

## چند جمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته کسری در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری با تأخیر زمانی

زهرا باریک بین<sup>۱\*</sup>، احسان‌الله همتی<sup>۲</sup>، سلمه صداقت<sup>۳</sup>  
۱. دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، گروه ریاضی کاربردی  
۲. دانشگاه شیخ زاید دانشکده تعلیم و تربیه خوست افغانستان  
۳. دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی  
بوئین زهرا

دریافت ۹۸/۱۲/۲۵

پذیرش ۹۹/۱۲/۲۳

### چکیده

در این مقاله ماتریس‌های شبه عملیاتی مشتق صحیح و کسری برای توابع لژاندر بهبود یافته کسری برای اولین بار معرفی می‌شوند. این ماتریس‌های عملیاتی به همراه روش هم محلی گاوس- لژاندر برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری با تأخیر زمانی به کار برده می‌شوند. معادلات مورد بررسی به کمک ماتریس‌های عملیاتی و شبه عملیاتی به دستگاه معادلات جبری با ضرایب مجهول بسط لژاندر بهبود یافته کسری تبدیل می‌شوند. در پایان کارایی روش با در نظر گرفتن چند مثال عددی نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توابع لژاندر بهبود یافته کسری، ماتریس شبه عملیاتی مشتق، معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری، روش هم محلی.

### مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری کاربردهای فراوانی در اقتصاد [۱]، داروسازی [۲]، پردازش سیگنال [۳]، الکترومغناطیس [۴]، الکترو شیمی [۵]، دینامیک [۶]، کوانتوم و مکانیک آماری [۷]، مکانیک جامد [۸]، و مدل ترافیک سیال [۹] دارد. در حالت کلی، جواب دقیق اغلب معادلات دیفرانسیل کسری در دست نیست، بنابراین توسعه روش‌های عددی برای حل این معادلات اهمیت ویژه‌ای دارد، در سال‌های اخیر روش‌های عددی فراوانی برای حل این معادلات ارائه شده است، از قبیل؛ بسط بردارهای ویژه [۱۰]، روش اختلال هموتوبی [۱۱]، روش تکرار وردشی [۱۲]، [۱۳]، روش تجزیه آدومیان [۱۴]، روش تفاضلات متناهی [۱۵]، روش هم محلی مرکب [۱۶]، روش هم محلی لژاندر [۱۷]، روش انتقال چبیشف طیفی تاو [۱۸]، چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۱۹]، موجک لژاندر [۲۰]، روش موجک چلیشکوف [۲۱] و بسیاری از روش‌های دیگر.

در تشریح ریاضی فرایندهای فیزیکی، یک فرض کلی سازگار برای رده‌ی بزرگی از سیستم‌های دینامیکی، در نظر گرفتن وابستگی رفتار سیستم تنها به شرایط کنونی است، اما سیستم‌هایی هم وجود دارند که در بررسی رفتار آنها، این شرط کافی نیست و پیش رفتن با این شرط، در تجزیه رفتار سیستم موجب عملکرد ضعیف آن می‌شود. در تحلیل رفتار این سیستم‌ها لازم است اطلاعاتی از وضعیت قبلی آنها داشته باشیم، این گونه از سیستم‌ها را سیستم‌های ت

تأخیری می‌نامند. سیستم‌های تأخیری در طراحی مسائل مختلف مهندسی و علوم مانند زیست‌شناسی، اقتصاد، داروسازی، کنترل و الکتروپدینامیک [۲۲]-[۲۴] کاربرد دارند. از آن جاکه بیش‌تر معادلات به‌کار رفته در سیستم‌های مذکور از نوع کسری هستند، از این‌رو، با دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل تحت عنوان معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری مواجه می‌شویم.

در سال‌های اخیر، روش‌های عددی زیادی برای حل این نوع معادلات از مرتبه صحیح ارائه شده است، مانند: روش‌های طیفی [۲۵]، چندجمله‌ای‌های برنولی [۲۶]، روش تکرار وردشی [۲۷]، روش  $\theta$  [۲۸]، روش تجزیه آدومین [۲۹]، سری‌های تیلور و توابع ترکیبی [۳۰]، موجک لژاندر [۳۱] و بسیاری از روش‌های دیگر. اما روش‌های عددی کمی برای حل این معادلات از مرتبه کسری وجود دارد که از آن میان می‌توانیم به روش موجک هرمیتی [۳۲]، روش شبه طیفی چیشف [۳۳]، روش هم‌محلی طیفی [۳۴]، روش اختلال هموتویی [۳۵]، روش درونیایی لژاندر [۳۶]، روش آدامز-بشفورت-مولتن و روش درونیایی خطی [۳۷]، روش موجک برنولی [۳۸]، روش موجک چیشف [۳۹]، روش تفاضلات متناهی [۴۰] و روش موجک چلیشکوف [۴۱] اشاره کنیم.

توابع متعامد ابزاری بسیار سودمند در حل مسائل سیستم‌های دینامیکی هستند. مهم‌ترین مزیت آنها، توانایی ماتریس‌های عملیاتی به‌دست آمده از آنها در تبدیل سیستم‌های دینامیکی به سیستم معادلات جبری است. در این بین چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به بازه  $[0, 1]$  از نظر محاسباتی مؤثرتر هستند [۴۳]، [۴۲]. چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته یک خانواده تعمیم یافته از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند. در [۴۴] ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصل ضرب برای چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته به‌دست آمده است و برای حل دسته‌ای از معادلات انتگرال به کار برده شده است. در [۴۵] ماتریس عملیاتی انتگرال کسری و حاصل ضرب این توابع به‌دست آمده و در حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی به‌کار برده شده است. رحیم خانی و اردو خانی در [۴۶] چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته کسری را برای اولین بار تعریف کرده، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری آن را به‌دست آورده و برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری غیرخطی به‌کار برده‌اند. ما در این مقاله برای اولین بار ماتریس‌های شبه عملیاتی مشتق از مرتبه صحیح و کسری را برای چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته کسری به‌دست آورده سپس به حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با تأخیر زمانی می‌پردازیم.

معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با تأخیر زمانی از نوع پانتوگراف و ثابت (۱) و (۲) را در نظر می‌گیریم:

$$D_t^\nu u(x, t) = H \left( u(\rho_0 x, \varepsilon_0 t), \frac{\partial}{\partial x} u(\rho_1 x, \varepsilon_1 t), \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\rho_2 x, \varepsilon_2 t), \dots, \frac{\partial^l}{\partial x^l} u(\rho_l x, \varepsilon_l t) \right), \quad (1)$$

$$D_t^\nu u(x, t) = H \left( u(x, t), \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \dots, \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(x, t), u(x - s_0, t - s'_0), \dots, u(x - s_r, t - s'_r) \right), \quad (2)$$

$$l - 1 < \nu \leq l, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1],$$

با شرایط

$$u(x, t) = f(x, t), \quad x \in [-s_0, 0], \quad t \in [-s'_0, 0]$$

$$u(0, t) = h_0(t), \quad u(1, t) = h_1(t), \quad 0 < t \leq 1,$$

که مشتق کسری  $D^\nu$  در مفهوم مشتق کاپوتو است،  $0 < s'_0 < \dots < s'_r$  و  $0 < s_0 < \dots < s_r$  پارامترهای تأخیر،  $\rho_j, \varepsilon_j \in [0, 1]$  و  $H$  یک تابع تحلیلی است. علاوه بر آن فرض کنیم توابع  $f$ ،  $h_0$  و  $h_1$  به‌گونه‌ای

تعریف شده‌اند که مسئله جواب یکتا دارد.

مطالب مقاله حاضر در ۶ بخش تنظیم شده است. در بخش ۲، تعاریف مورد نیاز در این مقاله مانند مشتق و انتگرال کسری، چندجمله‌ای‌های لژاندر، چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته و چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته کسری آورده شده است. در بخش ۳ ماتریس شبه عملیاتی مشتق صحیح برای توابع لژاندر بهبود یافته کسری به دست آمده است. در بخش ۴ دو نوع ماتریس شبه عملیاتی مشتق کسری برای توابع لژاندر بهبود یافته کسری معرفی شده است. بیان روش پیشنهادی برای حل مسائل از نوع (۱) و (۲) و دقت و کارایی روش با بیان نتایج عددی در بخش ۵ ارائه شده و بخش ۶ به نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

## تعاریف اولیه

### ۱. مشتق و انتگرال کسری

تعریف ۱. فرض کنیم  $f \in C_1^m[0, \infty)$ ؛ مشتق کسری کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۷]:

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt,$$

$$m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x > 0,$$

که  $\alpha$  مرتبه مشتق است.

ویژگی‌های زیر برای مشتق کسری کاپوتو اثبات می‌شود [۴۷]:

$${}_0^c D_x^\alpha ({}_0^c D_x^\beta f(x)) = {}_0^c D_x^{\alpha+\beta} f(x),$$

$${}_0^c D_x^\alpha \lambda = 0,$$

که در این جا  $\lambda$  یک مقدار ثابت است.

$${}_0^c D_x^\alpha x^\gamma = \begin{cases} 0, & \gamma \in \mathbb{N}_0, \gamma < \alpha, \\ \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} t^{\gamma-\alpha}, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (3)$$

که  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  است.

$${}_0^c D_x^\alpha \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x) \right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j {}_0^c D_x^\alpha f_j(x), \quad (4)$$

که  $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$  ثابت هستند [۴۷].

تعریف ۲. فرض کنیم  $f \in C_\alpha$ ؛ آن‌گاه برای هر  $x > 0$  انتگرال‌گیری کسری ریمان - لیوویل تابع  $f$  از مرتبه کسری  $\alpha$  بدین صورت تعریف می‌شود:

$$I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (5)$$

اگر  $f(x) = x^\nu$  و  $\nu > 1$  آن‌گاه داریم:

$$I_x^\alpha x^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} x^{\nu+\alpha}, \quad \alpha, x > 0, \quad (6)$$

در حالت خاص اگر  $\nu > 0$  باشد، آن‌گاه انتگرال کسری از مرتبه  $\alpha$  تابع ثابت  $f(x) = k$  بدین صورت است [۴۷]:

$$I_x^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

## ۲. چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای لژاندر از درجه  $n$  در  $[-1, 1]$  که با  $P_n$  نمایش داده می‌شوند، جواب مسئله‌ای اشتورم - لیوویل

زیر هستند:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

می‌توان چندجمله‌ای‌های لژاندر را با فرمول صریح (۸) تعریف کرد:

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \frac{(2n-2r)! x^{n-2r}}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}, \quad (8)$$

که در این جا  $m$  جز صحیح  $\frac{n}{2}$  است و باید توجه داشت که  $P_n(1) = 1$  و  $P_n(-1) = (-1)^n$  تعریف شده است.

## ۳. چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته

چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته روی بازه‌ای  $[0, 1]$  به وسیله تغییر متغیر  $x = 2v - 1$  از چندجمله‌ای‌های لژاندر

به دست می‌آیند. چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به وسیله  $l_n(v)$  نشان داده می‌شوند و شکل تحلیلی چندجمله‌ای

لژاندر انتقال یافته درجه  $n$ ، بدین صورت است:

$$l_n(v) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \frac{(n+i)!}{(n-i)!} \times \frac{v^i}{(i!)^2}, \quad (9)$$

توجه کنید که با تغییر متغیر  $v = t^u$  و  $u > 0$  روی چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته، چندجمله‌ای‌های لژاندر کسری به دست می‌آید [۴۸].

## ۴. چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته

فرض کنید  $m$  یک عدد صحیح غیرمنفی باشد. مجموعه  $P_m = \{p_{m,i}\}_{i=0}^m$  از چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته از

درجه  $m$  در  $[0, 1]$  بدین صورت معرفی می‌شوند [۴۹]:

$$i = 0, 1, \dots, m.$$

$$p_{m,i}(x) = \sum_{r=0}^{m-i} (-1)^r \binom{m-i}{r} \binom{m+i+r+1}{m-i} x^{i+r} = \sum_{r=i}^m (-1)^{r-i} \binom{m-i}{r-i} \binom{m+r+1}{m-i} x^r, \quad (10)$$

این چندجمله‌ای‌ها با توجه به تابع وزن  $w(x) = 1$  در بازه‌ای  $[0, 1]$  متعامد هستند و خاصیت متعامد بودن شان بدین صورت است:

$$\int_0^1 p_{m,k}(x) p_{m,l}(x) dx = \frac{1}{k+l+1} \delta_{k,l}, \quad k, l = 0, 1, \dots, m, \quad (11)$$

در این جا  $\delta_{k,l}$  تابع دلتا کرونکر است. لازم به ذکر است که برخلاف چندجمله‌ای‌های متعامد معمولی چندجمله‌ای‌های

