# بررسی مترهای فینسلری حاصل‌ضربی وارپ از انحنای E ایزوتروپیک

مهران گبرانی[۱]، بهمن رضایی*[۱]، اسرا شنگلن سویم[۲]؛

۱- دانشگاه ارومیه، دانشکدۀ علوم، گروه ریاضی
۲- دانشگاه استانبول بیلگی، دانشکدۀ ریاضی

دریافت: ۹۸/۱۲/۰۶ پذیرش: ۹۹/۰۷/۳۰

## چکیده

در سال ۲۰۱۶، پروفسور شن[۱] و همکارانش یکی از مهم‌ترین ساختارهای حاصل‌ضربی وارپ از مترهای فینسلری را مطالعه و اینشتینی بودن این مترها را بررسی کردند. در این مقاله انحنای $E$ این نوع از مترهای فینسلری را محاسبه و دسته‌بندی کاملی از مترهای فینسلری حاصلضربی وارپ از انحنای $E$ ایزوتروپیک را ارائه خواهیم کرد.

**واژه‌های کلیدی:** متر فینسلر، متر فینسلری حاصلضربی وارپ، انحنای $E$.

## مقدمه

وجود کمیت‌های غیرریمانی یکی از مهم‌ترین دلایل وسیع بودن هندسه فینسلر از هندسه ریمان می‌باشد. صفر شدن این کمیت‌ها در هندسه ریمان علت نامگذاری این نوع کمیت‌هاست. تاکنون کمیت‌های غیرریمانی بسیاری توسط هندسه دانان فینسلری معرفی شده‌اند. از جمله انحنای بروالد[۲]، انحنای میانگین بروالد، انحنای $S$، انحنای $\chi$، انحنای $H$ و غیره. دسته‌بندی فضاهای فینسلری از انحناهای بیان‌شده به شناخت هرچه بیشتر این فضاها کمک می‌کند. برای متر فینسلری $F=F(u,v)$ با ضرایب اسپری[۳] $G^A=G^A(u,v)$ ؛ ضرایب کمیت غیرریمانی تانسور بروالد $B=B_C{}^A{}_{DE}du^C\otimes du^D\otimes du^E\otimes\frac{\partial}{\partial u^A}$ به صورت زیرتعریف می‌شوند:

$$B_C{}^A{}_{DE}:=\frac{\partial^3G^A}{\partial v^C\partial v^D\partial v^E}.$$

بنابر تعریف متر فینسلری $F$ را بروالدی گوییم هرگاه $B=0$ . از سوی دیگر با دوبار اثر گرفتن از تانسور فوق کمیت غیرریمانی مهم دیگری در هندسه فینسلر به‌نام انحنای میانگین بروالد (که با نماد $E$ نشان می‌دهیم) $E:=E_{AB}du^A\otimes du^B$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

*نویسنده مسئول: b.rezaei@urmia.ac.ir

[1] Z. Shen
[2] Berwald curvature
[3] Spray coefficients

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]

$$E_{AB} := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^A \partial v^B}(\frac{\partial G^C}{\partial v^C}). \qquad (۱)$$

متر فینسلری $F$ را متر بروالدی ضعیف گوییم هرگاه $E=0$.

**تعریف**: فرض کنیم $F$ یک متر فینسلری روی منیفلد $n$-بعدی $M$ و $E$ نشان‌دهندۀ انحنای $E$ وابسته به آن باشد. در این صورت $F$ را از انحنای $E$ ایزوتروپیک[۴] گوییم هرگاه:

$$E = \frac{(n+1)kh}{2F} \qquad (۲)$$

که در آن $h$ یک خانواده از دو فرمی های متقارن $h_v := h_{AB} du^A \otimes du^B$ است که ضرایب آن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h_{AB} := FF_{v^A v^B},$$

و $k = k(u)$ یک تابع اسکالر روی $M$ می‌باشد.

چن[۵]-شن مترهای راندرزی از انحنای $E$ و $S$ را مطالعه و معادل بودن شرط‌های از انحنای $E$ ایزوتروپیک بودن این نوع مترها با از انحنای $S$ ایزوتروپیک بودن را اثبات کردند [۲]. طیبی-نانکلی-پیغان اثبات کردند که هر فضای کارتان ریشه $m$-ام از انحنای $E$ به فضای بروالدی ضعیف کاهش پیدا می‌کند [۳]. رضایی-گبرانی $(\alpha,\beta)$-مترهای کلی از انحنای $E$ ایزوتروپیک را مطالعه کردند [۴]. سپس گبرانی-رضایی-سویم‌شنگلن مترهای کروی متقارن کلی[۶] را بررسی کرده و ثابت کردند که یک متر کروی متقارن کلی از انحنای $E$ ایزوتروپیک است اگر و فقط اگر از انحنای $S$ ایزوتروپیک باشد [۵].

