Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Cyclic amenability of Lau product and module extension Banach algebras

Mahdieh Alikahi[1], Mohammad Ramezanpour[2]✉

1. School of Mathematics and Computer Science, Damghan University, Damghan, Iran.

E-mail: mahdiehalikahi91@gmail.com

2. School of Mathematics and Computer Science, Damghan University, Damghan, Iran.

✉E-mail: ramezanpour@du.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
16 March 2020
Revised form:
12 October 2020
Accepted:
21 October 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:

Banach algebra; module extension; Lau product; (approximate) cyclic amenability.

ABSTRACT

Introduction

The notion of weak amenability for commutative Banach algebras was introduced and studied for the first time by Bade, Curtis and Dales. Johnson extended this concept to the non commutative case and showed that group algebras of all locally compact groups are weakly amenable. A Banach algebra A is called weakly amenable if every continuous derivation $D: A \to A^*$ is inner.

It is often useful to restrict one's attention to derivations $D: A \to A^*$ satisfying the property $D(a)(c) + D(c)(a) = 0$ for all $a, c \in A$. Such derivations are called cyclic. Clearly inner derivations are cyclic. A Banach algebra is called cyclic amenable if every continuous cyclic derivations $D: A \to A^*$is inner. This notion was presented by Gronbaek. He investigated the hereditary properties of this concept, found some relations between cyclic amenability of a Banach algebra and the trace extension property of its ideals.

Ghahramani and Loy introduced several approximate notions of amenability by requiring that all bounded derivations from a given Banach algebra A into certain Banach A-bimodules to be approximately inner. In the same paper and the subsequent one, the authors showed the distinction between each of these concepts and the corresponding classical notions and investigated properties of algebras in each of these new classes. Motivated by this notions, Esslamzadeh and Shojaee defined the concept of approximate cyclic amenability for Banach algebras and investigated the hereditary properties for this new notion.

Periliminaries

Let A be a Banach algebra and let X be an A-bimodule. Then the ℓ^1-direct sum $A \times X$ under the multiplication

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + xb) \qquad (a, b \in A, x, y \in X),$$

is a Banach algebra called the module extension of A by X and denoted by $A \oplus X$. The class of module extension Banach algebras contains a wide variety of Banach

algebras includes a triangular Banach algebra $\mathrm{Tri}(A, X, B)$. Every triangular Banach algebra $\mathrm{Tri}(A, X, B)$.can be identified with the module extension Banach algebra $(A \times B) \oplus X$.

On the other hand, for two Banach algebra A and B with $\Delta(B) \neq \emptyset$ and for $\theta \in \Delta(B)$, the set of all non-zero multiplicative linear functionals on B, the θ-Lau product $A \times_\theta B$ is a Banach algebra which is defined as the ℓ^1-direct sum $A \times B$ equipped with the algebra multiplication

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 + \theta(b_2) a_1 + \theta(b_1) a_2, b_1 b_2) \qquad (a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B).$$

This type of product was introduced by Lau for certain class of Banach algebras known as Lau algebras and was extended by Sangani Monfared for arbitrary Banach algebras. The unitization $A^\sharp$ of A can be regarded as the ι-Lau product $A \times_\iota \mathbb{C}$, where $\iota \in \Delta(\mathbb{C})$ is the identity map.

This product provides not only new examples of Banach algebras by themselves, but it can also serve as a source of (counter) examples for various purposes in functional and harmonic analysis. From the homological algebra point of view $A \times_\theta B$ is a strongly splitting Banach algebra extension of B by A. The Lau product of Banach algebras enjoys some properties that are not shared in general by arbitrary strongly splitting extensions. For instance, commutativity is not preserved by a generally strongly splitting extension. However, $A \times_\theta B$ is commutative if and only if both A and B are commutative.

Results and discussion

Many basic properties of $A^\sharp$, some notions of amenability and some homological properties are extended to $A \times_\theta B$ by many authors. In particular, Ghaderi, Nasr-Isfahani and Nemati extended some results on (approximate) cyclic amenability of $A^\sharp$, obtained by Esslamzadeh and Shojaee, to $A \times_\theta B$. They showed that if A^2 is dense in A then the cyclic amenability $A \times_\theta B$ is equivalent to the cyclic amenability of both A and B.

