Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Some properties of Diameter norm on $B_0(\mathbb{R})$ and its isometries

Morteza Taheri[1], Ali Bayati Eshkaftaki [2]✉

1. Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

E-mail: m.th.1353@gmail.com

2. Department of Mathematics, Sharekord University, Sharekord, Iran.

✉E-mail: bayati.ali@sku.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
11 March 2020
Revised form:
2 Novamber 2020
Accepted:
14 Novamber 2020
Published online:
29 March 2022

Keywords:

Banach space;
Diameter norm;
isometry.

ABSTRACT

Introduction

Hagler used a diameter norm to construct a separable Banach space X with non-separable dual such that l_1 does not embed in X. Also, Bayati Eshkaftaki considered the diameter norm on $c_0(I)$ and characterized all isometries on this space.

In this article, we are going to first introduce the space $B_0(\mathbb{R})$ and show that this space is Banakh space with supremum norm, and then we express the diameter norm on the space $B_0(\mathbb{R})$ and examine some of the characteristics of this space. We also examine the relationship between this space and Banach space $c_0(\mathbb{R})$ and some of the reference theorems [3] shown on space $c_0(\mathbb{R})$on space $B_0(\mathbb{R})$.

Material and methods

We express some properties of the space $B_0(\mathbb{R})$ and define the diameter norm on this space, and then we examine the equivalence of the diameter norm with the supremum norm on this space.

We define the longitudinal operator relative to the diameter norm on $B_0(\mathbb{R})$ and state the conditions under which a linear operator on $B_0(\mathbb{R})$is longitudinal. In the following, we will examine the results of the length of the linear operator on the space B_0 (R).

We will use the notation $l^\infty(\mathbb{R})$ for the set of all bounded functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Also we denote $c_0(\mathbb{R})$ for the set of all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ with $\lim_{x\in\mathbb{R}} f=0$.The space $l^\infty(\mathbb{R})$ is a Banach space with the norm

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|\ : f\in B_0(\mathbb{R})\}.$$

We denote $B_0(\mathbb{R})$ for the set of all bounded functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ with $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. This space is a Banach space with norm$\|\cdot\|_\infty$. For every $j\in\mathbb{R}$, we consider the function

$$e_j(i)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases},$$

on real numbers. Then each e_j belongs to $B_0(\mathbb{R})$.

We define for $f\in B_0(\mathbb{R})$ define $\|f\|_d=$ diam(f) and it is called the diameter norm.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

We define$\|f\| = \|f\|_d + \|f\|_\infty$ for each $f \in B_0(\mathbb{R})$ that the $B_0(\mathbb{R})$ with this norm is a Banach algebra.

Main Results

We have identified some properties of the space $B_0(\mathbb{R})$ is introduced and some of its properties are examined. Then with the help of a diameter norm on the space $B_0(\mathbb{R})$, define a norm $\|\cdot\|$ on the $B_0(\mathbb{R})$, and show that the space $B_0(\mathbb{R})$ is a Banach algebra with this norm$\|\cdot\|$. Also, we got the relationship between the space $B_0(\mathbb{R})$and the space $c_0(\mathbb{R})$ and we have obtained a few theorems in connection with isometry under $\|\cdot\|_d$.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- If $f \in B_0(\mathbb{R})$ and $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function that $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, then $fo\varphi \in B_0(\mathbb{R})$.
- The space $c_0(\mathbb{R})$ is an ideal in algebra $B_0(\mathbb{R})$.
- $(B_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_d)$ is a Banach space.
- The space $B_{00}(\mathbb{R})$ is dense in $B_0(\mathbb{R})$with $\|\cdot\|_d$.
- If $i,j \in \mathbb{R}$ and $i \neq j$, then e_i be orthogonal to e_j. Suppose $f \in B_0(\mathbb{R})$ and this function is continuous at point i. In this case, f is orthogonal to e_i, and if f is continuous on $\mathbb{R}$ then f is orthogonal to each of the vectors produced by $\{e_i\}$.
- If $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function that $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, then the operator

$T: B_0(\mathbb{R}) \longrightarrow B_0(\mathbb{R})$, $T(f) = f \circ \varphi$,

is an isometry under $\|\cdot\|_d$, *if and only if* φ is a surjective function.

- For any polynomial $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, where n an odd number. the operator $T_n f(x) = f(P_n(x))$ is an isometry under $\|\cdot\|_d$.
- Suppose $T: B_0(\mathbb{R}) \longrightarrow B_0(\mathbb{R})$, is an isometry under $\|\cdot\|_d$and $i_0 \in \mathbb{R}$. Then

$$-1 \leq \sum_{j\in \mathrm{I}^-} Te_j(i_0) \leq 0 \leq \sum_{j\in \mathrm{I}^+} Te_j(i_0) \leq 1.$$

where $\mathrm{I}^+ = \{j \in \mathbb{R}: Te_j(i_0) > 0\}$ and $\mathrm{I}^- = \{j \in \mathbb{R}: Te_j(i_0) < 0\}$.

- Let $T: B_0(\mathbb{R}) \longrightarrow B_0(\mathbb{R})$ be an isometry under $\|\cdot\|_d$, $j_0 \in \mathbb{R}$ and $\lambda = \sup(Te_{j_0})$.

Then

$\lambda = \lim \lambda_j$ and $\lambda - 1 = \lim \eta_j$,

where $\lambda_j = \sup(T(e_{j_0} + e_j))$ and $\eta_j = \inf(T(e_{j_0} + e_j))$.