با فرض منیفلد ریمانی بودن $(M, ds_1^2)$ و $(N, ds_2^2)$، یک حاصلضرب وارپ؛ منیفلدی به فرم $M \times N$ مجهز به متر ریمانی به فرم زیر است:

$$ds^2 = ds_1^2 + f^2 ds_2^2,$$

که در آن $f$ تابعی هموار وابسته به مختصات منیفلد $M$ است. پیغان-طیبی-نجفی ساختار حاصل‌ضربی وارپ و وارپ مضاعف را به هندسه فینسلر تعمیم داده و مترهای فینسلری حاصل‌ضربی وارپ از انحنای پرچمی اسکالر و برخی از کمیت‌های مهم غیرریمانی مانند انحنای بروالد، انحنای لندزبرگ و انحنای میانگین لندزبرگ را در چنین فضاهایی بررسی کردند [۶،۷]. اخیرا چن-شن-ژائو[۷] و نیز کوزما-پیتر-وارگا[۸] منیفلدهای حاصل‌ضربی $\mathrm{R} \times M$ مجهز به مترهای فینسلری که به طریقی که در ادامه بحث خواهیم کرد را معرفی کردند [۸،۹]. بنابر تعریف، روی منیفلد حاصل‌ضربی

[4] Isotropic E-curvature
[5] X. Chen
[6] General spherically symmetric Finsler metrics
[7] L. Zhao
[8] L. Kozma, R. Peter, C. Varga

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]

که در آن $I$ یک بازهٔ باز از $\mathbb{R}$ و $\breve{M}$ یک منیفلد $(n-1)$-بعدی مجهز به متر ریمانی $\breve{\alpha}$ است، یک $M := I \times \breve{M}$ متر حاصل‌ضربی وارپ $F$ را می‌توان به فرم زیر تعریف کرد:

$$F(u,v) := \breve{\alpha}(\breve{u},\breve{v})\phi(u^1, \frac{v^1}{\breve{\alpha}(\breve{u},\breve{v})}),$$

که در آن $u = (u^1,\breve{u})$، $v = v^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \breve{v}$ و $\phi$ تابعی روی حوزه‌ای از $\mathbb{R}^2$ است. این متر فینسلری را متر فینسلری حاصل‌ضربی وارپ می‌نامند.

متر فینسلری $F$ روی $\mathbb{R}^n$ را کروی متقارن گوییم هرگاه تحت تمام دوران‌ها $\mathbb{R}^n$ پایا بماند. به عبارت دیگر در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$F(Ax,Ay) = F(x,y)$$

که در آن $A \in O(n)$. مترهای کروی متقارن به فرم زیر می‌باشند:

$$F(x,y) = |y|\phi(|x|, \frac{<x,y>}{|y|}),$$

که $x \in \mathbb{R}^n$، $y \in T_x\mathbb{R}^n$، $\phi$ یک تابع هموار و مثبت و $<x,y>$ ضرب داخلی استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ است. نکته مهم که باید به آن اشاره کرد این است که مترهای فینسلری حاصلضربی وارپ شامل مترهای فینسلری کروی متقارن می‌باشند:

**لم ۱** [۸]: هر متر فینسلری کروی متقارن یک متر فینسلری حاصل‌ضربی است.

در واقع هر متر کروی متقارن را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$F = \breve{\alpha}_+ \sqrt{s^2+r^2}.\phi(r, \frac{rs}{\sqrt{s^2+r^2}}),$$

که در آن $\breve{\alpha}_+$ متر ریمانی استاندارد روی کره واحد $S^{n-1}$ است. متر فینسلری فوق به وضوح یک متر فینسلری حاصلضربی وارپ است.