In this paper, by characterizing of cyclic derivations on Lau product $A \times_\theta B$ and module extension $A \oplus X$, we present general necessary and sufficient conditions for those to be (approximate) cyclic amenable. This not only provides new results on (approximate) cyclic amenability of these type of Banach algebras but also improves some main results in this topic. In particular we show that, under mild condition, the cyclic amenability of $\mathrm{Tri}(A, X, B)$ is equivalent to the cyclic amenability of the corner algebras A and B.

How to cite: Alikahi, M., Ramezanpour, M.; (2022) Cyclic amenability of Lau product and module extension Banach algebras. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-17

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

میانگین‌پذیری دوری حاصل ضرب لائو و گسترش مدولی جبرهای باناخ

مهدیه علی‌کاهی[۱]، محمد رمضان‌پور[۲]

۱. دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران. پست الکترونیکی: mahdiehalikahi91@gmail.com

۲. نویسندهٔ مسئول، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران. پست الکترونیکی: ramezanpour@du.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۲۶
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۳۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:

جبر باناخ ،
گسترش مدولی،
حاصل ضرب لائو،
میانگین‌پذیری دوری(تقریبی).

چکیده

به تازه‌گی نتایجی در مورد میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) حاصل‌ضرب لائوی دو جبر باناخ به دست آمده است. در این مقاله ضمن مشخص کردن ضابطهٔ اشتقاق‌های دوری روی حاصل ضرب لائوی جبرهای باناخ و گسترش مدولی یک جبر باناخ شرط لازم و کافی برای میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) آن‌ها را ارایه می‌نماییم. این نه تنها نتایج تازه‌ای را در مورد میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) این دسته از جبرهای باناخ ارایه می‌کند بلکه برخی قضایای اساسی در این خصوص را نیز بهبود می‌بخشد.

استناد: علی‌کاهی، مهدیه؛ رمضان‌پور، محمد؛ (۱۴۰۱). میانگین‌پذیری دوری حاصل ضرب لائو و گسترش مدولی جبرهای باناخ. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۷-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرض کنید A جبر باناخ و X یک A-دومدول باناخ باشد. در این صورت X^*، فضای دوگان X، با اعمال مدولی که برای هر $a \in A$، $x \in X$ و $f \in X^*$ به صورت $(a \cdot f)(x) = f(x \cdot a)$ و $(f \cdot a)(x) = f(a \cdot x)$تعریف می‌شود یک A-دومدول باناخ است.یک اشتقاق[1] از A به توی X یک نگاشت خطی $D: A \to X$ است که در خاصیت (لایب نیتز)

$$D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b), \qquad (a, b \in A),$$

صدق نماید. اشتقاق $D: A \to X$ دورنی گفته می‌شود هرگاه $x \in X$موجود باشد که

$$D(a) = d_x(a) := a \cdot x - x \cdot a \qquad (a \in A).$$

این اشتقاق درونی تقریبی نامیده می‌شود هرگاه تور (x_α)در Xموجود باشد که حد زیر در نرم برقرار باشد،

$$D(a) = \lim_\alpha d_{x_\alpha}(a)(a \in A).$$

مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف[2] برای جبرهای باناخ جابه جایی اولین بار توسط دیلز و همکاران در [۱] معرفی و مطالعه شد. جانسون[3] [۱۲] این مفهوم را به جبرهای ناجابه جایی گسترش داد و اثبات کرد که جبرهای گروهی همهٔ گروه‌های فشرده موضعی میانگین‌پذیر ضعیف هستند. بر این اساس جبر باناخ Aمیانگین‌پذیر ضعیف نامیده می‌شود هر گاه هر اشتقاق پیوسته $D: A \to A^*$درونی باشد.

گاهی بهتر است که خودمان را به اشتقاق‌های $D: A \to A^*$ محدود کنیم که در شرط $D(a)(b) + D(b)(a) = 0$ برای هر $a, b \in A$ صدق کنند. اینگونه اشتقاق‌ها را اشتقاق دوری[4]می‌گویند. به وضوح هر اشتقاق درونی، یک اشتقاق دوری است. جبر باناخ A میانگین‌پذیر دوری[5] نامیده می‌شود هر گاه هر اشتقاق دوری پیوسته $D: A \to A^*$ دورنی باشد. این مفهوم توسط گرونبگ[6] [۱۱] معرفی و بر خلاف میانگین‌پذیری ضعیف، نشان داده شد که حاصل ضرب آزاد جبری دو جبر باناخ A و B میانگین‌پذیر دوری است اگر و تنها اگر A و B میانگین‌پذیر دوری باشند. علاوه بر این خواص موروثی این مفهوم و روابطی بین میانگین‌پذیری یک جبر باناخ و خاصیت گسترش اثر ایده‌ال‌هایش را بررسی نمود.