How to cite: Taheri, M., Bayati Eshkaftaki, A., (2022) Some properties of Diameter norm on B_0 (R) and its isometries. *Mathematical Researches*, 8 (1), 57-71

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

بررسی نرم قطری، خواص مختلفی از فضای $B_0(\mathbb{R})$ و عملگرهای طولپا بر آن

مرتضی طاهری[۱]، علی بیاتی اشکفتکی ✉[۲]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. پست الکترونیکی: m.th.1353@gmail.com

۲. نویسندهٔ مسئول، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران. پست الکترونیکی: bayati.ali@sku.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۸/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۲۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۱/۰۹

واژه‌های کلیدی:
فضای باناخ،
نرم قطری،
عملگر طولپا.

چکیده

در این مقاله ابتدا، فضای $B_0(\mathbb{R})$ و نرم قطری بر آن را معرفی می‌کنیم و سپس برخی از خصوصیات آن را مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم که این فضا با این نرم، یک فضای باناخ است. همچنین نشان می‌دهیم که نرم قطری با نرم سوپرمم، معادل است و نرمی به کمک نرم سوپرمم و نرم قطری بر این فضا تعریف می‌کنیم که این فضا با عمل ضرب نقطه وار و این نرم یک جبر باناخ است. به‌علاوه شرایطی را معرفی می‌کنیم که تحت آن یک عملگر خطی روی فضای مطرح‌شده طولپا باشد.

استناد: طاهری، مرتضی؛ بیاتی اشکفتکی، علی؛ (۱۴۰۱). بررسی نرم قطری، خواص مختلفی از فضای $B_0(\mathbb{R})$ و عملگرهای طولپا بر آن. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۷۱-۵۷.

CC BY NC

ناشر: دانشگاه خوارزمی
© نویسندگان.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

۱. مقدمه

هاگلر[1] برای ساختن یک فضای باناخ تفکیک‌پذیر X که دارای دوگان تفکیک ناپذیر باشد و فضای l_1 را نتوان در X قرارداد، نرم قطری را مورد استفاده قرارداد [۳]. همچنین بیاتی در [۱]، نرم قطری روی فضای $c_0(I)$ را مطرح و شرایط معادلی برای طولپایی یک عملگر، روی این فضا به دست آورده است.

ما در این مقاله قصد داریم ابتدا فضای $B_0(\mathbb{R})$ را معرفی کرده و نشان دهیم این فضا با نرم سوپرمم فضای باناخ است و سپس نرم قطری را روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ بیان و برخی از خصوصیات این فضا را بررسی می‌کنیم. همچنین ارتباط بین این فضا و فضای باناخ $c_0(\mathbb{R})$ و بعضی از قضایای مرجع [۱] را که بر فضای $c_0(\mathbb{R})$ نشان داده شده است روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ بررسی می‌کنیم.

تعریف۱-۱. ([۱]) فرض کنیم I یک مجموعهٔ نامتناهی (همراه با توپولوژی گسسته) باشد. اگر f تابعی از I به اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، می‌گوییم حد تابع f برابر با l است و از نماد

$$\lim_{i\in I} f = l.$$

(یا به اختصار $\lim f = l$) استفاده می‌کنیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، یک زیرمجموعهٔ متناهی $F \subseteq I$ وجود داشته باشد؛ به‌طوری‌که برای هر $i \in I \setminus F$، داشته باشیم:

$$|f(i) - l| < \varepsilon.$$

فضای تمام توابع کراندار $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با $l^\infty(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. همچنین فضای تمام توابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ که حد آنها با مفهوم فوق موجود و برابر صفر باشد را با $c_0(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت، $l^\infty(\mathbb{R})$ همراه با نرم سوپرمم

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

یک فضای باناخ است و همچنین $c_0(\mathbb{R})$، زیرمجموعهٔ $l^\infty(\mathbb{R})$ است.

تعریف۱-۲. ([۴]) اگر I یک مجموعهٔ ناتهی باشد. تابع $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ را جمع‌پذیر گوییم، هرگاه $\sigma \in \mathbb{R}$ موجود باشد؛ به‌طوری‌که برای هر $\varepsilon > 0$ یک زیرمجموعهٔ متناهی مانند J_0 از I پیدا شود؛ به‌طوری‌که $\left|\sigma - \sum_{j\in J} f(j)\right| < \varepsilon$، که J یک زیرمجموعهٔ متناهی دلخواه از I، شامل J_0 است، و در این‌صورت از نماد $\sigma = \sum_{j\in I} f(j)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف۱-۳. ([۲]) اگر X یک فضای باناخ روی اعداد حقیقی باشد و $x, y \in X$. گوییم x به تعبیر بیرکوف[2] عمود بر y است، هرگاه برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$\|x\| \le \|x + \lambda y\|.$$

مجموعهٔ تمام توابع کراندار از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ که $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (حد معمولی در بی‌نهایت) را با $B_0(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. در قسمت بعد نشان می‌دهیم که این فضا با نرم سوپرمم، یک فضای باناخ است. برای هر $j \in \mathbb{R}$، تابع

[1] - Hagler
[2] -Birkhoff

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

$$e_j(i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

بر اعداد حقیقی را تابع مشخصه (کرونکر) در نظر می‌گیریم. به وضوح چنین توابع مشخصهٔ عضو فضای $B_0(\mathbb{R})$ هستند.
اگر (X, d) یک فضای متریک و $C \subseteq X$، ناتهی باشد. قطرمجموعهٔ C را با $\operatorname{diam}(C)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{diam}(C) = \sup\{d(x, y): x, y \in C\}.$$

مجموعهٔ تمام عناصری از فضای $B_0(\mathbb{R})$ به‌طوری‌که از جایی به بعد برابر صفر باشند را با $B_{00}(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم؛ به عبارت دیگر:

$$B_{00}(\mathbb{R}) = \{f \in B_0(\mathbb{R}): \exists\, M\ \forall x > M, f(x) = 0\}.$$

اگر f تابعی از اعداد حقیقی به اعداد حقیقی باشد. برای راحتی کار به‌جای $\operatorname{diam}(\operatorname{Im} f)$، $\inf\{f(x): x \in \mathbb{R}\}$ و $\sup\{f(x): x \in \mathbb{R}\}$ به ترتیب از $\operatorname{diam}(f)$، $\inf(f)$ و $\sup(f)$ استفاده می‌کنیم.