**مثال:** متر زیر

$$F = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - <x,y>^2)} + <x,y>}{1-|x|^2}$$

متر فانک[۹]؛ تعریف شده روی گوی باز واحد است. با استفاده از لم ۱؛ فرم حاصلضربی وارپ آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

[9] Funk metric

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]

$$F=\breve{\alpha}_{+}.\frac{\sqrt{s^2+r^2(1-r^2)}+sr}{1-r^2}.$$

در این مقاله، فرم اندیس‌های قراردادی به صورت زیر می‌باشند:

$$1\leq A\leq B\leq\ldots\leq n,\qquad 2\leq i\leq j\leq\ldots\leq n.$$

در ادامه مترهای فینسلری حاصلضربی وارپ از انحنای $E$ ایزوتروپیک را دسته‌بندی می‌کنیم. در واقع قضیه زیر قابل بیان و اثبات می‌باشد:

**قضیۀ ۱** فرض کنیم $F=\breve{\alpha}\phi$ یک متر فینسلری حاصلضربی وارپ روی منیفلد $n$-بعدی $M$ باشد، در این‌صورت $F$ از انحنای $E$ ایزوتروپیک است اگر و فقط اگر

$$n(\Psi-s\Psi_s)+s^2\Psi_{ss}+\Phi_s-s\Phi_{ss}=(n+1)k(\phi-s\phi_s), \tag{۳}$$

که در آن $k=k(u)$ یک تابع اسکالر روی $M$ می‌باشد و $\Phi$ و $\Psi$ در لم ۲ تعریف خواهند شد.

از آن‌جایی که شرط لازم و کافی برای بروالدی بودن یک متر فینسلری حاصل‌ضربی وارپ عبارت است از این که

$$\Phi=a(r)s^2+b(r),\qquad \Psi=c(r)s,$$

که $a=a(r),b=b(r)$ و $c=c(r)$ توابع دیفرانسیل‌پذیرند [۱۰]. بنابراین می‌توان دید که این شرایط در شرط اینکه متر از انحنای $E$ ایزوتروپیک باشد صادق است.

در حالت خاص، بنا بر لم ۱، هر متر فینسلری کروی متقارن یک متر فینسلری حاصلضربی است. بنا بر قضیه ۱، نتیجه زیر را داریم. لذا قضیۀ ۱ تعمیمی از کار مقالۀ [۱۱] است.

**نتیجۀ ۱** [۱۱]: یک متر فینسلری کروی متقارن $F(x,y)=u\phi(r,s)$ از انحنای $E$ ایزوتروپیک است اگر و فقط اگر

$$(P-sP_s)(n+1)+(r^2-s^2)(Q_s-sQ_{ss})=(n+1)(\phi-s\phi_s)\kappa(x),$$

که در آن

$$Q:=\frac{r\phi_{ss}-\phi_r+s\phi_{rs}}{2r[\phi-s\phi_s+(r^2-s^2)\phi_{ss}]},\qquad P:=\frac{r\phi_s+s\phi_r}{2r\phi}-\frac{Q}{\phi}[s\phi+(r^2-s^2)\phi_s],$$

$u=|y|$، $r=|x|$، $s=\frac{<x,y>}{|y|}$ و $k=k(x)$ یک تابع اسکالر روی $\mathrm{R}^n$ می‌باشد.

## ۱. مقدمات

نگاشت $F:TM\to[0,\infty)$ روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر $M$ یک ساختار فینسلری روی $M$ است هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $F$ روی $TM_0=TM-\{0\}$ هموار باشد؛

[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]
[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]

(۲) $F$ روی $v$ همگن مثبت[۱۰] از درجه یک باشد. یعنی به ازای هر $\lambda > 0$؛

$$F(u,\lambda v) = \lambda F(u,v),$$

(۳) به ازای هر $(u,v)$ از $TM$ ماتریس زیر موسوم به ماتریس هسیان[۱۱] معین‌مثبت باشد؛

$$g_{AB}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(u,v)}{\partial v^A \partial v^B},$$

یعنی به‌ازای $U \neq 0$ داشته باشیم $g(U,U) > 0$، که $g_{AB}$ مولفه‌های تانسور $g$ می‌باشند. در این‌صورت $(M,F)$ را منیفلد فینسلری و $F$ را تابع اساسی فینسلری[۱۲] گوییم.

فرض کنیم $F$ یک متر فینسلری روی منیفلد $M$ باشد، در این صورت ضرایب اسپری $G^A$ حاصل از متر $F$ به صورت زیر روی $M$ تعریف می‌شود:

$$G^A = \frac{1}{4}\, g^{AB}\left\{[F^2]_{u^C v^B} v^C - [F^2]_{u^B}\right\},$$

که در آن $v \in T_u M$، $(g^{AB}) := (g_{AB})^{-1}$.