قهرمانی و لوی[7] [۹] چندین مفهوم تقریبی را برای میانگین‌پذیری با توجه به درونی تقریبی بودن همه اشتقاق‌های پیوسته از جبر باناخ A به توی A-مدول‌های باناخ معینی معرفی کردند. در همان مقاله و مقالات بعدی [۱۰]، نویسندگان تفاوت بین حالت تقریبی و کلاسیک را نشان دادند و به بررسی خواص جبرها در هر یک از کلاس‌های جدید پرداختند. با ایده

[1] Derivation
[2] Weak amenability
[3] Johnson
[4] Cyclic derivation
[5] Cyclic amenability
[6] Gronbaek
[7] Ghahramani and Loy

گرفتن از این مفاهیم، جبرهای باناخ میانگین‌پذیر دوری تقریبی[1] در [۶] معرفی و تفاوت آن با میانگین‌پذیری دوری را با ذکر مثال مشخص نمودند. خواص موروثی مفهوم میانگین‌پذیر دوری تقریبی برای جبرهای باناخ، مشابه حالت کلاسیک نشان داده شد. به عنوان نمونه نشان داده شد که جبر باناخ Aمیانگین‌پذیری دوری (تقریبی)است اگر و تنها اگر $A^{\#}$، یکدار شده A، میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) باشد.

فرض کنید B یک جبر باناخ و $\Delta(B)$ نشان دهنده مجموعهٔ همهٔ تابعک‌های خطی ضربی غیر صفر روی B باشد. فضای باناخ B به همراه ضرب بدیهی $xy = 0$ برای هر $x, y \in B$ یک جبر باناخ است. اگر ϕ یک تابعک خطی ضربی روی B باشد در این صورت

$$\phi(x)^2 = \phi(xx) = \phi(0) = 0, \qquad (x \in B)$$

نشان می دهد که $\phi = 0$. بنابراین $\Delta(B) = \emptyset$. این مثال و مثالهای غیر بدیهی دیگر، مثلا $B(H)$، مجموعهٔ همهٔ تبدیلات خطی و پیوسته روی فضای هیلبرت H، نشان می دهد که ممکن است $\Delta(B)$ تهی باشد. همان‌طور که در [۲، گزارهٔ ۲,۳,۱] نشان داده شده است اگر B یک جبر باناخ جابه جایی و یکدار باشد همواره $\Delta(B)$ غیر تهی خواهد بود. بنابراین دسته خیلی بزرگی از جبرهای باناخ وجود دارد که دارای فضای مشخصهٔ غیر تهی هستند.

فرض کنید A و Bدو جبر باناخ و θ عضوی از$\Delta(B)$ باشد. در این صورت فضای برداری $A \times B$ به همراه ضرب جبری

$$(a, b)(c, d) = (ac + \theta(d)a + \theta(b)c, bd) \qquad (a, c \in A, b, d \in B),$$

و نرم $\|(a, b)\| = \|a\| + \|b\|$یک جبر باناخ است که حاصل ضرب θ-لائوی[2] A و B نامیده شده و با نماد $A \times_\theta B$ نمایش دادهمی‌شود. این حاصل ضرب اولین بار توسط لائو[3] [۱۵] برای نوع خاصی از جبرهای باناخ بنام F-جبرها،که بعدها نام جبرهای لائو[4] به خود گرفتند،معرفی و سپس تو سط سنگانی منفرد[5] [۱۹] برای جبرهای باناخ دلخواه گسترش داده شد. این حاصل ضرب نه تنها مثال‌های جدیدی از جبرهای باناخ را به خودی خود معرفی می‌کند بلکه می‌تواند به عنوان منبعی غنی از مثال‌های(نقض) برای اهداف مختلف در آنالیز تابعی و هارمونیک مجرد به حساب آید.