۲. نرم قطری روی فضای $B_0(\mathbb{R})$

در این قسمت، ابتدا برخی از خصوصیات فضای $B_0(\mathbb{R})$ را بیان و نرم قطری را روی این فضا تعریف می‌کنیم و سپس معادل بودن نرم قطری با نرم سوپرمم را روی این فضا مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم۲-۱. اگر $f \in B_0(\mathbb{R})$ و φ تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد که $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ آن‌گاه $f \circ \varphi \in B_0(\mathbb{R})$.

اثبات: چون $f \in B_0(\mathbb{R})$ بنابراین $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ و درنتیجه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $M > 0$ وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $x > M$ داریم:

$$|f(x)| < \varepsilon. \qquad (۱)$$

از طرفی هم داریم $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ و درنتیجه برای $M > 0$ عدد $N_0 > 0$ وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $x > N_0$ داریم:

$$\varphi(x) > M,$$

بنابراین برای هر $x > N_0$ طبق نامساوی (۱) داریم:

$$|f \circ \varphi(x)| = |f(\varphi(x))| < \varepsilon.$$

درنتیجه $\lim_{x\to\infty} f \circ \varphi(x) = 0$. از طرفی f کراندار پس $f \circ \varphi$ نیزکراندار است. بنابراین $f \circ \varphi \in B_0(\mathbb{R})$. □

مجموعهٔ $\mathrm{B}_0(\mathbb{R})$ همراه با جمع توابع و ضرب اسکالر تشکیل یک فضای برداری روی اعداد حقیقی می‌دهد.

اگر $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$، طبق لم قبل برای هر $f \in B_0(\mathbb{R})$ و عدد طبیعی k داریم $f \circ \varphi^k \in \mathrm{B}_0(\mathbb{R})$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

اگر $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد و برای هر $f \in B_0(\mathbb{R})$، $f \circ \varphi \in B_0(\mathbb{R})$. در این‌صورت $\lim\limits_{x\to\infty} |\varphi(x)| = \infty$.
زیرا $f(x) = \frac{1}{1+|x|} \in B_0(\mathbb{R})$.

فضای $B_0(\mathbb{R})$ همراه با عمل ضرب نقطه وار و نرم سوپرمم جبر باناخ است.

در قضیهٔ بعد رابطه بین فضای $B_0(\mathbb{R})$ و $c_0(\mathbb{R})$ نشان داده می‌شود.

قضیهٔ ۲-۲. فضای $c_0(\mathbb{R})$ یک ایده‌آل در جبر $B_0(\mathbb{R})$ است.

اثبات: فرض کنید $f \in c_0(\mathbb{R})$. در این‌صورت این تابع کراندار است و $\lim\limits_{x\in\mathbb{R}} f = 0$. از این‌رو برای هر $\varepsilon > 0$ یک زیرمجموعهٔ متناهی $F \subseteq \mathbb{R}$ وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $x \in \mathbb{R}\backslash F$ داریم:

$$|f(x)| < \varepsilon. \tag{۲}$$

قرار می‌دهیم $M = \max F$. در این‌صورت برای هر $x > M$ داریم $x \in \mathbb{R}\backslash F$. بنابراین نامساوی (۲) برقرار است و این بدان معنی است که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. نشان می‌دهیم برای هر $f \in c_0(\mathbb{R})$ و $g \in B_0(\mathbb{R})$ ، $fg \in c_0(\mathbb{R})$.

چون $g \in B_0(\mathbb{R})$ پس g کراندار است و عدد حقیقی مثبت مانند K وجود دارد؛ به طوری‌که

$$|g(x)| \leq K. \tag{۳}$$

در این‌صورت چنان‌چه F زیرمجموعهٔ متناهی $\mathbb{R}$ باشد که (۲) برقرار است، برای هر $x \in \mathbb{R}\backslash F$ طبق نامساوی‌های (۲) و (۳) داریم:

$$|fg(x)| = K|f(x)| < K\varepsilon.$$

درنتیجه $\lim fg = 0$ و از این‌رو $fg \in c_0(\mathbb{R})$. بنابراین $c_0(\mathbb{R})$ ایده‌ال در $B_0(\mathbb{R})$ است. □

تعریف ۲-۳. برای $f \in B_0(\mathbb{R})$، قرار می‌دهیم $\|f\|_d = \sup(f) - \inf(f) = \operatorname{diam}(f)$ و به آن نرم قطری گوییم.

لم۲-۴. $\|\cdot\|_d$، یک نرم روی $B_0(\mathbb{R})$ است.

اثبات: اگر $f \in B_0(\mathbb{R})$ و $\|f\|_d = 0$ آن‌گاه داریم:

$$\|f\|_d = \sup(f) - \inf(f) = 0.$$

درنتیجه داریم $\sup(f) = \inf(f)$، پس f تابعی ثابت است و چون $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ بنابراین $f = 0$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

از طرفی برای هر عدد حقیقی مانند k و $f \in B_0(\mathbb{R})$ داریم:

$$\|kf\|_d = |k|\|f\|_d.$$

همچنین برای هر $g,f \in B_0(\mathbb{R})$ داریم:

$$\|f+g\|_d = \sup(f+g) - \inf(f+g)$$

$$\leq \sup(f) + \sup(g) - \inf(f) - \inf(g)$$

$$= \sup(f) - \inf(f) + \sup(g) - \inf(g) = \|f\|_d + \|g\|_d.$$

بنا بر روابط بالا، $\|\cdot\|_d$ یک نرم روی $B_0(\mathbb{R})$ است.