عضو  $P_m$  همگی از درجه  $m$  هستند. با استفاده از معادله (۱۱) می‌توان فرمول رودریگز را بدین صورت به دست آورد:

$$p_{m,i}(x) = \frac{1}{(m-i)!} \frac{1}{x^{i+1}} \frac{d^{m-i}}{dx^{m-i}} \left( x^{m+i+1} (1-x)^{m-i} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (12)$$

از رابطه بالا نتیجه (۱۳) به دست می‌آید:

$$\int_0^1 p_{m,i}(x) dx = \frac{1}{m+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (13)$$

## ۵. چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته کسری

حال یک پایه کسری را بر اساس چندجمله‌ای‌های بهبود یافته لژاندر برای به دست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با تأخیر زمانی تعریف می‌کنیم [۴۶]. توابع بهبود یافته لژاندر کسری با تغییر متغیر  $x = x^\alpha$  و  $\alpha > 0$  روی چندجمله‌ای‌های لژاندر بهبود یافته به دست می‌آید.  $p_{m,i}(x^\alpha)$  را با نماد  $p_{m,i}^\alpha(x)$  نشان می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$p_{m,i}^\alpha(x) = \sum_{r=0}^{m-i} (-1)^k \binom{m-i}{r} \binom{m+i+r+1}{m-i} x^{(i+r)\alpha} = \sum_{k=i}^m (-1)^{r-i} \binom{m-i}{r-i} \binom{m+r+1}{m-i} x^{r\alpha}, \quad i=0,1,\dots,m. \quad (14)$$

چندجمله‌ای‌های بهبود یافته لژاندر کسری با توجه به تابع وزن  $w^\alpha(x) = x^{\alpha-1}$  در بازه‌ی  $[0,1]$  متعامد هستند و خاصیت متعامد بودن‌شان بدین صورت است:

$$\int_0^1 p_{m,k}^\alpha(x) p_{m,l}^\alpha(x) x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{(k+l+1)\alpha} \delta_{k,l}, \quad k,l=0,1,\dots,m. \quad (15)$$

## ۶. تقریب توابع

فرض کنید تابع  $u$  روی بازه  $[0,1]$  تعریف شده باشد و به صورت (۱۶) بر حسب توابع بهبود یافته لژاندر کسری تقریب زده شده باشد:

$$u(x) \cong \sum_{i=0}^N c_i p_{N,i}^\alpha(x) = C^T P^\alpha(x), \quad (16)$$

که در آن ضرایب  $c_i$  به صورت (۱۷) به دست می‌آید:

$$c_i = \alpha(2i+1) \int_0^1 u(x) p_{N,i}^\alpha(x) x^{\alpha-1} dx, \quad (17)$$

و

$$C = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_N]^T, \quad (18)$$

$$P^\alpha(x) = [p_{N,0}^\alpha(x), p_{N,1}^\alpha(x), \dots, p_{N,N}^\alpha(x)]^T. \quad (19)$$

به طور مشابه می‌توان بسط تابع دو متغیره  $u$  تعریف شده در  $[0,1] \times [0,1]$  را بر حسب توابع بهبود یافته لژاندر کسری زیر در نظر گرفت:

$$u(x,t) \cong \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} p_{N,i}^\alpha(x) p_{M,j}^\beta(t) = P^\alpha(x)^T U P^\beta(t), \quad \alpha, \beta > 0, \quad (20)$$

که  $P^\alpha(x)$  و  $P^\beta(t)$  به ترتیب با بعد  $(N+1)$  و  $(M+1)$  بردارهای توابع بهبود یافته لژاندر کسری هستند و  $U = [u_{ij}]_{(N+1) \times (M+1)}$  یک ماتریس با درایه‌های زیر است:

$$u_{ij} = \alpha\beta(2i+1)(2j+1) \int_0^1 \int_0^1 p_{N,i}^\alpha(x) p_{M,j}^\beta(t) u(x,t) w^\alpha(x) w^\beta(t) dx dt. \quad (21)$$

## ماتریس شبه عملیاتی مشتق صحیح برای توابع لژاندر بهبود یافته کسری

تعریف ۳. مشتق مرتبه صحیح بردار  $P^\alpha(x)$  نسبت به  $x$  را می‌توان بدین صورت نمایش داد.

$$(P^\alpha(x))' = x^{-1} D P^\alpha(x),$$

که  $D$  را ماتریس شبه عملیاتی مشتق صحیح می‌نامیم. برای یافتن ماتریس شبه عملیاتی مشتق ابتدا بردار توابع تیلور کسری را بدین صورت در نظر می‌گیریم.

$$T_\alpha(x) = [1, x^\alpha, x^{2\alpha}, \dots, x^{N\alpha}]^T.$$

حال توابع لژاندر بهبودیافته کسری را بدین صورت نمایش می‌دهیم:

$$P^\alpha(x) = FT_\alpha(x),$$

که  $F$  یک ماتریس  $(N+1) \times (N+1)$  که درایه  $(i, j)$  ام آن بدین صورت است:

$$f_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i} (j+N+1)!}{(j-i)!(i+j+1)!(N-j)!} & j \geq i, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, N,$$

زیرا داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N f_{ij} (T_\alpha(x))_j &= \sum_{j=i}^N \frac{(-1)^{j-i} (j+N+1)!}{(j-i)!(i+j+1)!(N-j)!} x^{j\alpha} \\ &= \sum_{j=i}^N (-1)^{j-i} \binom{N-i}{j-i} \binom{N+j+1}{N-i} x^{j\alpha} = P_{N,i}^\alpha(x), \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

حال با مشتق‌گیری از  $P^\alpha(x)$  به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} (P^\alpha(x))' &= (FT_\alpha(x))' = F(T_\alpha(x))' = F[0, \alpha x^{\alpha-1}, \dots, N\alpha x^{N\alpha-1}]^T = x^{-1} F \beta^\alpha T_\alpha(x) \\ &= x^{-1} F \beta^\alpha F^{-1} P^\alpha(x) = x^{-1} D P^\alpha(x), \end{aligned}$$

که  $D = F \beta^\alpha F^{-1}$  ماتریس شبه عملیاتی مشتق صحیح توابع لژاندر بهبودیافته کسری است و  $\beta^\alpha$  ماتریس  $(N+1) \times (N+1)$  با درایه‌های زیر است:

$$b_{ij} = \begin{cases} i\alpha & i = j \neq 0, \\ 0 & i, j = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad \text{در غیر این صورت}$$

### ماتریس شبه عملیاتی مشتق کسری

در این بخش دو نوع ماتریس شبه عملیاتی مشتق کسری تعریف کرده و آنها را با توجه به ویژگی‌های توابع لژاندر بهبودیافته کسری و مشتق کسری کاپوتو به دست می‌آوریم.