انحنای ریمان یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماس $T_pM$ می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R = \left\{R_v : T_pM \to T_pM \,\middle|\, v \in T_pM, p \in M\right\},$$

که در حالت موضعی $R_v$ را می‌توان نسبت به پایه‌های فضای $T_pM$ به‌صورت زیر بیان کرد:

$$R_v = R^A{}_C \frac{\partial}{\partial u^A} \otimes du^C,$$

به طوری که $R^A{}_C = R^A{}_C(u,v)$ نشان‌دهنده‌ی ضرایب انحنای ریمان[۱۳] $F$ بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R^A{}_C = 2\frac{\partial G^A}{\partial u^C} - y^B \frac{\partial^2 G^A}{\partial u^B \partial v^C} + 2G^B \frac{\partial^2 G^A}{\partial v^B \partial v^C} - \frac{\partial G^A}{\partial v^B}\frac{\partial G^B}{\partial v^C}.$$

انحنای ریچی[۱۴]، اثر انحنای ریمان بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ric(u,v) = R^A{}_A(u,v).$$

طبق تعریف، انحنای ریچی یک تابع معین مثبت از درجه ۲ روی v است.

برای یک بردار $v \in T_uM - \{0\}$، انحنای $S$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(u,v) = \frac{d}{dt}\left[\tau\big(c(t),\dot{c}(\mathrm{t})\big)\right]|\mathrm{t}=0,$$

---

[10] Positive homogeneity
[11] Hessian matrix
[12] Foundamental Finsler function
[13] Riemann curvature
[14] Ricci curvature

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]

که در آن $c = c(t)$ یک ژئودوزیک[۱۵] با شرایط $c(0) = u$ و $\dot{c}(0) = v$ و $\tau = \tau(u, v)$ انحراف از معیار[۱۶] است که یک کمیت همگن مثبت از درجه صفر می‌باشد. بنابر تعریف فوق در واقع انحنای $S$ تحدید مشتق $\tau$ به روی ژئودوزیک‌ها می‌باشد. یعنی در واقع اندازه تغییرات آنی انحراف معیار روی ژئودوزیک‌های وابسته به متر $F$. به عبارت دیگر:

$$.S(u, v) = \tau_{|A}(u, v)v^A$$

از طرفی در مختصات موضعی داریم:

$$S(u, v) = y^A \frac{\partial \tau}{\partial u^A} - 2\frac{\partial \tau}{\partial v^A} G^A.$$

با توجه به رابطهٔ فوق می‌توان رابطهٔ دیگری برای انحنای $S$ به صورت زیر به دست آورد:

$$S(u, v) = \frac{\partial G^C}{\partial v^C} - v^C \frac{\partial}{\partial u^C}[ln\sigma_{BH}].$$

با استفاده از انحنای $S$ می‌توان کمیت دیگری به نام انحنای $E$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$E_{AB}(u,v) := \frac{1}{2} S_{v^A v^B}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^A \partial v^B}(\frac{\partial G^C}{\partial y^C})(u,v). \quad (۴)$$

در واقع انحنای $E$ تانسوری است به فرم $E_v := T_u M \otimes T_u M \to R$ که در آن

$$E_v(x, y) := E_{AB}(u,v) x^A y^B$$

که $x = x^A \frac{\partial}{\partial u^A}|_u$ و $y = y^A \frac{\partial}{\partial v^A}|_v$ و $.x, y \in T_u M$

**لم ۲** [۸]: ضرایب اسپری $G^A$ یک متر فینسلری حاصل‌ضربی وارپ $F = \breve{\alpha}\phi(r,s)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$G^1 = \Phi \breve{\alpha}^2, \qquad G^i = \breve{G}^i + \Psi \breve{\alpha}^2 \breve{l}^i, \quad (۵)$$

که $\breve{l}^i = \breve{\alpha}^{ij} \breve{l}_j = \breve{\alpha}^{ij} \breve{\alpha}_{v^j} = \frac{v^i}{\breve{\alpha}}$ و

$$\Phi(r,s) = \frac{s^2(\omega_r \omega_{ss} - \omega_s \omega_{rs}) - 2\omega(\omega_r - s\omega_{rs})}{2(2\omega\omega_{ss} - \omega_s^2)}, \ \Psi(r,s) = \frac{s(\omega_r \omega_{ss} - \omega_s \omega_{rs}) + \omega_s \omega_r}{2(2\omega\omega_{ss} - \omega_s^2)},$$

به طوری که

$$\omega = \phi^2.$$

[15] Geodesics
[16] Distortion

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]

## ۲. انحنای E مترهای فینسلری حاصل‌ضربی وارپ

در این بخش، انحنای $E$ مترهای فینسلری حاصل‌ضربی وارپ را محاسبه خواهیم کرد.