□

در ادامه نشان می‌دهیم که نرم سوپرمم و نرم قطری روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ معادل هستند و از طریق معادل بودن دو نرم نشان داده می‌شود که این فضا با نرم قطری، یک فضای باناخ است.

لم۲–۵. در فضای $B_0(\mathbb{R})$، $\|\cdot\|_d$ معادل $\|\cdot\|_\infty$ است.

اثبات: با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ نشان می‌دهیم $\inf(f) \leq 0 \leq \sup(f)$. برای هر $\varepsilon > 0$، عدد حقیقی مانند M وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $x > M$ داریم $|f(x)| < \varepsilon$، پس $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$ و بنابراین

$$\inf(f) < \varepsilon\,,\ -\varepsilon < \sup(f).$$

درنتیجه $\inf(f) \leq 0 \leq \sup(f)$. به کمک این نامساوی داریم

$$\inf(f) - \sup(f) \leq f(x) \leq \sup(f) - \inf(f)\,,$$

و این بدان معنی است که

$$|f(x)| \leq \sup(f) - \inf(f).$$

درنتیجه داریم:

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_d \leq 2\|f\|_\infty\,.$$

و این نامساوی نشان می‌دهد که نرم $\|\cdot\|_d$ معادل با نرم $\|\cdot\|_\infty$ است. □

قضیهٔ۲–۶. $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ است.

اثبات: کافی است نشان دهیم که $B_0(\mathbb{R})$ زیرمجموعهٔ بسته $l^\infty(\mathbb{R})$ است. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از اعضای $B_0(\mathbb{R})$ باشد که به تابع f در $l^\infty(\mathbb{R})$ همگراست. نشان می‌دهیم f عضو $B_0(\mathbb{R})$ است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

از آن‌جا که برای هر n، $f_n \in B_0(\mathbb{R})$. در این‌صورت $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$. پس برای هر $\varepsilon > 0$ عدد حقیقی مانند M_n وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $x > M_n$ داریم:

$$|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۴)$$

از طرفی $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی مانند N وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $n \geq N$ و هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۵)$$

در این‌صورت برای هر $\varepsilon > 0$ قرار می‌دهیم $M = M_N$. آنگاه برای هر $x > M$ نامساوی‌های (۴) و (۵) برقرار است، پس داریم:

$$|f(x)| = |f_N(x) - f_N(x) + f(x)|$$
$$\leq |f_N(x) - f(x)| + |f_N(x)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

درنتیجه $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. لذا $B_0(\mathbb{R})$ بسته است. پس این فضا با نرم سوپرمم یک فضای باناخ است. □

نتیجهٔ ۲-۷. $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|_d$ یک فضای باناخ است.

اثبات: بنا به لم ۲-۵، نرم قطری با نرم سوپرمم معادل است و طبق قضیهٔ قبل، این فضا با نرم سوپرمم فضای باناخ است. درنتیجه با نرم قطری هم یک فضای باناخ است. □

در قضیهٔ بعد، نشان می‌دهیم که زیرفضای $B_{00}(\mathbb{R})$ از $B_0(\mathbb{R})$ با نرم قطری در آن چگال است.

قضیهٔ ۲-۸. فضای $B_{00}(\mathbb{R})$ با نرم قطری در $B_0(\mathbb{R})$ چگال است.

اثبات: کافی است نشان دهیم مجموعهٔ $B_{00}(\mathbb{R})$ با نرم سوپرمم در $B_0(\mathbb{R})$ چگال است. عضوی از $B_0(\mathbb{R})$ مانند f را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم دنباله‌ای از اعضای $B_{00}(\mathbb{R})$ مانند (f_n) وجود دارد که به تابع f همگراست. با توجه به اینکه f عضو $B_0(\mathbb{R})$ است، پس $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. بنابراین داریم:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, M_n\ (x > M_n \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{n}).$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq M_n \\ 0 & x > M_n \end{cases}.$$

به‌وضوح f_n متعلق به $B_{00}(\mathbb{R})$ است. نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (نسبت به نرم سوپرمم). با توجه به این‌که

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}: (\frac{1}{n} < \varepsilon).$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

اگر $x > M_n$ در این‌صورت $|f_n(x) - f(x)| = |f(x)|$ و همچنین برای $x \leq M_n$ داریم:

$$|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

بنابراین:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

لذا؛ $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. پس $B_{00}(\mathbb{R})$ با نرم سوپرمم در $B_0(\mathbb{R})$ چگال است. بنا به لم ۲-۵، می‌توان نتیجه گرفت که $B_{00}(\mathbb{R})$ با نرم قطری نیز در $B_0(\mathbb{R})$ چگال است.