**تعریف ۴.** مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $n-1 < \nu < n$  از بردار توابع لژاندر بهبودیافته کسری (۱۹) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_x^\nu P^\alpha(x) \cong x^{n-\nu} D_1^{(\nu, \alpha)} P^\alpha(x),$$

که  $D_1^{(\nu, \alpha)}$  ماتریس شبه عملیاتی مشتق کسری  $(N+1) \times (N+1)$  است.

با استفاده از معادله (۱۳) و ویژگی خطی بودن مشتق کاپوتو داریم:

$$D_x^\nu P_{N,i}^\alpha(x) = \sum_{k=i}^N (-1)^{k-i} \binom{N-i}{k-i} \binom{N+k+1}{N-i} D_x^\nu (x^{k\alpha}), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

حال با توجه به ویژگی (۳) از مشتقات کاپوتو به دست می‌آوریم:

$$D_x^\nu P_{N,i}^\alpha(x) = \sum_{k=i}^N \lambda_{i,k,N}^{(\nu,\alpha)} x^{k\alpha-\nu} = x^{n-\nu} \sum_{k=i}^N \lambda_{i,k,N}^{(\nu,\alpha)} x^{k\alpha-n}, \quad (22)$$

که

$$\lambda_{i,k,N}^{(\nu,\alpha)} = \begin{cases} 0, & k \in N_0, k\alpha < \nu, \\ (-1)^{k-i} \binom{N-i}{k-i} \binom{N+k+1}{N-i} \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1-\nu)}, \end{cases}$$

حال  $x^{k\alpha-\nu}$  را با توابع لژاندر بهبود یافته به صورت (۲۳) تقریب می‌زنیم:

$$x^{k\alpha-\nu} \cong \sum_{j=0}^N C_{k,j}^{(\nu,\alpha)} P_{N,j}^\alpha(x). \quad (23)$$

با جای گذاری (۲۳) در (۲۲) برای  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} D_x^\nu P_{N,i}^\alpha(x) &\cong \sum_{k=i}^N \lambda_{i,k,N}^{(\nu,\alpha)} x^{k\alpha-\nu} = x^{n-\nu} \sum_{k=i}^N \lambda_{i,k,N}^{(\nu,\alpha)} \left( \sum_{j=0}^N C_{k,j}^{(\nu,\alpha)} P_{N,j}^\alpha(x) \right) \\ &= x^{n-\nu} \sum_{j=0}^N \left( \sum_{k=i}^N b_{i,k,N,j}^{(\nu,\alpha)} \right) P_{N,j}^\alpha(x), \end{aligned} \quad (24)$$

که

$$b_{i,k,N,j}^{(\nu,\alpha)} = \lambda_{i,k,N}^{(\nu,\alpha)} C_{k,j}^{(\nu,\alpha)}.$$

بنا بر این

$$D_x^\nu P_{N,i}^\alpha(x) = x^{n-\nu} \left[ \sum_{k=i}^N b_{i,k,N,0}^{(\nu,\alpha)}, \dots, \sum_{k=i}^N b_{i,k,N,N}^{(\nu,\alpha)} \right] P^\alpha(x), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (25)$$

و ماتریس شبه عملیاتی  $D_1^{(\nu,\alpha)}$  لژاندر بهبود یافته کسری بدین صورت حاصل می‌شود:

$$D_1^{(\nu,\alpha)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^N b_{0,k,N,0}^{(\nu,\alpha)} & \dots & \sum_{k=0}^N b_{0,k,N,N}^{(\nu,\alpha)} \\ \sum_{k=1}^N b_{1,k,N,0}^{(\nu,\alpha)} & \dots & \sum_{k=1}^N b_{1,k,N,N}^{(\nu,\alpha)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=N-1}^N b_{N-1,k,N,0}^{(\nu,\alpha)} & \dots & \sum_{k=N-1}^N b_{N-1,k,N,N}^{(\nu,\alpha)} \\ b_{N,N,N,0}^{(\nu,\alpha)} & \dots & b_{N,N,N,N}^{(\nu,\alpha)} \end{pmatrix}.$$

**تعریف ۵.** مشتق از مرتبه کسری  $\nu$  بردار  $P^\alpha(x)$  نسبت به  $x$  را می‌توان به صورت (۲۶) نمایش داد.

$$D_x^\nu P^\alpha(x) = x^{-\nu} D_2^{(\nu,\alpha)} P^\alpha(x), \quad (26)$$

که  $D_2^{(\nu,\alpha)}$  را ماتریس شبه عملیاتی مشتق کسری می‌نامیم، و بدین صورت به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} D_x^\nu P^\alpha(x) &= D_x^\nu FT_\alpha(x) = FD_x^\nu T_\alpha(x), \\ T_\alpha(x) &= [1, x^\alpha, x^{2\alpha}, \dots, x^{N\alpha}]^T. \end{aligned}$$

از طرفی

$$D_x^\nu T_\alpha(x) = D_x^\nu \begin{bmatrix} 1 \\ x^\alpha \\ x^{2\alpha} \\ \vdots \\ x^{N\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 x^{\alpha-\nu} \\ C_2 x^{2\alpha-\nu} \\ \vdots \\ C_N x^{N\alpha-\nu} \end{bmatrix} = x^{-\nu} \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 x^\alpha \\ C_2 x^{2\alpha} \\ \vdots \\ C_{N1} x^{N\alpha} \end{bmatrix}.$$

که

$$C_i = \begin{cases} 0, & i\alpha < \nu, i\alpha \in \mathbb{N}_0, \\ (-1)^{k-i} \binom{N-i}{k-i} \binom{N+k+1}{N-i} \frac{\Gamma(i\alpha+1)}{\Gamma(i\alpha+1-\nu)}, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

بنا بر این

$$D_x^\nu P^\alpha(x) = x^{-\nu} F \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x^\alpha \\ x^{2\alpha} \\ \vdots \\ x^{N\alpha} \end{bmatrix} = x^{-\nu} F G^{(\nu,\alpha)} F^{-1} P^\alpha(x) = x^{-\nu} D_2^{(\nu,\alpha)} P^\alpha(x),$$

