial u^C} [\ln \sigma_{BH}].$$

با استفاده از انحنای S می‌توان کمیت دیگری به نام انحنای E را به صورت زیر تعریف کرد:

$$E_{AB}(u, v) := \frac{1}{2} S_{v^A v^B}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^A \partial v^B} \left(\frac{\partial G^C}{\partial y^C} \right) (u, v). \quad (۴)$$

در واقع انحنای E تانسوری است به فرم $E_v := T_u M \otimes T_u M \rightarrow R$ که در آن

$$E_v(x, y) := E_{AB}(u, v) x^A y^B$$

$$\text{که } x, y \in T_u M \text{ و } y = y^A \frac{\partial}{\partial v^A} \Big|_v \text{ و } x = x^A \frac{\partial}{\partial u^A} \Big|_u$$

لم ۲ [۸]: ضرایب اسپری G^A یک متر فینسلری حاصل ضربی وارپ $F = \tilde{\alpha} \phi(r, s)$ به صورت زیر می‌باشند:

(۵)

$$G^1 = \Phi \tilde{\alpha}^2, \quad G^i = \tilde{G}^i + \Psi \tilde{\alpha}^2 \tilde{l}^i,$$

$$\text{که } \tilde{l}^i = \tilde{\alpha}^{ij} \tilde{l}_j = \tilde{\alpha}^{ij} \tilde{\alpha}_{v,j} = \frac{v^i}{\tilde{\alpha}}$$

$$\Phi(r, s) = \frac{s^2(\omega_r \omega_{ss} - \omega_s \omega_{rs}) - 2\omega(\omega_r - s \omega_{rs})}{2(2\omega \omega_{ss} - \omega_s^2)}, \quad \Psi(r, s) = \frac{s(\omega_r \omega_{ss} - \omega_s \omega_{rs}) + \omega_s \omega_r}{2(2\omega \omega_{ss} - \omega_s^2)},$$

به طوری که

$$\omega = \phi^2.$$

¹⁵ Geodesics

¹⁶ Distortion

۲. انحای E مترهای فینسلری حاصلضربی وارپ

در این بخش، انحای E مترهای فینسلری حاصلضربی وارپ را محاسبه خواهیم کرد.

فرض کنیم F یک متر فینسلری حاصلضربی وارپ باشد. به سادگی می توان روابط زیر را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \check{\alpha}_{v^1} &= 0, \quad s_{v^1} = \frac{1}{\check{\alpha}}, \\ s_{v^j} &= -\frac{\check{\alpha}_{v^j} v^1}{\check{\alpha}^2} = -\frac{s \check{l}_j}{\check{\alpha}}, \quad \check{\alpha}_{v^j}^2 = 2\check{\alpha} \check{\alpha}_{v^j} = 2\check{\alpha} \check{l}_j, \\ \check{l}_{v^j}^k &= \left(\frac{v^k}{\check{\alpha}}\right)_{v^j} = \frac{\delta_j^k \check{\alpha} - v^k \check{\alpha}_{v^j}}{\check{\alpha}^2} = \frac{\delta_j^k - \check{l}^k \check{l}_j}{\check{\alpha}}. \end{aligned}$$

بنابر لم ۲، داریم

$$\frac{\partial G^1}{\partial v^1} = \Phi_s \check{\alpha}, \quad \frac{\partial G^m}{\partial v^m} = \frac{\partial \check{G}^m}{\partial v^m} + (n\Psi - s\Psi_s) \check{\alpha}, \quad (۶)$$

که در آنها از روابط زیر استفاده کردیم:

$$\check{l}^m \check{l}_m = \frac{v^m}{\check{\alpha}} \check{\alpha}_{v^m} = \frac{\check{\alpha}}{\check{\alpha}} = 1, \quad \delta_m^m = n - 1.$$

با استفاده از رابطه (۶) داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v^1} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) &= \frac{\partial}{\partial v^1} (\Phi_s \check{\alpha}) = \Phi_{ss} s_{v^1} \check{\alpha} + \Phi_s \check{\alpha}_{v^1} = \Phi_{ss}, \\ \frac{\partial}{\partial v^j} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) &= \frac{\partial}{\partial v^j} (\Phi_s \check{\alpha}) = \Phi_{ss} s_{v^j} \check{\alpha} + \Phi_s \check{\alpha}_{v^j} = (\Phi_s - s \Phi_{ss}) \check{l}_j, \\ \frac{\partial}{\partial v^1} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) &= \frac{\partial}{\partial v^1} \left[\frac{\partial \check{G}^m}{\partial v^m} + (n\Psi - s\Psi_s) \check{\alpha} \right] = \frac{\partial}{\partial v^1} \frac{\partial \check{G}^m}{\partial v^m} \\ &\quad + (n\Psi_s s_{v^1} - \Psi_s s_{v^1} - s\Psi_{ss} s_{v^1}) \check{\alpha} + (n\Psi - s\Psi_s) \check{\alpha}_{v^1} \\ &= (n-1)\Psi_s - s\Psi_{ss}, \\ \frac{\partial}{\partial v^j} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) &= \frac{\partial}{\partial v^j} \left[\frac{\partial \check{G}^m}{\partial v^m} + (n\Psi - s\Psi_s) \check{\alpha} \right] = \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial \check{G}^m}{\partial v^m} \\ &\quad + (n\Psi_s s_{v^j} - \Psi_s s_{v^j} - s\Psi_{ss} s_{v^j}) \check{\alpha} + (n\Psi - s\Psi_s) \check{\alpha}_{v^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial \check{G}^m}{\partial v^m} + [n(\Psi - s\Psi_s) + s^2\Psi_{ss}] \check{l}_j, \end{aligned}$$