□

با توجه به این‌که $B_0(\mathbb{R})$ یک فضای باناخ با نرم قطری روی اعداد حقیقی است می‌توان برخی از اعضای عمود برهم در این فضا را مشخص کرد. به عنوان مثال، اگر $i \neq j$ آن‌گاه e_i بر e_j عمود است؛ زیرا $\|e_i\|_d = 1$ و برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(e_i + \lambda e_j)(x) = \begin{cases} 1 & x = i \\ \lambda & x = j \\ 0 & x \neq i\,, j \end{cases}.$$

اگر $\lambda \geq 1$ آن‌گاه $\|e_i\|_d \leq \|e_i + \lambda e_j\|_d = \lambda$. درصورتی‌که $0 \leq \lambda < 1$ داریم $\|e_i\|_d \leq \|e_i + \lambda e_j\|_d = 1$.
حال اگر $\lambda < 0$ آن‌گاه $\sup(e_i + \lambda e_j) = 1$ و $\inf(e_i + \lambda e_j) = \lambda$ که در این‌صورت

$$1 = \|e_i\|_d \leq \|e_i + \lambda e_j\|_d = 1 - \lambda.$$

فرض کنید $f \in B_0(\mathbb{R})$ و این تابع در نقطهٔ i پیوسته باشد. در این‌صورت f بر e_i عمود است؛ زیرا برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$،

$$(f + \lambda e_i)(x) = \begin{cases} f(i) + \lambda & x = i \\ f(x) & x \neq i \end{cases}.$$

اگر $x \neq i$، در این‌صورت $\inf(f + \lambda e_i) \leq f(x) \leq \sup(f + \lambda e_i)$، و با توجه به پیوستگی تابع f در i داریم:

$$\inf(f + \lambda e_i) \leq f(i) = \lim_{x\to i} f(x) \leq \sup(f + \lambda e_i).$$

بنابراین

$$\inf(f + \lambda e_i) \leq \inf(f) \leq \sup(f) \leq \sup(f + \lambda e_i).$$

درنتیجه $\|f\|_d \leq \|f + \lambda e_i\|_d$.

اگر $f \in B_0(\mathbb{R})$ و این تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد آن‌گاه f عمود بر هرکدام از بردارهای تولید شده توسط $\{e_i\}$ است؛ زیرا با فرض این‌که $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_K \in \mathbb{R}$ و $u = \alpha_1 e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} + \cdots + \alpha_k e_{i_k}$. برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$، داریم

$$(f + \lambda u)(x) = \begin{cases} f(x) + \lambda\, \alpha_r & x = i_r \quad (r = 1,2,\cdots,k) \\ f(x) & x \neq i_r \end{cases},$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

پس برای هر $x \neq i_r$

$$\inf(f+\lambda u) \leq f(x) \leq \sup(f+\lambda u)\,,$$

و بنا به پیوستگی f در هر عدد حقیقی

$$\inf(f+\lambda u) \leq f(i_r) = \lim_{x\to i_r} f(x) \leq \sup(f+\lambda u).$$

درنتیجه $\|f\|_d \leq \|f+\lambda u\|_d$.

در ادامه نرمی وابسته به نرم قطری و نرم سوپرمم روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این فضا با نرم تعریف شده یک جبر باناخ است.

تعریف۲-۹. برای $f \in B_0(\mathbb{R})$، قرار می‌دهیم $\|f\| = \|f\|_d + \|f\|_\infty$.

با توجه به نرم بودن $\|\cdot\|_\infty$ و $\|\cdot\|_d$، می‌توان نتیجه گرفت که $\|\cdot\|$یک نرم روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ است. همچنین داریم:

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\| \leq 3\|\cdot\|_\infty,$$

در این‌صورت$\|\cdot\|$ معادل نرم سوپرمم و نرم قطری روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ است.

نتیجهٔ ۲-۱۰. $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|$ یک فضای باناخ است.

اثبات: با توجه به اینکه $\|\cdot\|$ با نرم $\|\cdot\|_\infty$ معادل است؛ لذا $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|$ یک فضای باناخ است. □

لم۲-۱۱. $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|$یک جبر باناخ است.

اثبات: کافی است نشان دهیم برای هر $f, g \in B_0(\mathbb{R})$ ، $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$.

برای هر $x\,,y \in \mathbb{R}$ و $f\,,g \in B_0(\mathbb{R})$ داریم:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)| \\ &\leq \|f\|_\infty\|g\|_d+\|g\|_\infty\|f\|_d.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|fg\|_d \leq \|f\|_\infty\|g\|_d+\|g\|_\infty\|f\|_d\,.$$

از طرفی داریم:

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty,$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

پس

$$\|fg\|_d + \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty + \|f\|_\infty\|g\|_d + \|g\|_\infty\|f\|_d.$$

لذا $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ که از این می‌توان نتیجه گرفت که $B_0(\mathbb{R})$ با نرم $\|\cdot\|$ یک جبر باناخ است. □

اگر فرض کنیم $f \in B_0(\mathbb{R})$ و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \geq 0$ (یا برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \leq 0$). در این‌صورت، $\inf(f) = 0$ ($\sup(f) = 0$)، و بنابراین داریم:

$$\|f\|_d = \sup(f) - \inf(f) = \sup f(f) = \|f\|_\infty,$$

یا

$$\|f\|_d = \sup(f) - \inf(f) = -\inf(f) = \|f\|_\infty.$$

تساوی‌های بالا، نشان می‌دهد که در حالت خاص نرم قطری با نرم سوپرمم برابر است و همچنین $\|f\| = 2\|f\|_\infty$.

۳. عملگرهای طولپا روی فضای $B_0(\mathbb{R})$

در این قسمت، ابتدا تعریف عملگر طولپا نسبت به نرم قطری بر $B_0(\mathbb{R})$ را بیان کرده و شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن شرایط، یک عملگر خطی بر $B_0(\mathbb{R})$، طولپا باشد. در ادامه بررسی می‌کنیم که طولپا بودن عملگر خطی روی فضای $B_0(\mathbb{R})$ چه نتایجی را دربردارد.