در $A \times_\theta B$ معمولا $A \times \{0\}$ را با A و $B \times \{0\}$ را با B یکی در نظر می‌گیریم. بنابراین A یک ایده‌ال دو طرفه بسته و B یک زیر جبر بسته $A \times_\theta B$ هستند، بعلاوه جبر خارج قسمتی $(A \times_\theta B)/A$ به طور طولپا با B یکریخت است. از نقطه نظر همولوژیکی $A \times_\theta B$ گسترش جبر باناخی به طور قوی شکافندهٔ[6]B به وسیلهٔ A است. این گسترش از خواصی برخوردار است که معمولا توسط گسترش‌های جبر باناخی بطور قوی شکافنده منتقل نمی شود. به عنوان مثال خاصیت جا

[1] Approximately cyclic amenable
[2] θ-Lau product
[3] Lau
[4] Lau algebras
[5] Sangani Monfared
[6] Strongly splitting Banach algebra extension

به جایی در حالت کلی تو سط گ سترش‌های جبر باناخی به طور قوی شکافنده حفظ نمی شود در حالی که $A \times_\theta B$ جابه جایی است اگر و تنها اگر A و B جا به جایی باشند.

به عنوان یک مثال مشهور و جالب از حاصل ضرب لائوی دو جبر باناخ می‌توان به یکدار شدهٔ $A^\#$ از A اشاره کرد که در واقع همان $A \times_\iota \mathbb{C}$ ا ست، جایی که $\iota \in \Delta(\mathbb{C})$ نگا شت همانی ا ست.به همین دلیل ب سیاری از محققان در تلا شند تا برخی از نتایج در خصوص $A^\#$ را به حاصل ضرب θ-لائوی $A \times_\theta B$ تعمیم دهند. برخی از خواص پایه‌ای مثل داشتن همانی تقریبی، مرکز توپولوژیکی و میانگین‌پذیری(ضـــعیف) در [۱۹]، برخی از مفاهیم میانگین‌پذیری مثل n-میانگین‌پذیری ضـــعیف در [۲۱]، میانگین‌پذیری دوری، میانگین‌پذیری تقریبی، میانگین‌پذیری اســـاســـی[۱] در [۸] و میانگین‌پذیری داخلی[۲] در [۴] و برخی خواص همولوژیکی مثل دوتصـــویری[۳] و دو ســـطحی[۴] بودن در [۱۴] مورد مطالعه قرار گرفته اســـت. در [۸] با فرض چگال بودن$\langle A^2 \rangle$در Aنشان داده شده است که $A \times_\theta B$ میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) است اگر و تنها اگر A و B هر دو میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) باشـــند. یکی از اهداف این مقاله بهبود این نتیجه اســـت. به عبارت دیگر ما،در حالت کلی شروط لازم و کافی برای میانگین‌پذیری دروی (تقریبی)$A \times_\theta B$ را به دست خواهیم آورد و نشان می‌دهیم [۸، قضیهٔ ۵،۱] حالت بسیار خاصی از این نتیجه است.

از طرفی دیگر فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A-دومدول باناخ با شد. در این صورت فضای برداری $A \times X$ به ضرب جبری

$$(a,x)(b,y) = (ab, a\cdot y + x\cdot b), \qquad (a,b \in A, \qquad x,y \in X),$$

و نرم $\|(a,x)\| = \|a\| + \|x\|$ یک جبر باناخ ا ست که گ سترش مدولی[۵]A به و سیله X نامیده شده و با نماد $A\oplus_1 X$ نمایش داده می‌شـود.به عنوان یک مثال از جبر باناخ گســترش مدولی می‌توان به جبر باناخ مثلثی[۶]$Tri(A,X,B)$ اشــاره کرد. در واقع می‌توان نشان داد که $Tri(A,X,B) \cong (A\times B)\oplus_1 X.$

در [۷] به مطالعهٔ n-میانگین‌پذیری ضعیف $Tri(A,X,B)$ پرداخته شده و ن‌شان داده ا ست هرگاه A و B یکدار و X یک مدول یکانی باشـد آن‌گاه$(2n+1)$-میانگین‌پذیری ضـعیف $Tri(A,X,B)$ با $(2n+1)$-میانگین‌پذیری ضـعیف A و B معادل است. ژانگ[۷] در[۲۳] ضمن مطالعهٔ n-میانگین‌پذیری ضعیف گسترش مدولی $A\oplus_1 X$ و تعمیم نتایج [۷]، از آن برای پا سخ به چندین م ساله باز [۳]، در خ صوص n-میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ ا ستفاده نموده ا ست. برخی دیگر از خواص این جبر باناخ، مانندمیانگین‌پذیری داخلی در [۴] و دوتصویری بودن و دو سطحی بودن در [۱۷] برر سی شده ا ست.