که  $D_2^{(\nu,\alpha)} = F G^{(\nu,\alpha)} F^{-1}$  است، و  $G^{\alpha,\nu}$  یک ماتریس  $(N+1) \times (N+1)$  با درایه  $(i, j)$  ام زیر است:

$$G_{ij} = \begin{cases} C_i, & i=j \neq 0, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر در  $D_2^{(\nu,\alpha)}$   $U=1$  ماتریس شبه عملیاتی مشتق کسری همان ماتریس شبه عملیاتی مشتق صحیح به دست آمده در بخش ۳ می‌شود.  
به‌عنوان نتیجه داریم:

$$D_x^\nu P^\alpha(x) = x^{-\nu} D_2^{(\nu,\alpha)} P^\alpha(x) \cong x^{n-\nu} D_1^{(\nu,\alpha)} P^\alpha(x).$$

### پیاده‌سازی روش چندجمله‌ای‌های لژاندار بهبود یافته کسری و نتایج عددی

#### ۱. پیاده‌سازی روش

برای حل معادلات (۱) و (۲)، فرض می‌کنیم:

$$u(x, t) \cong P^\alpha(x)^T U P^\beta(t), \tag{۲۷}$$

در این جا  $U$  ماتریس مجهول است. با مشتق‌گیری رابطه (۲۷) نسبت به  $x$  به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cong x^{-1} P^\alpha(x)^T D^T U P^\beta(t), \tag{۲۸}$$

که  $D$  ماتریس شبه عملیاتی مشتق صحیح برای توابع لژاندر بهبود یافته است. با مشتق‌گیری دوباره از معادله (۲۸) نسبت به  $x$  داریم:

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \cong -x^{-2} P^\alpha(x)^T D^T U P^\beta(t) + x^{-1} (x^{-1} P^\alpha(x)^T D^T D^T U P^\beta(t)). \tag{۲۹}$$

مشتقات مراتب مختلف  $u$  نیز به‌طور مشابه حساب می‌شود.



برای تقریب  $D_t^\nu u(x,t)$  نیز با استفاده از ماتریس شبه عملیاتی  $D_2^{(\nu,\alpha)}$  و مشتق کسری  $\nu$  نسبت به  $t$  از رابطه (۲۷) به دست می‌آوریم:

$$D_t^\nu u(x,t) \cong t^{-\nu} P^\alpha(x)^T U D_2^{(\nu,\alpha)} P^\beta(t). \quad (30)$$

از طرفی با استفاده از (۳) و (۲۷) داریم:

$$u(x-s, t-s') = \begin{cases} f(x-s, t-s'), & x \in [0, s], t \in [0, s'] \\ P^\alpha(x-s) U P^\beta(t-s'), & x \in (s, 1], t \in (s', 1] \end{cases} \quad (31)$$

$$u(\rho_i x, \varepsilon_i t) = P^\alpha(\rho_i x)^T U P^\beta(\varepsilon_i t). \quad (32)$$

با جای گذاری معادلات (۲۷) - (۳۲) در (۱) و (۲) به دست می‌آوریم:

$$t^{-\nu} (P^\alpha(x))^T U D_2^{(\nu,\alpha)} P^\beta(t) = H(P^\alpha(\rho_0 x)^T U P^\beta(\varepsilon_0 t), x^{-1} (P^\alpha(\rho_1 x))^T D^T U P^\beta(\varepsilon_1 t), \dots), \quad (33)$$

$$t^{-\nu} (P^\alpha(x))^T U D_2^{(\nu,\alpha)} P^\beta(t) = \begin{cases} H(P^\alpha(x)^T U P^\beta(t), \\ x^{-1} (P^\alpha(x))^T D^T U P^\beta(t) \\ \dots, f(x-s_0, t-s'_0) \\ \dots, f(x-s_r, t-s'_r), x \in [0, s_0], t \in [0, s'_0] \\ H(P^\alpha(x)^T U P^\beta(t), \\ x^{-1} (P^\alpha(x))^T D^T U P^\beta(t), \\ (P^\alpha(x-s_0))^T D^T U P^\beta \\ (t-s'_0), f(x-s_1, t-s'_1) \\ \dots, f(x-s_r, t-s'_r), x \in (s_0, s_1], t \in (s'_0, s'_1] \\ \vdots \\ H(P^\alpha(x)^T U P^\beta(t), \\ x^{-1} (P^\alpha(x))^T D^T U P^\beta(t) \\ \dots, P^\alpha(x-s_0)^T U P^\beta(t) \\ -s'_0), \dots, P^\alpha(x-s_r)^T \\ U P^\beta(t-s'_r), x \in (s_r, 1], t \in (s'_r, 1]. \end{cases} \quad (34)$$

سپس، معادلات (۳۳) و (۳۴) به همراه شرایط مسئله با استفاده از روش هم‌محلی گاوس- لژاندر به یک دستگاه معادلات غیرخطی تبدیل می‌شود. در آخر با استفاده از روش تکراری نیوتون ماتریس مجهول  $U$  را به دست می‌آوریم و با جای گذاری در (۲۷) تقریبی از جواب مسئله به دست می‌آید.

## ۲. نتایج عددی

مثال ۱. معادله دیفرانسیل جزئی کسری با تأخیر زمانی

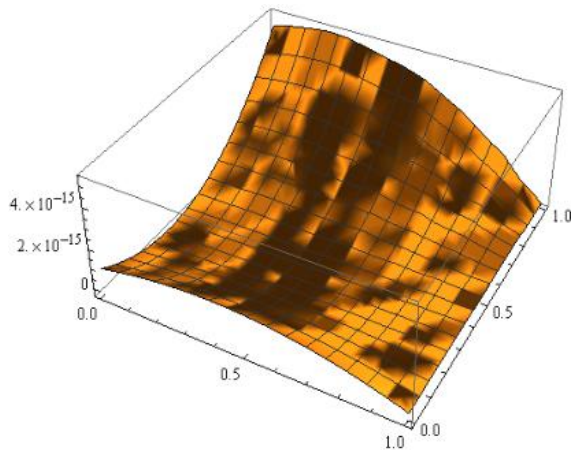
$$D_t^\nu u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(x,t-s) + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\nu)} (2x-x^2)t^{2-\nu} + 2t^2 + x(2-x)(t-s)^2, \quad x \in [0,1], t \in [0,1].$$

با شرایط اولیه و مرزی

$$u(x,t) = t^2(2x-x^2), \quad x \in [0,1], t \in [0,1],$$

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

را در نظر بگیرید [۵۰]. جواب دقیق این مسئله عبارت است از  $u(x,t) = t^2(2x - x^2)$ . نتایج عددی در شکل ۱ خلاصه شده است. جدول ۱ خطاهای مطلق بین جواب دقیق و تقریبی را برای مقادیر مختلف  $U$  با  $M = N = 2$  در  $s = 1$  و  $\alpha = 1$ ، در برخی نقاط نشان می‌دهد. خطای مطلق برای  $\nu = 0.5$  و  $\alpha = 1$ ،  $M = N = 2$ ،  $s = 1$  در شکل ۱ ترسیم شده است.