تعریف ۳-۱. عملگر خطی $T: B_0(\mathbb{R}) \longrightarrow B_0(\mathbb{R})$ را یک عملگر طولپا تحت نرم قطری نامیم، هرگاه:

$$\|Tf\|_d = \|f\|_d.$$

قضیهٔ ۳-۲. اگر $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$، آنگاه عملگر

$$T: B_0(\mathbb{R}) \longrightarrow B_0(\mathbb{R}) \ \ , T(f) = f \circ \varphi,$$

طولپا تحت نرم قطری است اگر و فقط اگر φ تابعی پوشا باشد.

اثبات: چون $f \in B_0(\mathbb{R})$، با توجه به لم ۲-۱، داریم $T(f) \in B_0(\mathbb{R})$. از طرفی اگر $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پوشا باشد آن‌گاه $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ و درنتیجه $f\big(\varphi(\mathbb{R})\big) = f(\mathbb{R})$. بنابراین:

$$\sup(f \circ \varphi) = \sup(f)\ ,\ \inf(f \circ \varphi) = \inf(f).$$

درنتیجه $\|Tf\|_d = \|f\|_d$. بنابراین T یک عملگر طولپا است.

حال فرض کنیم عملگر T طولپا باشد، نشان می‌دهیم که φ تابعی پوشاست. فرض کنیم چنین نباشد. بنابراین عدد حقیقی مانند b وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\varphi(x) \neq b$. پس $Te_b(x) = e_b\big(\varphi(x)\big) = 0$ اما $e_b \in B_0(\mathbb{R})$ و $\|Te_b\|_d = 0 \neq \|e_b\|_d = 1$، که متناقض با طولپا بودن T است؛ لذا φ پوشاست. □

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

نتیجهٔ ۳-۳. اگر $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پوشا باشد که $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$، آن‌گاه برای هر $k \geq 1$ عملگرخطی $T_k(f) = f \circ \varphi^k$، یک عملگر طولپا از $B_0(\mathbb{R})$ به خودش با نرم قطری است.

اثبات: چون $f \in B_0(\mathbb{R})$ طبق لم ۲-۱، $f \circ \varphi \in B_0(\mathbb{R})$، و به همین ترتیب $f \circ \varphi^{k-1} \in B_0(\mathbb{R})$ برای هر $k \geq 2$ از طرفی هم $T_k(f) = f \circ \varphi^k = f \circ \varphi^{k-1} \circ \varphi$ پس طبق قضیهٔ قبل

$$\|T_k(f)\|_d = \left\|f \circ \varphi^{k-1}\right\|_d = \|T_{k-1}(f)\|_d.$$

به همین ترتیب داریم $\|T_k(f)\|_d = \|T(f)\|_d = \|f\|_d$. بنابراین T_k یک عملگر طولپا از $B_0(\mathbb{R})$ به خودش با نرم قطری است. □

مثال ۳-۴. برای هر $z \in \mathbb{R}$، عملگر T_z بر $B_0(\mathbb{R})$ را با ضابطه $T_z f(x) = f(x - z)$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت، T_z عملگر طولپا تحت نرم قطری است؛ زیرا $\varphi(x) = x - z$ تابعی پوشا از $\mathbb{R}$ به خودش است و $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. بنابراین طبق قضیه ۳-۲، T_z یک عملگر طولپاست.

مثال ۳-۵. برای هر $z \in \mathbb{R}$ $z > 0$، عملگر T بر $B_0(\mathbb{R})$ با ضابطه $Tf(x) = f(zx)$ تعریف می‌شود، یک عملگر طولپا تحت نرم قطری است. به دلیل اینکه $\varphi(x) = zx$ تابعی پوشا از $\mathbb{R}$ به خودش است و $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. بنابراین طبق قضیهٔ ۳-۲ عملگر خطی T طولپاست.

تذکر ۳-۶. برای هر چند جمله‌ای $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ که n عددی طبیعی فرد است. عملگر $T_n f(x) = f(P_n(x))$ بر $B_0(\mathbb{R})$، یک عملگر طولپا تحت نرم قطری است؛ زیرا $\lim_{x\to\infty} P_n(x) = \infty$، و به دلیل فرد بودن n، معادله $P_n(x) = b$ برای هر $b \in \mathbb{R}$، دارای جواب است. از این‌رو تابع φ که $\varphi(x) = P_n(x)$ پوشاست و بنا بر قضیه ۳-۲ عملگر T_n طولپاست.

اگر $T\colon B_0(\mathbb{R}) \longrightarrow B_0(\mathbb{R})$ یک عملگرخطی طولپا باشد. در این‌صورت f بر g در فضای $B_0(\mathbb{R})$ با نرم قطری عمود است اگر وتنها اگر Tf بر Tg عمودباشد؛ زیرا برای هر عدد حقیقی λ

$$\|Tf\|_d = \|f\|_d \leq \|f + \lambda g\|_d = \|T(f + \lambda g)\|_d = \|Tf + \lambda Tg\|_d.$$

قضیهٔ ۳-۷. اگر T یک عملگر خطی طولپا از $B_0(\mathbb{R})$ به خودش و i_0، یک عدد حقیقی باشد. آن‌گاه داریم:

$$-1 \leq \sum_{j\in \mathrm{I}^-} Te_j(i_0) \leq 0 \leq \sum_{j\in \mathrm{I}^+} Te_j(i_0) \leq 1.$$