[1] Essential amenability
[2] Inner amenability
[3] Biprojectivity
[4] Biflatness
[5] Module extension
[6] Triangular Banach algebra
[7] Zhang

خواننده می تواند برای مشاهدهٔ تعمیم نتایج n-میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای فوق به جبرهای گسترش مدولی تعمیم یافته[1](حاصل ضرب نیمه مستقیم تعمیم یافته[2]) به [۲۲] و [۲۰] مراجعه نماید.

هدف دیگر ما در این مقاله مطالعهٔ میانگین‌پذیری دوری این جبر باناخ است. برای این منظور در حالت کلی شروط لازم و کافی برای میانگین‌پذیری دروی (تقریبی) $A\oplus_1 X$ را به دست خواهیم آورد و به عنوان یک حالت خاص نشان می‌دهیم تحت شرایطی، میانگین‌پذیری دروی (تقریبی) جبر باناخ مثلثی $Tri(A,X,B)$ با میانگین‌پذیری دروی (تقریبی) A و B معادل است.

۲. حاصل ضرب لائوی جبرهای باناخ

فرض می‌کنیم A و B دو جبر باناخ و θ عضوی از $\Delta(B)$ باشد. در این صورت فضای باناخ $(A\times_\theta B)^*$ با فضای باناخ $A^*\times B^*$ مجهز به نرم ماکزیمم $\|(f,g)\|=\max\{\|f\|,\|g\|\}$ یکریخت است، [۵]. می‌توان نشان داد که اعمال مدولی $(A\times_\theta B)^*$ به عنوان $(A\times_\theta B)$-دو مدول برای هر $(a,b)\in A\times B$ و هر $(f,g)\in A^*\times B^*$ از طریق روابط زیر مشخص می‌شود:

$$(f,g)\cdot(a,b)=(f\cdot a+\theta(b)f,\, g\cdot b+f(a)\theta),$$

$$(a,b)\cdot(f,g)=(a\cdot f+\theta(b)f,\, b\cdot g+f(a)\theta).$$

به منظور مشخص کردن روابط میان میانگین‌پذیری دوری $A\times_\theta B$ و هر یک از جبرهای باناخ A و B، نیازمند یافتن نمایش اشتقاق های دوری روی $A\times_\theta B$ هستیم. لم زیر که نقش کلیدی در ادامه مقاله خواهد داشت به نمایش اشتقاق‌های دوری روی $A\times_\theta B$ اختصاص دارد.

لم ۲،۱. *فرض کنید A و B دو جبر باناخ و θ عضوی از $\Delta(B)$ باشد. در این صورت اشتقاق دوری پیوسته $D: A\times_\theta B\to(A\times_\theta B)^*$ برای هر $(a,b)\in A\times B$ در ضابطهٔ*

$$D(a,b)=(D_1(a)+S(b),\, D_2(b)-S^*(a)),$$

صدق می‌کند، که در آن

(a) $D_1: A\to A^*$ و $D_2: B\to B^*$ اشتقاق های دوری پیوسته هستند.

(b) $S: B\to A^*$ نگاشتی خطی و کران‌دار است که در روابط زیر صدق می کند،

$$a\cdot S(b)=S(b)\cdot a=0,\quad S(bd)=\theta(b)S(d)+\theta(d)S(b)(a\in A, b,d\in B).$$

علاوه بر این، اشتقاق D درونی (تقریبی) است اگر و تنها اگر $S=0$ و D_1 و D_2 هردو درونی (تقریبی) باشند.

[1] Generalized module extension
[2] Generalized semidirect product

اثبات. طبق [۵، گزارهٔ ۲٫۱] هر نگاشت خطی و پیوسته $D: A \times_\theta B \to (A \times_\theta B)^*$ دارای نمایشی به صورت

$$D(a,b) = \big(D_1(a) + S(b), D_2(b) + T(a)\big)$$

است که در آن $D_1: A \to A^*$، $D_2: B \to B^*$، $S: B \to A^*$ و $T: A \to B^*$ همگی نگاشت‌هایی خطی و پیوسته هستند. همچنین نگاشت D یک اشتقاق است اگر و فقط اگر D_1 و D_2 هر دو اشتقاق بوده، S در شرایط ذکر شده در (b) صدق کند و نگاشت T برای هر $a, c \in A$ و $b \in B$ در شرایط زیر صدق نماید، [۵، گزاره ۲٫۱].