فرض کنیم $F$ یک متر فینسلری حاصلضربی وارپ باشد. به سادگی می‌توان روابط زیر را محاسبه کرد:

$$\breve{\alpha}_{v^1} = 0, \quad s_{v^1} = \frac{1}{\breve{\alpha}},$$

$$s_{v^j} = -\frac{\breve{\alpha}_{v^j} v^1}{\breve{\alpha}^2} = -\frac{s\breve{l}_j}{\breve{\alpha}}, \quad \breve{\alpha}^2_{v^j} = 2\breve{\alpha}\breve{\alpha}_{v^j} = 2\breve{\alpha}\breve{l}_j,$$

$$\breve{l}^k_{v^j} = (\frac{v^k}{\breve{\alpha}})_{v^j} = \frac{\delta^k_j \breve{\alpha} - v^k \breve{\alpha}_{v^j}}{\breve{\alpha}^2} = \frac{\delta^k_j - \breve{l}^k \breve{l}_j}{\breve{\alpha}}.$$

بنابر لم ۲، داریم

$$\frac{\partial G^1}{\partial v^1} = \Phi_s \breve{\alpha}, \qquad \frac{\partial G^m}{\partial v^m} = \frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m} + (n\Psi - s\Psi_s)\breve{\alpha}, \tag{۶}$$

که در آنها از روابط زیر استفاده کردیم:

$$\breve{l}^m \breve{l}_m = \frac{v^m}{\breve{\alpha}} \breve{\alpha}_{v^m} = \frac{\breve{\alpha}}{\breve{\alpha}} = 1, \qquad \delta^m_m = n-1.$$

با استفاده از رابطهٔ (۶) داریم

$$\frac{\partial}{\partial v^1}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1}) = \frac{\partial}{\partial v^1}(\Phi_s \breve{\alpha}) = \Phi_{ss} s_{v^1} \breve{\alpha} + \Phi_s \breve{\alpha}_{v^1} = \Phi_{ss},$$

$$\frac{\partial}{\partial v^j}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1}) = \frac{\partial}{\partial v^j}(\Phi_s \breve{\alpha}) = \Phi_{ss} s_{v^j} \breve{\alpha} + \Phi_s \breve{\alpha}_{v^j} = (\Phi_s - s\Phi_{ss})\breve{l}_j,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v^1}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m}) &= \frac{\partial}{\partial v^1}[\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m} + (n\Psi - s\Psi_s)\breve{\alpha}] = \frac{\partial}{\partial v^1}\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m} \\ &+ (n\Psi_s s_{v^1} - \Psi_s s_{v^1} - s\Psi_{ss} s_{v^1})\breve{\alpha} + (n\Psi - s\Psi_s)\breve{\alpha}_{v^1} \\ &= (n-1)\Psi_s - s\Psi_{ss},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v^j}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m}) &= \frac{\partial}{\partial v^j}[\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m} + (n\Psi - s\Psi_s)\breve{\alpha}] = \frac{\partial}{\partial v^j}\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m} \\ &+ (n\Psi_s s_{v^j} - \Psi_s s_{v^j} - s\Psi_{ss} s_{v^j})\breve{\alpha} + (n\Psi - s\Psi_s)\breve{\alpha}_{v^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial v^j}\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m} + [n(\Psi - s\Psi_s) + s^2\Psi_{ss}]\breve{l}_j,\end{aligned}$$

که در آنها از رابطهٔ زیر استفاده کردیم:

[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]
[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]

$$\frac{\partial}{\partial v^1}\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m}=0.$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$\frac{\partial}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^1}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1})=\frac{\partial}{\partial v^1}(\Phi_{ss})=\frac{1}{\breve{\alpha}}\Phi_{sss}, \tag{۷}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^1}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m})=\frac{\partial}{\partial v^1}[(n-1)\Psi_s-s\Psi_{ss}]$$
$$=\frac{1}{\breve{\alpha}}[(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}], \tag{۸}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^j}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1})=\frac{\partial}{\partial v^1}[(\Phi_s-s\Phi_{ss})\breve{l}_j]=-\frac{1}{\breve{\alpha}}s\Phi_{sss}\breve{l}_j, \tag{۹}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^j}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m})=\frac{\partial}{\partial v^1}\{\frac{\partial}{\partial v^j}\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m}+[n(\Psi-s\Psi_s)+s^2\Psi_{ss}]\breve{l}_j\}$$

$$=-\frac{s}{\breve{\alpha}}[(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}]\breve{l}_j, \tag{۱۰}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^1}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1})=\frac{\partial}{\partial v^i}(\Phi_{ss})=-\frac{1}{\breve{\alpha}}s\Phi_{sss}\breve{l}_i, \tag{۱۱}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^1}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m})=\frac{\partial}{\partial v^i}[(n-1)\Psi_s-s\Psi_{ss}]$$

$$=-\frac{s}{\breve{\alpha}}[(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}]\breve{l}_i, \tag{۱۲}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^j}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1})=\frac{\partial}{\partial v^i}[(\Phi_s-s\Phi_{ss})\breve{l}_j]=\frac{1}{\breve{\alpha}}[s^2\Phi_{sss}\breve{l}_i\breve{l}_j+(\Phi_s-s\Phi_{ss})\breve{h}_{ij}], \tag{۱۳}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^j}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m})=\frac{\partial}{\partial v^i}\{\frac{\partial}{\partial v^j}\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m}+[n(\Psi-s\Psi_s)+s^2\Psi_{ss}]\breve{l}_j\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^j}\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m}+\frac{1}{\breve{\alpha}}\{s^2[(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}]\breve{l}_i\breve{l}_j$$
$$+[n(\Psi-s\Psi_s)+s^2\Psi_{ss}]\breve{h}_{ij}\}, \tag{۱۴}$$

که در آنها از روابط $\breve{h}_{ij}:=\breve{\alpha}(\breve{l}_i)_{v^j}$ و

$$\frac{\partial}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial v^j}\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m}=0$$

استفاده کرده‌ایم. از رابطهٔ $\breve{G}^i(\breve{u},\breve{v})=\frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}v^jv^k$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^j}(\frac{\partial \breve{G}^m}{\partial v^m})=0. \tag{۱۵}$$

[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]

[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]

با استفاده از روابط (۱)، (۵)، (۷)، (۱۴) و (۱۵)، داریم:

$$E_{11}=\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial v^1\partial v^1}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1})+\frac{\partial}{\partial v^1\partial v^1}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m})]$$
$$=\frac{1}{2\breve{\alpha}}[(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}+\Phi_{sss}],\tag{۱۶}$$

$$E_{1j}=\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial v^1\partial v^j}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1})+\frac{\partial}{\partial v^1\partial v^j}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m})]$$
$$=\frac{-s}{2\breve{\alpha}}[(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}+\Phi_{sss}]\breve{l}_j,\tag{۱۷}$$

$$E_{i1}=\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial v^i\partial v^1}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1})+\frac{\partial}{\partial v^i\partial v^1}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m})]$$
$$=\frac{-s}{2\breve{\alpha}}[(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}+\Phi_{sss}]\breve{l}_i,\tag{۱۸}$$

$$E_{ij}=\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial v^i\partial v^j}(\frac{\partial G^1}{\partial v^1})+\frac{\partial}{\partial v^i\partial v^j}(\frac{\partial G^m}{\partial v^m})]$$
$$=\frac{1}{2\breve{\alpha}}\{s^2[(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}+\Phi_{sss}]\breve{l}_i\breve{l}_j$$
$$+[n(\Psi-s\Psi_s)+s^2\Psi_{ss}+\Phi_s-s\Phi_{ss}]\breve{h}_{ij}\}.\tag{۱۹}$$