شکل ۱. خطاهای مطلق برای  $\nu = 0.5$  و  $\alpha = 0.5$  با  $M = N = 2$ ،  $s = 1$  برای مثال ۱

جدول ۱. خطای مطلق بین جواب دقیق و تقریبی برای مقادیر مختلف  $U$  با  $M = N = 2$ ،  $\alpha = 1$  و  $s = 1$  در مثال ۱

$x=t$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1$
۰	$۹,۶۸ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۷۷ \times 10^{-۱۰}$	$-۴,۴ \times 10^{-۱۰}$
۰,۱	$۵,۰۳ \times 10^{-۱۰}$	$۹,۱۹ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۷۵ \times 10^{-۱۰}$
۰,۲	$۹,۷۱ \times 10^{-۱۰}$	$۴,۳۳ \times 10^{-۱۰}$	$۲,۰۸ \times 10^{-۱۰}$
۰,۳	$-۱,۳ \times 10^{-۱۰}$	$۲,۰۸ \times 10^{-۱۰}$	$۲,۷۷ \times 10^{-۱۰}$
۰,۴	$-۱,۵ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۳ \times 10^{-۱۰}$	$۲,۷۷ \times 10^{-۱۰}$
۰,۵	$۸,۳۲ \times 10^{-۱۰}$	$-۵,۵ \times 10^{-۱۰}$	$۲,۷۷ \times 10^{-۱۰}$
۰,۶	$۵,۵۵ \times 10^{-۱۰}$	$-۵,۵ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۱۱ \times 10^{-۱۰}$
۰,۷	$۹,۹۹ \times 10^{-۱۰}$	$۵,۵۵ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۶۶ \times 10^{-۱۰}$
۰,۸	$۹,۶۸ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۱ \times 10^{-۱۰}$	۰
۰,۹	$۸,۸۸ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۱۱ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۱ \times 10^{-۱۰}$
۱	$-۲,۲ \times 10^{-۱۰}$	$۲,۲۲ \times 10^{-۱۰}$	۰
CPU	۰,۲۸	۰,۳۱	۰,۲۹۷

جدول ۲. خطای مطلق بین جواب دقیق و تقریبی برای مقادیر مختلف  $U$  با  $M = N = 3$ ،  $\alpha = 1$  و  $s = 1$  برای مثال ۱

$x=t$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1$
۰	$-۳,۳ \times 10^{-۱۰}$	$۸,۶۵ \times 10^{-۱۰}$	$-۵,۵ \times 10^{-۱۰}$
۰,۱	$-۳,۷ \times 10^{-۱۰}$	$۱ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۳ \times 10^{-۱۰}$
۰,۲	$۵,۲۲ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۴ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۷۱ \times 10^{-۱۰}$
۰,۳	$۲,۹۹ \times 10^{-۱۰}$	$-۹,۱ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۰۴ \times 10^{-۱۰}$
۰,۴	$۱,۷۲ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۸ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۳ \times 10^{-۱۰}$
۰,۵	$۵,۰۵ \times 10^{-۱۰}$	$-۳,۶ \times 10^{-۱۰}$	$-۵,۵ \times 10^{-۱۰}$
۰,۶	$۵,۳۷ \times 10^{-۱۰}$	$-۶,۱ \times 10^{-۱۰}$	$-۵,۵ \times 10^{-۱۰}$
۰,۷	$-۱ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۳۲ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۶ \times 10^{-۱۰}$
۰,۸	$-۴,۵ \times 10^{-۱۰}$	$۶,۱۰ \times 10^{-۱۰}$	$-۸,۸ \times 10^{-۱۰}$
۰,۹	$-۷,۲ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۰۳ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۳ \times 10^{-۱۰}$
۱	$-۶,۶ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۱۱ \times 10^{-۱۰}$	۰
CPU	۰,۴۳	۰,۲۸۷	۰,۳۳

مثال ۲. معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با تأخیر زمانی

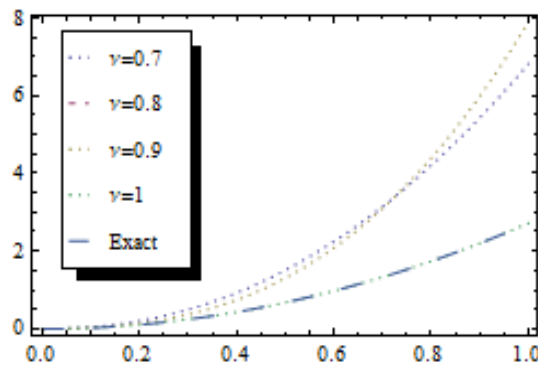
$$D_t^\nu u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\left(x, \frac{t}{2}\right) u\left(x, \frac{t}{2}\right) - u(x,t),$$

$$x \in [0,1], t \in [0,t],$$

با شرایط اولیه

$$u(x,0) = x^2,$$

در نظر بگیرید [۲۲]. در حالت خاص  $U=1$ ، جواب دقیق این مسئله  $u(x,t) = x^2 \exp(t)$  است. در حالت که  $U=1$ ، خطاهای مطلق برای مقادیر مختلف  $M$  و  $N$  با  $\nu = \alpha = 1$  در جدول ۳ ارائه شده است. علاوه بر این، رفتار روش حاضر با روشی که در [۲۲] آورده شده است در جدول ۴ مقایسه شده است. این محاسبات نشان می‌دهد که نتایج عددی به‌دست آمده با روش حاضر توافق خوبی با جواب دقیق دارند. شکل ۲ نشان می‌دهد که جواب تقریبی هنگامی که  $U$  به ۱ نزدیک می‌شود به جواب دقیق میل می‌کند.