۱) $b \cdot T(a) = T(a) \cdot b,$(

۲) $\theta(b)T(a) = b \cdot T(a) + S(b)(a)\theta,$(

۳) $T(ac) = \big(D_1(a)(c) + D_1(c)(a)\big)\theta.$

از آن‌جا که

$$\begin{aligned} D(a,b)((c,d)) + D(c,d)((a,b)) &= (D_1(a) + S(b), D_2(a) + T(b))((c,d)) \\ &+ (D_1(c) + S(d), D_2(c) + T(d))((a,b)) \\ &= (D_1(a) + S(b))(c) + \big(D_2(a) + T(b)\big)(d) \\ &+ (D_1(c) + S(d))(a) + (D_2(c) + T(d))(b) \\ &= D_1(a)(c) + S(b)(c) + D_2(a)(d) + T(b)(d) \\ &+ D_1(c)(a) + S(d)(a) + D_2(c)(b) + T(d)(b) \end{aligned}$$

با انتخاب $b = d = 0$ و $a = c = 0$ و $a = d = 0$ و $c = b = 0$ در می‌یابیم که اشتقاق D دوری است اگر و تنها اگر اشتقاق‌های D_1 و D_2 هر دو دوری بوده و $T = -S^*$.

سرانجام $D = d_{(f,g)}$ برای برخی $(f,g) \in A^* \times B^*$ اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} (D_1(a) + S(b), D_2(b) - S^*(a)) &= D(a,b) \\ &= (a,b) \cdot (f,g) - (f,g) \cdot (a,b) \\ &= (a \cdot f - f \cdot a, b \cdot g - g \cdot b) \end{aligned}$$

دوباره با انتخاب مقادیر مناسب برای a و b به این نتیجه می‌رسیم که D *درونی (تقریبی) است اگر و تنها اگر* $S = 0$ و D_1 و D_2 *هردو درونی (تقریبی) باشند.* ■

در گزارهٔ زیر شرایطی روی A را بررسی می‌کنیم که تنها عملگری که در شرایط (b) لم ۲٫۱ صدق کند عملگر صفر باشد. قبل از آن یادآوری می‌کنیم که برای جبر باناخ B و عضو $\theta \in \Delta(B)$ تابعک خطی $D: B \to \mathbb{C}$ یک اشتقاق نقطه‌ای در θ است هرگاه

$$D(bd) = \theta(b)D(d) + \theta(d)D(b)(b, d \in B).$$

گزارهٔ ۲،۲. *فرض کنید A و B دو جبر باناخ و θ عضوی از $\Delta(B)$ باشد. در این صورت هیچ نگاشت خطی کران‌دارناصفر $S: B \to A^*$ که در روابط $S(bd) = \theta(b)S(d) + \theta(d)S(b)$ و $aS(b) = S(b)a = 0$ برای هر $a \in A$ و $b, d \in B$ صدق کند وجود ندارد اگر و تنها اگر $A = \overline{\langle A^2 \rangle}$ یا هر اشتقاق نقطه‌ای پیوسته در θ صفر باشد.*

اثبات. فرض کنید $S: B \to A^*$ نگاشتی خطی کران‌دار باشد که به ازای هر $a \in A$ و هر $b, d \in B$، در روابط

$$S(bd) = \theta(b)S(d) + \theta(d)S(b), \quad a \cdot S(b) = S(b) \cdot a = 0$$

صدق کند. اگر $\langle A^2 \rangle$ در A چگال باشد آن‌گاه به وضوح $S = 0$. اگر هر اشتقاق نقطه‌ای پیوسته در θ صفر باشد آن‌گاه به ازای هر $f \in A^{**}$، نگاشت $f \circ S$ یک اشتقاق نقطه‌ای پیوسته در θ است و بنابراین $f \circ S = 0$. این خود نتیجه می‌دهد که $S = 0$.