## ۳. اثبات قضیهٔ ۱

**برهان:** برای مترهای فینسلری حاصل‌ضربی وارپ $F=\breve{\alpha}\phi(r,s)$ داریم:

$$F_{v^1}=\phi_s,$$
$$F_{v^i}=(\phi-s\phi_s)\breve{l}_i.$$

با استفاده از معادلات فوق داریم:

$$F_{v^1v^1}=\frac{1}{\breve{\alpha}}\phi_{ss},\tag{۲۰}$$

$$F_{v^1v^j}=-\frac{s\phi_{ss}}{\breve{\alpha}}\breve{l}_j,\tag{۲۱}$$

$$F_{v^iv^1}=-\frac{s\phi_{ss}}{\breve{\alpha}}\breve{l}_i,\tag{۲۲}$$

$$F_{v^iv^j}=\frac{1}{\breve{\alpha}}[s^2\phi_{ss}\breve{l}_i\breve{l}_j+(\phi-s\phi_s)\breve{h}_{ij}].\tag{۲۳}$$

[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]
[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]

حال فرض کنیم $F$ از انحنای $E$ ایزوتروپیک است. یعنی رابطهٔ (۲) برقرار است. با استفاده از رابطهٔ (۱) رابطهٔ (۲) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial v^B}\frac{\partial}{\partial v^A}\left(\frac{\partial G^C}{\partial v^C}\right)=(n+1)kF_{v^A v^B}. \qquad (۲۴)$$

در این صورت با قرار دادن روابط (۱۶)–(۱۹) و (۲۰)–(۲۳) در رابطهٔ (۲۴) داریم:

$$(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}+\Phi_{sss}=(n+1)k\,\phi_{ss}, \qquad (۲۵)$$

$$s^2[(n-2)\Psi_{ss}-s\Psi_{sss}+\Phi_{sss}]\breve{l}_i\breve{l}_j+[n(\Psi-s\Psi_s)+s^2\Psi_{ss}+\Phi_s-s\Phi_{ss}]\breve{h}_{ij}$$
$$=(n+1)k\,[s^2\phi_{ss}\breve{l}_i\breve{l}_j+(\phi-s\phi_s)\breve{h}_{ij}]. \qquad (۲۶)$$

با قرار دادن رابطهٔ (۲۵) در رابطه (۲۶)، داریم:

$$n(\Psi-s\Psi_s)+s^2\Psi_{ss}+\Phi_s-s\Phi_{ss}=(n+1)k\,(\phi-s\phi_s). \qquad (۲۷)$$

برعکس: فرض کنید رابطهٔ (۲۷) برقرار است. با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۲۷) نسبت به $s$، رابطهٔ (۲۵) را داریم. از روابط (۲۵) و (۲۷)، رابطهٔ (۲۶) برقرار است. بنابراین، نتیجه می‌شود که $F=\breve{\alpha}\phi(r,s)$ از انحنای $E$ ایزوتروپیک است اگر و تنها اگر رابطهٔ (۲۷) برقرار باشد و این قضیه را اثبات می‌کند.

# References


1. Shen Z., "Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces", Kluwer Academic Publishers., (2001).

2. Chen X., Shen Z., "Randers metrics with special curvature properties", Osaka J. Math., 40(1) (2003) 87-101.

3. Tayebi A., Nankali A., Peyghan E., "Some curvature properties of Cartan spaces with mth root metrics", Lith. Math. J., 54 (1) (2014) 106-114.

4. Rezaei, B., Gabrani M., "On general $(\alpha,\beta)$-metrics with isotropic E-curvature", J. Korean Math. Soc., 55 (2018) 415-424.

5. Gabrani M., Rezaei B., S. Sevim E., "The general spherically symmetric Finsler metrics with isotropic E-curvature", preprint (2020).

6. Peyghan E., Tayebi A., "On doubly warped product Finsler manifolds", Nonlinear Analysis: Real World Applications., 13 (4) (2012) 1703-1720.


[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]
[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]

7. Peyghan E., Tayebi A., Najafi B., "Doubly warped product Finsler manifolds with some non-Riemannian curvature properties", Annales Polonici Mathematici., 3 (105) (2012) 293-311.

8. Chen B., Shen Z., Zhao L., "Constructions of Einstein Finsler metrics by warped product", preprint, (2016).

9. Kozma L., Peter R., Varga C., "Warped product of Finsler manifolds", Ann. Univ. Sci. Budapest., 44 (2001) 157-170.

10. Liu H., Mo X., "Finsler warped product metrics of Douglas type", Canad. Math. Bull., 62 (1) (2019) 119-130.

11. Chen Y., Song W., "Spherically symmetric Finsler metrics with isotropic E-curvature", J. Math. Res. Appl., 35 (5) (2015) 561-567.


[ Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-07-02 ]

[ DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.4.1.3 ]