که در این‌جا $\mathrm{I}^+ = \{j \in \mathbb{R}\colon Te_j(i_0) > 0\}$ و $\mathrm{I}^- = \{j \in \mathbb{R}\colon Te_j(i_0) < 0\}$.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم $0 \leq \sum_{j\in \mathrm{I}^+} Te_j(i_0) \leq 1$. کافی است برای هر مجموعهٔ متناهی مانند $F \subseteq \mathrm{I}^+$ نشان دهیم که $0 \leq \sum_{j\in F} Te_j(i_0) \leq 1$. چون F یک مجموعهٔ متناهی است، تابع f را به‌صورت $f = \sum_{j\in F} e_j$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $\|f\|_d = 1$ و چون T یک عملگر طولپاست، پس $\|Tf\|_d = 1$. از طرفی $Tf(i_0) \geq 0$. زیرا

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

برای هر $j \in \mathrm{I}^+$، $Te_j(i_0) \geq 0$. ادعا می‌کنیم که $Tf(i_0) \leq 1$. اگر چنین نباشد پس $Tf(i_0) > 1$. در این‌صورت از اینکه $Tf \in B_0(\mathbb{R})$ نتیجه می‌گیریم $\inf(Tf) \leq 0$. بنابراین

$$1 = \|Tf\|_d = \sup(Tf) - \inf(Tf) \geq Tf(i_0) - 0 > 1,$$

که یک تناقض است؛ لذا $0 \leq Tf(i_0) \leq 1$، و چون این نامساوی برای هر زیرمجموعهٔ متناهی از I^+ درست است پس $0 \leq \sum_{j\in \mathrm{I}^+} Te_j(i_0) \leq 1$. برای حالتی که $-1 \leq \sum_{j\in \mathrm{I}^-} Te_j(i_0) \leq 0$ روند اثبات مشابه حالت اول است. □

قضیهٔ ۳-۸. اگر $T: B_0(\mathbb{R}) \longrightarrow B_0(\mathbb{R})$ یک عملگر خطی طولپا، j_0 یک عدد حقیقی باشد و $\lambda = \sup(Te_{j_0})$. آنگاه: $\lambda = \lim_{j\in\mathbb{R}} \lambda_j$ و $\lambda - 1 = \lim_{j\in\mathbb{R}} \eta_j$، که در اینجا $\lambda_j = \sup(T(e_{j_0} + e_j))$ و $\eta_j = \inf(T(e_{j_0} + e_j))$.

اثبات: چون $\lim_{i\to\infty} Te_{j_0}(i) = 0$، داریم $\inf(Te_{j_0}) \leq 0 \leq \sup(Te_{j_0})$ و درنتیجه

$$1 = \|e_{j_0}\|_d = \|Te_{j_0}\|_d = \sup(Te_{j_0}) - \inf(Te_{j_0}) \geq \sup(Te_{j_0}) = \lambda. \quad (۶)$$

بنابراین داریم $0 \leq \lambda \leq 1$. بدون کاستن از کلیت مطلب می‌توان فرض کرد $0 < \lambda \leq 1$ (اگر $\lambda = 0$ به‌جای T می‌توان $-T$ را در نظر گرفت)، پس $\lambda = \sup(Te_{j_0}) > 0$. فرض‌کنید $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{2}$. در این‌صورت $i_1 \in \mathbb{R}$ وجود دارد؛ به طوری‌که

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < Te_{j_0}(i_1) \leq \lambda. \quad (۷)$$

از طرفی بنا به رابطهٔ (۶) داریم $\inf(Te_{j_0}) = \lambda - 1$. بنابراین $i_2 \in \mathbb{R}$ وجود دارد؛ به طوری‌که

$$\lambda - 1 \leq Te_{j_0}(i_2) < \lambda - 1 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۸)$$

با توجه به اینکه $\lim_{i\to\infty} Te_{j_0}(i) = 0$، یک عدد حقیقی مانند M وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $i > M$ داریم:

$$|Te_{j_0}(i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

چون

$$Te_{j_0}(i_1) > \lambda - \frac{\varepsilon}{2} > 2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{2}\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۹)$$

بنابراین $i_1 \leq M$. بدون کاستن از کلیت مطلب، می‌توان فرض کرد $i_2 \leq M$. قرار می‌دهیم $F = \{i_1 , i_2\}$. ادعا می‌کنیم یک مجموعهٔ متناهی مانند G وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $j \in \mathbb{R} \setminus G$ و $i \in F$ داریم:

$$|Te_j(i)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۱۰)$$

زیرا در غیر این صورت برای هر عدد حقیقی مانند r، برای مجموعهٔ متناهی $G_0 = \{r\}$ یک عدد حقیقی مانند $r_1 \neq r$ وجود دارد؛ به‌طوری‌که $|Te_{r_1}(i_2)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ یا $|Te_{r_1}(i_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. به همین ترتیب با در نظر گرفتن مجموعهٔ متناهی $G_1 = \{r, r_1\}$ عدد حقیقی $r_2 \neq r, r_1$ وجود داردکه $|Te_{r_2}(i_2)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ یا $|Te_{r_2}(i_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

با ادامهٔ همین روند می‌توان مجموعهٔ متناهی مانند H و عدد طبیعی مانند n به گونه‌ی پیدا کرد که $n\frac{\varepsilon}{2} > 1$ و $n\frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{j\in H} Te_j(i)$ یا $-n\frac{\varepsilon}{2} \ge \sum_{j\in H} Te_j(i)$ که $i = i_1$ یا $i = i_2$.