برعکس، فرض کنید $f \in A^*$ ناصفر و $f|_{A^2} = 0$ و نگاشت $D: B \to \mathbb{C}$ یک اشتقاق نقطه‌ای پیوسته در θ باشد. اگر نگاشت $S: B \to A^*$ را به صورت $S(b) = D(b)f$ تعریف کنیم، آن‌گاه S نگاشتی خطی و پیوسته است که به ازای هر $a \in A$ و هر $b, d \in B$، در

$$S(bd) = \theta(b)S(d) + \theta(d)S(b), \quad a \cdot S(b) = S(b) \cdot a = 0$$

صدق می‌کند. بنابراین $S = 0$. این نتیجه می‌هد که $D = 0$. ■

در [۸] با فرض چگال بودن $\langle A^2 \rangle$در A نشان داده شده است که $A \times_\theta B$ میانگین‌پذیر دوری است اگر و تنها اگر A و B هر دو میانگین‌پذیردوری باشند. در قضیه بعد، ضمن بهبود [۸، قضیهٔ ۵،۱]، در حالت کلی شرایط لازم و کافی برای میانگین‌پذیری دروی (تقریبی) $A \times_\theta B$ را ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۲،۳. *فرض کنید A و B دو جبر باناخ و θ عضوی از $\Delta(B)$ باشد.در این صورت $A \times_\theta B$ میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) است اگر و تنها اگر*

(۱). A و B هر دو میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) باشند.

(۲). $A = \overline{\langle A^2 \rangle}$ یا هر اشتقاق نقطه‌ای پیوسته در θ صفر باشد.

اثبات. اثباتی برای میانگین‌پذیری دوری ارائه می‌دهیم، میانگین‌پذیر دوری تقریبی به طور مشابه اثبات می‌شود.

برای اثبات لزوم، فرض کنید $A \times_\theta B$ میانگین‌پذیر دوری باشد. اگر نگاشت $d: A \to A^*$ یک اشتقاق دوری پیوسته باشد. آن‌گاه $\overline{D}: A \times_\theta B \to (A \times_\theta B)^*$ با ضابطه $\overline{D}(a, b) = (d(a), 0)$ یک اشتقاق دوری پیوسته است که طبق فرض باید درونی باشد. از لم ۲،۱ نتیجه می‌شود که d نیز درونی است. بنابراین Aمیانگین‌پذیر دوری است. میانگین‌پذیری دوری B به طور مشابه اثبات می‌شود. این (۱) را اثبات می‌کند.

برای اثبات (۲)، فرض کنید $S: B \to A^*$ نگاشتی خطی و پیوسته باشد که در شرایط قسمت(b) لم ۲٫۱ صدق می‌کند. با استفاده از لم ۲٫۱ ، نتیجه می‌گیریم $\overline{D}: A \times_\theta B \to (A \times_\theta B)^*$ با ضابطهٔ$\overline{D}(a,b) = (S(b), -S^*(a))$ یک اشتقاق دوری پیوسته است. پس طبق فرض باید درونی باشد. بنابراین $S = 0$. این به همراه گزارهٔ ۲٫۲ اثبات لزوم را کامل می‌کند.

برای اثبات کفایت، فرض کنید $D: A \times_\theta B \to (A \times_\theta B)^*$ یک اشتقاق دوری پیوسته باشد. آن‌گاه

$$D(a,b) = (D_1(a) + S(b), D_2(b) - S^*(a)); \qquad (a \in A, b \in B),$$

به طوری که D_1, D_2 و S در شرایط (a) و (b) لم ۲٫۱ صدق می‌کنند. از شرط (۱) درونی بودن D_1 و D_2 و از شرط (۲) و گزاره ۲٫۲ صفر بودن S نتیجه می‌شود. بنابراین Dدرونی و لذا$A \times_\theta B$ میانگین‌پذیر دوری است.■

فرض کنیدA دارای یک همانی تقریبی کران‌دار راست یا چپ باشد در این صورت $A = \overline{\langle A^2 \rangle}$. بنابراین به عنوان یک نتیجه فوری از قضیهٔ ۲٫۳ گزارهٔ بعد را خواهیم داشت.

نتیجهٔ ۲٫۴. *فرض کنید A و B دو جبر باناخ و θ عضوی از $\Delta(B)$ باشد. اگر A دارای* یک همانی تقریبی کران‌دار راست یا چپ باشد آن‌گاه *$A \times_\theta B$ میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) است اگر و فقط اگر A و B هر دومیانگین‌پذیری دوری (تقریبی) باشند.*

اگر Aمیانگین‌پذیر ضعیف باشد آن‌گاه طبق [۲]، $A = \overline{\langle A^2 \rangle}$. بنابراین گزارهٔ زیر نتیجه دیگری از قضیهٔ ۲٫۳ است.