که در آنها از رابطه زیر استفاده کردیم:

$$\frac{\partial}{\partial v^1} \frac{\partial \tilde{G}^m}{\partial v^m} = 0.$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$\frac{\partial}{\partial v^1} \frac{\partial}{\partial v^1} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) = \frac{\partial}{\partial v^1} (\Phi_{ss}) = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \Phi_{sss}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v^1} \frac{\partial}{\partial v^1} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) &= \frac{\partial}{\partial v^1} [(n-1)\Psi_s - s\Psi_{ss}] \\ &= \frac{1}{\tilde{\alpha}} [(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss}], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial v^1} \frac{\partial}{\partial v^j} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) = \frac{\partial}{\partial v^1} [(\Phi_s - s\Phi_{ss})\tilde{l}_j] = -\frac{1}{\tilde{\alpha}} s\Phi_{sss}\tilde{l}_j, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v^1} \frac{\partial}{\partial v^j} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) &= \frac{\partial}{\partial v^1} \left\{ \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial \tilde{G}^m}{\partial v^m} + [n(\Psi - s\Psi_s) + s^2\Psi_{ss}]\tilde{l}_j \right\} \\ &= -\frac{s}{\tilde{\alpha}} [(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss}]\tilde{l}_j, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^1} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) = \frac{\partial}{\partial v^i} (\Phi_{ss}) = -\frac{1}{\tilde{\alpha}} s\Phi_{sss}\tilde{l}_i, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^1} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) &= \frac{\partial}{\partial v^i} [(n-1)\Psi_s - s\Psi_{ss}] \\ &= -\frac{s}{\tilde{\alpha}} [(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss}]\tilde{l}_i, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) = \frac{\partial}{\partial v^i} [(\Phi_s - s\Phi_{ss})\tilde{l}_j] = \frac{1}{\tilde{\alpha}} [s^2\Phi_{sss}\tilde{l}_i\tilde{l}_j + (\Phi_s - s\Phi_{ss})\tilde{h}_{ij}], \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) &= \frac{\partial}{\partial v^i} \left\{ \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial \tilde{G}^m}{\partial v^m} + [n(\Psi - s\Psi_s) + s^2\Psi_{ss}]\tilde{l}_j \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial \tilde{G}^m}{\partial v^m} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \{ s^2[(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss}]\tilde{l}_i\tilde{l}_j \\ &\quad + [n(\Psi - s\Psi_s) + s^2\Psi_{ss}]\tilde{h}_{ij} \}, \end{aligned} \quad (14)$$

که در آنها از روابط $\tilde{h}_{ij} := \tilde{\alpha}(\tilde{l}_i)_{,j}$ و

$$\frac{\partial}{\partial v^1} \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial \tilde{G}^m}{\partial v^m} = 0$$

استفاده کرده‌ایم. از رابطه $\tilde{G}^i(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i v^j v^k$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \left(\frac{\partial \tilde{G}^m}{\partial v^m} \right) = 0. \quad (15)$$

با استفاده از روابط (۱)، (۵)، (۷)، (۱۴) و (۱۵)، داریم:

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v^1 \partial v^1} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) + \frac{\partial}{\partial v^1 \partial v^1} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\tilde{\alpha}} [(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss} + \Phi_{sss}], \quad (16)$$

$$E_{1j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v^1 \partial v^j} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) + \frac{\partial}{\partial v^1 \partial v^j} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) \right]$$

$$= \frac{-s}{2\tilde{\alpha}} [(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss} + \Phi_{sss}] \tilde{l}_j, \quad (17)$$

$$E_{i1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v^i \partial v^1} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) + \frac{\partial}{\partial v^i \partial v^1} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) \right]$$

$$= \frac{-s}{2\tilde{\alpha}} [(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss} + \Phi_{sss}] \tilde{l}_i, \quad (18)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v^i \partial v^j} \left(\frac{\partial G^1}{\partial v^1} \right) + \frac{\partial}{\partial v^i \partial v^j} \left(\frac{\partial G^m}{\partial v^m} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\tilde{\alpha}} \{ s^2 [(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss} + \Phi_{sss}] \tilde{l}_i \tilde{l}_j$$

$$+ [n(\Psi - s\Psi_s) + s^2\Psi_{ss} + \Phi_s - s\Phi_{ss}] \tilde{h}_{ij} \}. \quad (19)$$