بنابراین $1 < \sum_{j\in H} Te_j(i) \le \sum_{j\in \mathrm{I}^+} Te_j(i)$ یا $-1 > \sum_{j\in H} Te_j(i) \ge \sum_{j\in \mathrm{I}^-} Te_j(i)$ که این با توجه به قضیه ۳-۷ یک تناقض است؛ زیرا در فرض قضیه به‌جای i_0 می‌توان i را در نظر گرفت. برای هر $j \in \mathbb{R}\setminus G$ طبق نامساوی‌های (۸) و (۱۰) داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \le Te_{j_0}(i_2) + Te_j(i_2) \le \lambda - 1 + \varepsilon. \tag{۱۱}$$

همچنین طبق نامساوی‌های (۷) و (۱۰) داریم:

$$\lambda - \varepsilon \le Te_{j_0}(i_1) + Te_j(i_1) \le \lambda + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{۱۲}$$

از طرفی $\frac{1}{2} \le \varepsilon$، پس $\lambda - 1 + \varepsilon \le \lambda - \varepsilon$. درنتیجه به کمک نامساوی‌های (۱۱) و (۱۲) برای هر $j \in \mathbb{R}\setminus G$ داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \le Te_{j_0}(i_2) + Te_j(i_2) \le Te_{j_0}(i_1) + Te_j(i_1) \le \lambda + \varepsilon,$$

پس برای هر $j \in \mathbb{R}\setminus G$ و $i \in F$ داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \le Te_{j_0}(i) + Te_j(i) \le \lambda + \varepsilon. \tag{۱۳}$$

حال ادعا می‌کنیم برای هر $j \in \mathbb{R}\setminus G$ این نامساوی برای هر عدد حقیقی درست است. فرض کنید عدد حقیقی مانند i موجود باشد که این نامساوی برای آن برقرار نباشد. بنابراین

$$Te_{j_0}(i) + Te_j(i) > \lambda + \varepsilon, \tag{۱۴}$$

یا

$$Te_{j_0}(i) + Te_j(i) < \lambda - 1 - \varepsilon. \tag{۱۵}$$

اگر نامساوی (۱۴) برقرار باشد بنا به نامساوی (۱۱) داریم:

$$Te_{j_0}(i_2) + Te_j(i_2) \le \lambda - 1 + \varepsilon.$$

از طرفی با توجه به نامساوی (۹)، $j_0 \notin \mathbb{R}\setminus G$ پس $j_0 \neq j$. در نتیجه

$$1 = \left\|e_{j_0} + e_j\right\|_d = \left\|Te_{j_0} + Te_j\right\|_d = \sup\left(Te_{j_0} + Te_j\right) - \inf\left(Te_{j_0} + Te_j\right)$$

$$> \lambda + \varepsilon - (\lambda - 1 + \varepsilon) = 1,$$

که این یک تناقض است.

اگر نامساوی (۱۵) برقرار باشد، بنا به نامساوی (۱۲) داریم:

$$\lambda - \varepsilon \le Te_{j_0}(i_1) + Te_j(i_1),$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]

پس طبق این نامساوی و نامساوی (۱۵) داریم:

$$1 = \left\|Te_{j_0} + Te_j\right\|_d = \sup\left(Te_{j_0} + Te_j\right) - \inf(Te_{j_0} + Te_j)$$
$$> \lambda - \varepsilon - (\lambda - 1 - \varepsilon) = 1,$$

که یک تناقض است. درنتیجه نامساوی (۱۳) برای هر عدد حقیقی درست است. از این‌رو، داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq Te_{j_0}(i) + Te_j(i) \leq \lambda + \varepsilon,$$

آن‌گاه:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq T\left(e_{j_0} + e_j\right)(i) \leq \lambda + \varepsilon.$$

در این‌صورت داریم:

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq \inf(T\left(e_{j_0} + e_j\right)) \leq \sup(T\left(e_{j_0} + e_j\right)) \leq \lambda + \varepsilon.$$

اما طبق (۱۲) داریم $\sup\left(T\left(e_{j_0} + e_j\right)\right) \geq \lambda - \varepsilon$. در نتیجه

$$\lambda - \varepsilon \leq \lambda_j = \sup\left(T\left(e_{j_0} + e_j\right)\right) \leq \lambda + \varepsilon.$$

و طبق (۱۱) داریم $\inf\left(T\left(e_{j_0} + e_j\right)\right) \leq \lambda - 1 + \varepsilon$. در نتیجه

$$\lambda - 1 - \varepsilon \leq \eta_j = \inf\left(T\left(e_{j_0} + e_j\right)\right) \leq \lambda - 1 + \varepsilon.$$

بنابراین برای هر $\frac{\lambda}{2} > \varepsilon > 0$ یک مجموعهٔ متناهی مانند G وجود دارد؛ به طوری‌که برای هر $j \in \mathbb{R} \setminus G$، $\left|\lambda_j - \lambda\right| \leq \varepsilon$ و $\left|\eta_j - (\lambda - 1)\right| \leq \varepsilon$. درنتیجه $\lambda = \lim_{j\in\mathbb{R}} \lambda_j$ و $\lambda - 1 = \lim_{j\in\mathbb{R}} \eta_j$. ☐

در پایان، این موضوع را مطرح می‌کنیم که اگر عملگر خطی $T: B_0(\mathbb{R}) \longrightarrow B_0(\mathbb{R})$ طولپا تحت نرم قطری باشد، آیا نظیر این عملگر، تابعی مانند $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد؟ به طوری‌که $Tf = \alpha f \circ \varphi$، که $|\alpha| = 1$.

References

1. Bayati Eshkaftaki A., "D-Norm and isometries on c_0 spaces", Oper. Mat, 41 (2017) 2340-2358.

2. Birkhoff G., "Orthogonality in linear metric spaces", Duke Math. J, 1 (1935) 169–172.

3. Hagler J., "A counterexample to several questions about Banach spaces", Studia Mathematica, 3 (1977) 289–308.

4. Ljubenovic M., Djordjevic D.S., "Linear preservers of weak majorization on $\ell^1(I)^+$ when I is an infinite set", Linear Algebra Appl, 517 (2017) 177-198.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-10-02]