شکل ۲. جواب‌های تقریبی و دقیق مثال ۲ برای  $M = N = 2$  و مقادیر مختلف  $U$

جدول ۳. خطاهای مطلق برای مقادیر مختلف  $M, N, \alpha, v$  برای مثال ۲

$x=t$	$M=N=3$	$M=N=5$	$M=N=7$
۰	$-۳,۴ \times 10^{-۱۸}$	$۹,۲ \times 10^{-۱۷}$	$۴,۹ \times 10^{-۱۶}$
۰,۱	$-۳,۷ \times 10^{-۱۰}$	$-۱,۵ \times 10^{-۸}$	$-۳,۵ \times 10^{-۱۰}$
۰,۲	$-۱,۶ \times 10^{-۵}$	$-۶,۳ \times 10^{-۸}$	$-۱,۶ \times 10^{-۱۰}$
۰,۳	$-۳,۷ \times 10^{-۵}$	$-۱,۸ \times 10^{-۷}$	$-۴,۸ \times 10^{-۱۰}$
۰,۴	$-۸,۵ \times 10^{-۵}$	$-۴,۴ \times 10^{-۷}$	$-۱,۰ \times 10^{-۹}$
۰,۵	$-۱,۹ \times 10^{-۴}$	$-۷,۹ \times 10^{-۷}$	$-۱,۹ \times 10^{-۹}$
۰,۶	$-۳,۸ \times 10^{-۴}$	$-۱ \times 10^{-۶}$	$-۳,۵ \times 10^{-۹}$
۰,۷	$-۵,۲ \times 10^{-۴}$	$-۲,۴۰ \times 10^{-۶}$	$-۵,۷ \times 10^{-۹}$
۰,۸	$-۲ \times 10^{-۴}$	$-۳,۰۶ \times 10^{-۶}$	$-۱ \times 10^{-۸}$
۰,۹	$۱,۴ \times 10^{-۳}$	$۱,۳۱ \times 10^{-۶}$	$-۹,۷ \times 10^{-۹}$
۱	$۶,۳ \times 10^{-۳}$	$۳,۶ \times 10^{-۵}$	$۹,۱ \times 10^{-۸}$
CPU	۰,۳۵۹	۰,۶۷۱	۱,۹۳۵

جدول ۴. مقایسه روش حاضر با روش ارائه شده در [۲۲] برای مقادیر مختلف  $x, t$  با  $v=1$ ، برای مثال ۲

X	T	روش حاضر $M=5, N=3$	روش کلر [۲۱]
۰,۲۵	۰,۲۵	$-۱,۵۲ \times 10^{-۱۰}$	$۵,۳۰ \times 10^{-۷}$
	۰,۵	$-۲,۶۸ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۷۷ \times 10^{-۵}$
	۰,۷۵	$-۴,۱۴ \times 10^{-۱۰}$	$۱,۴۰ \times 10^{-۴}$
	۱	$-۶,۵۴ \times 10^{-۱۰}$	$۶,۲۱ \times 10^{-۴}$
۰,۵	۰,۲۵	$-۶,۰۸ \times 10^{-۱۰}$	$۴,۹ \times 10^{-۳}$
	۰,۵	$-۱,۰۷ \times 10^{-۵}$	$۲,۱۲ \times 10^{-۱۰}$
	۰,۷۵	$-۱,۶۵ \times 10^{-۵}$	$۷,۰۹ \times 10^{-۵}$
	۱	$-۲,۶۱ \times 10^{-۵}$	$۵,۶۳ \times 10^{-۴}$
۰,۷۵	۰,۲۵	$-۱,۳۶ \times 10^{-۵}$	$۴,۷۷ \times 10^{-۴}$
	۰,۵	$-۲,۴۰ \times 10^{-۵}$	$۱,۵۹ \times 10^{-۴}$
	۰,۷۵	$-۳,۷۳ \times 10^{-۵}$	$۱,۲۶ \times 10^{-۴}$
	۱	$-۵,۸۸ \times 10^{-۵}$	$۵,۵۹ \times 10^{-۴}$

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش کارآمد برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی کسری تأخیری با استفاده از توابع لژاندر بهبود یافته کسری به همراه ماتریس‌های شبه عملیاتی مشتق آنها ارائه شده است. ماتریس‌های شبه عملیاتی مشتق صحیح و کسری توابع لژاندر بهبود یافته کسری برای اولین بار ارائه شده است و همراه با روش هم محلی مسئله را به حل یک سیستم معادلات جبری کاهش داده است. مثال‌های عددی برای نشان دادن کارایی روش، آورده شده است. جواب‌های تقریبی به دست آمده با جواب دقیق سازگاری خوبی دارند و تنها تعداد کمی از توابع پایه برای رسیدن به دقتی مطلوب استفاده شده‌اند.

### منابع

1. Baillie R. T. "Long memory processes and fractional integration in econometrics", *J. Econ.*, 73 (1996) 5-59.
2. Hall M. G., Barrick T. R., "From diffusion-weighted MRI to anomalous diffusion imaging", *Med, Reson. MAGN.*, 59, (2008) 447-455.
3. Povstenko Y. Z. "Signaling problem for time-fractional diffusion-wave equation in a half-space in the case of angular symmetry", *Nonl, Dyn.*, 55 (2010) 593-605.
4. Engheta N., "On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism", *IEEE T. Antenn.Propag.*, 44 (1996) 554-566.
5. Oldham K. B., "Fractional differential equation in electro chemistry", *Adv. Eng. Soft.*, 41 (2010) 9-12.
6. Lederman C., Roquejoffre J. M., Wolanski, "Mathematical justification of a nonlinear integrodifferential equation for the propagation of spherical flames", *Annali di Matematica pura ed Applicata.*, 183 (2004) 173-239.
7. Mainardi F., "Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics. In: Carpinteri, A. Mainardi, F (eds.) *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer", New York., (1997) 291-348.
8. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V., "Application of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids", *Appl. Mech. Rev.*, 50, (1997) 15-67.
9. He J. H., "Some applications of nonlinear fractional differential equation and their approximations", *Bull. Sci. Technol.*, 15 (1999) 86-90.
10. Suarez L., Shokooh A., "An eigenvector expansion method for the solution of motion containing fractional derivative", *J. Appl. Mech.*, 64 (1997) 629-635.
11. Abdulazi O., Hashim I., Momani S., "Solving systems of fractional differential equations by homotopy-perturbation method", *Phys. Lett, A.*, 372 (2009) 451-459.