۳. اثبات قضیه ۱

برهان: برای مترهای فینسلری حاصلضربی وارپ $F = \tilde{\alpha}\phi(r, s)$ داریم:

$$F_{v^1} = \phi_s,$$

$$F_{v^i} = (\phi - s\phi_s) \tilde{l}_i.$$

با استفاده از معادلات فوق داریم:

$$(20)$$

$$F_{v^1 v^1} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \phi_{ss},$$

$$F_{v^1 v^j} = -\frac{s\phi_{ss}}{\tilde{\alpha}} \tilde{l}_j, \quad (21)$$

$$F_{v^i v^1} = -\frac{s\phi_{ss}}{\tilde{\alpha}} \tilde{l}_i, \quad (22)$$

$$F_{v^i v^j} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} [s^2 \phi_{ss} \tilde{l}_i \tilde{l}_j + (\phi - s\phi_s) \tilde{h}_{ij}]. \quad (23)$$

حال فرض کنیم F از انحنا E ایزوتروپیک است. یعنی رابطه (۲) برقرار است. با استفاده از رابطه (۱) رابطه (۲) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial v^B} \frac{\partial}{\partial v^A} \left(\frac{\partial G^C}{\partial v^C} \right) = (n+1)k F_{v^A v^B}. \quad (24)$$

در این صورت با قرار دادن روابط (۱۶)-(۱۹) و (۲۰)-(۲۳) در رابطه (۲۴) داریم:

$$(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss} + \Phi_{sss} = (n+1)k\phi_{ss}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} s^2[(n-2)\Psi_{ss} - s\Psi_{sss} + \Phi_{sss}]\tilde{l}_i\tilde{l}_j + [n(\Psi - s\Psi_s) + s^2\Psi_{ss} + \Phi_s - s\Phi_{ss}]\tilde{h}_{ij} \\ = (n+1)k[s^2\phi_{ss}\tilde{l}_i\tilde{l}_j + (\phi - s\phi_s)\tilde{h}_{ij}]. \end{aligned} \quad (26)$$

با قرار دادن رابطه (۲۵) در رابطه (۲۶)، داریم:

$$n(\Psi - s\Psi_s) + s^2\Psi_{ss} + \Phi_s - s\Phi_{ss} = (n+1)k(\phi - s\phi_s). \quad (27)$$

برعکس: فرض کنید رابطه (۲۷) برقرار است. با مشتق‌گیری از رابطه (۲۷) نسبت به s ، رابطه (۲۵) را داریم. از روابط (۲۵) و (۲۷)، رابطه (۲۶) برقرار است. بنابراین، نتیجه می‌شود که $F = \alpha\phi(r, s)$ از انحنا E ایزوتروپیک است اگر و تنها اگر رابطه (۲۷) برقرار باشد و این قضیه را اثبات می‌کند.

References

1. Shen Z., "Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces", Kluwer Academic Publishers., (2001).
2. Chen X., Shen Z., "Randers metrics with special curvature properties", Osaka J. Math., 40(1) (2003) 87-101.
3. Tayebi A., Nankali A., Peyghan E., "Some curvature properties of Cartan spaces with m th root metrics", Lith. Math. J., 54 (1) (2014) 106-114.
4. Rezaei, B., Gabrani M., "On general (α, β) -metrics with isotropic E-curvature", J. Korean Math. Soc., 55 (2018) 415-424.
5. Gabrani M., Rezaei B., S. Sevim E., "The general spherically symmetric Finsler metrics with isotropic E-curvature", preprint (2020).
6. Peyghan E., Tayebi A., "On doubly warped product Finsler manifolds", Nonlinear Analysis: Real World Applications., 13 (4) (2012) 1703-1720.

7. Peyghan E., Tayebi A., Najafi B., "Doubly warped product Finsler manifolds with some non-Riemannian curvature properties", *Annales Polonici Mathematici.*, 3 (105) (2012) 293-311.
8. Chen B., Shen Z., Zhao L., "Constructions of Einstein Finsler metrics by warped product", preprint, (2016).
9. Kozma L., Peter R., Varga C., "Warped product of Finsler manifolds", *Ann. Univ. Sci. Budapest.*, 44 (2001) 157-170.
10. Liu H., Mo X., "Finsler warped product metrics of Douglas type", *Canad. Math. Bull.*, 62 (1) (2019) 119-130.
11. Chen Y., Song W., "Spherically symmetric Finsler metrics with isotropic E-curvature", *J. Math. Res. Appl.*, 35 (5) (2015) 561-567.