12. Odibat Z., Momani S. "Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order", *int. J. Nonl. Sci. Numer. Simul.*, 1(7) (2006) 15-27.
13. Momani S., Odibat Z., "Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order", *Chaos Solitons Fractals.*, 31 (2007) 1248-1255.
14. Daftardar-Gejj V., Jafari H. "Solving a multi-order fractional differential equation using decomposition", *Appl. Math. Comput*, 189 (2007) 541-548.
15. Meershaer M., Tadjeran C. "Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations", *App. Numer. Math.*, 56 (2006) 80-90.
16. Dubois F., Mengue S., "Mixed collocation for fractional differential equations", *Numer. Algor.*, 34 (2003) 303-311.
17. Saadatmandi A., Dhghan M., "A legendre collocation method for fractional integro-differential equations", *J. Vib. Control*, 17 (2011) 2050-2058.
18. Bhrawy A. H., Tharwat M. M., Yildirim A., "A new formula for fractional integrals of Chebyshev polynomials: application for solving mulit-term fractional differentials", *J. Appl. Math. Model*, 37 (6) (2013) 4245-4252.
19. Saadatmandi A., "Bernstein operational matrix of fractional derivatives and its applications", *Apple. Math. Model*, 38 (4) (2014) 1365-1372.
20. Rehman M., Ur Ali Khan R., "The Legendre wavelet method for solving fractional differential equations", *Comnun. Nonl. Sci. Numer. Simu.*, 16 (2011) 4163-4173.
21. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Lima P., "An improved composite collocation method for distributed-order fractional differential equations based on fractional Chelyshkov wavelets", *Appl. Numer. Math.*, (145 ) (2010) 1-27.
22. Keller A.A., "Contribution of the delay differential equations to the complex economic macrodynamics", *WSEAS. Trans Syst.*, 9 (4) (2010) 358-371.
23. Ockhendon J. R., Tayler A. B., "The dynamics of a current collection system for an electric locomotive", *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.*, 322 (1971) 447-468.
24. Ajello W. G., Freedom H. I., Wu J., "A model of stage structured population growth with density depended time delay", *SIAM. J. Appl. Math.*, 52 (1992) 855-869.
25. Sedaghat S., Nemati S., Orokhani Y., "Application of the hybrid functions to solve neutral delay functional differential equations", *Int. J. Comput. Math.*, 94 (2017) 503-514.
26. Tohidi E., Bhrawy A. H., Erfani K., "A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation", *Appl. Math. Model*, 37 (2012) 4283-4294.
27. Yu Z. H., "Variational iteration method for solving the mutli-pantoraph delay equation", *Phys. Lett, A.*, 372 (2008) 6475-6479.

28. Wang W. S., Li S. F. "On the one-leg-method for solving nonlinear neutral functional differential equations", *Appl. Math. Comput.*, 193 (2007) 285-301.
29. Evans D. J., Raslan K. R. "The Adomian decomposition method for solving delay differential equation", *Int. J. comput. Math.*, 82 (2005) 49-54.
30. Marzban H. R., Razzaghi M., "Solution of multi-delay systems using hybrid of block-pulse functions and Taylor series", *Sound. Vib.*, 292 (2006) 954-963.
31. Sadeghi Hafshejani M., Karimi Vanani S., Sedighi Hafshejani J., "Numerical solution of delay differential equations using Legendre wavelet method", *World Appl. Sci.*, 13 (2011) 27-33.
32. Saeed U., Rehman M. U., "Hermiter Wavelet method for fractional delay differential equation", *J. Diff. Equa.* (2014) 1-8.
33. Zubik-Kowal B., "Chebyshev pseudo spectral method and waveform relaxation for differential and differential–functional parabolic equations", *Apple, Numer Math.*, 34 (2-3) (2000) 309-328.
34. Yang Y., Huang Y., "Spectral-collocation methods for fractional pantograph delay-integro-differential equations", *Advan. Math. Phys.* (2013) 1-14.
35. Sakar M. G., Uludag F., Erdogan F., "Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method", *Apple. Math Model*, (2016) 40 (13-14) 6639-6649.
36. Khader M. M., Hendy A. S., "The approximate and exact solutions of the fractional-order delay differential equations using Legendre pseudo spectral method", *Int. J. pure. Apple. Math.*, 74, (2012) 287-297.
37. Wang Z., "A numerical method for delayed fractional-order differential equations", *J. Apple. Math.* (2013) 1-7.
38. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations", *Numer. Algorithms*, 74 (2016) 223-250.
39. Saeed U., Ur Rahman M., Iqbal M. A., "Modified Chebyshev wavelet methods for fractional delay-type equations", *Apple. Math Compute*, 264 (2015) 431-442.
40. Moghaddam B. H., Mostaghim Z. S., "A numerical method based on finite difference for solving fractional delay differential equations", *J. Taibah Univ, Sci.*, 7 (2013) 120-127.
41. Rahimkhani P., Ordokhani Y., "Numerical Solution of Volterra–Hammerstein Delay Integral Equations", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 44 (2) (2020) 445-457.
42. Marzban H., Razzaghi M., "Hybrid Functions Approach for Linearly Constrained Quadratic Optimal Control Problems", *Apple. Math. Model*, 27, (2003) 471-485.

43. Razzaghi M., Elnagar G., "Linear quadratic optimal control problems via shifted Legendre state parameterization", *Int. J. Syst. Sci.*, 25 (1994) 393-399.
44. Bazm S., Hoseseini A., "Numerical solution of nonlinear integral equation using alternative Legendre polynomials", *J. Appl. Math. Comput.*, (2016) 1-27.
45. Meng Z., Yi M., Huang J., Song L., "Numerical solutions of nonlinear fractional differential equations by alternative Legendre polynomials", *Applied Mathematics and Computation*, 336 (2018) 454-464.
46. Rahimkhani P., Ordokhani Y., "Approximate solution of nonlinear fractional and integro-differential equation using fractional alternative Legendre function", *J. Comput. Appl. Math.*, 36 (2020) 1-150.
47. Podlubny I., "Fractional Differential Equations", Academic Press, San Diego (1999).
48. Abbasbandy S., Kazem S., Alhuthali M. S., Alsulami H. H., "Application of the operational matrix of fractional-order Legendre functions for solving the time-fractional convection–diffusion equation", *Appl. Math Comput*, 266 (2015) 31-40.
49. Chelyshkov V. S., "Alternative orthogonal polynomials and quadrature", *Trans. Numer. Anal.*, 25 (7) (2006) 17-26.
50. Pimenov V. G., Hendy A. S., "A numerical solution for a class of time fractional diffusion equations with delay", *Int J Appl. Math Comput. Sci.*, 27 (3) (2017) 477-488.