نتیجهٔ ۲٫۵. *فرض کنید A و B دو جبر باناخ و θ عضوی از $\Delta(B)$ باشد. اگر A میانگین‌پذیر ضعیف* باشد آن‌گاه *میانگین‌پذیری دروی (تقریبی) $A \times_\theta B$ با میانگین‌پذیری دروی (تقریبی) A و B معادل است.*

قبل از ذکر گزارهٔ بعدی از [۱۹] یادآوری می‌کنیم که اگر B یک جبر باناخ و $\theta \in \Delta(B)$ آن‌گاه B ، θ-میانگین‌پذیر چپ نامیده می‌شود هرگاه برای هر B-دومدول باناخ X که

$$b \cdot x = \theta(b)x \qquad (b \in B, x \in X),$$

هر اشتقاق پیوسته از B به توی X^*درونی باشد میانگین‌پذیری راست به طور مشابه تعریف می‌شود. این مفهوم تعمیم میانگین‌پذیری چپ جبرهای لائو است که در [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. جبرهای باناخ میانگین‌پذیر و جبر فوریه $A(G)$ وقتی G یک گروه فشرده موضعی است مثال‌هایی از جبرهای باناخ θ-میانگین‌پذیر چپ هستند، [۱۹].

فرض کنید B، θ- میانگین‌پذیر چپ یا راست باشددر این صورت طبق [۱۳، توجه ۲٫۴]، هیچ اشتقاق نقطه‌ای پیوسته ناصفری در θ وجود ندارد. بنابراین به عنوان نتیجهٔ دیگر از قضیهٔ ۲٫۳ داریم.

نتیجهٔ ۲٫۶. *فرض کنید A و B دو جبر باناخ و θ عضوی از $\Delta(B)$ باشد اگر B، θ- میانگین‌پذیر چپ یا راست باشدآن‌گاه $A \times_\theta B$ میانگین‌پذیری دروی (تقریبی) است اگر و فقط اگر A و B میانگین‌پذیری دروی (تقریبی)باشند.*

اگر Bمیانگین‌پذیر ضعیف باشد آن‌گاه طبق [۲، گزاره ۱,۳]، هیچ اشتقاق نقطه‌ای پیوسته ناصفری در θ وجود ندارد.بنابراین گزارهٔ زیر نتیجهٔ دیگری از قضیهٔ ۲,۳ است.

نتیجهٔ ۲,۷. *فرض کنید A و B دو جبر باناخ و θ عضوی از $\Delta(B)$ باشد. اگر B میانگین‌پذیر ضعیف باشد آن‌گاه میانگین‌پذیری دروی (تقریبی) $A \times_\theta B$ با میانگین‌پذیری دروی (تقریبی) A و B معادل است.*

به عنوان نتیجهٔ مهم دیگر از قضیهٔ ۲,۳، قضیهٔ زیر را داریم که در [۶] اثبات شده است. همچنین [۱۱] را مشاهده کنید.

قضیهٔ ۲,۸. *فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. در این صورت $A^\#$ میانگین‌پذیری دوری (تقریبی) است اگر و تنها اگر Aمیانگین‌پذیری دوری (تقریبی) باشد.*

۳. گسترش مدولی جبرهای باناخ

در این بخش شرایط لازم و کافی برای میانگین‌پذیری دوری گسترش مدولی یک جبر باناخ را ارائه می‌دهیم. به عنوان یک نتیجه این شرایط را برای میانگین‌پذیری دوری جبرهای باناخ مثلثی به دست خواهیم آورد.

فرض کنیدA یک جبر باناخ وXیکA-دو مدول باناخ باشد.در این صورت فضای باناخ $(A\oplus_1 X)^*$ با فضای باناخ $A^* \times X^*$ مجهز به نرم ماکزیمم $\|(f,g)\| = \max\{\|f\|,\|g\|\}$ یکریخت است.می‌توان نشان داد که اعمال مدولی $(A \oplus_1 X)^*$ به عنوان $(A \oplus_1 X)$- دو مدول برای هر $(a,x) \in A \times X$ و هر $(f,g) \in A^* \times X^*$ از طریق روابط زیر مشخص می‌شود:

$$(f,g)\cdot(a,x) = (f\cdot a + g * x, g\cdot a),$$

$$(a,x)\cdot(f,g) = (a\cdot f + x * g, a\cdot g).$$

که $g * x \in A^*$ و$x * g \in A^*$ به ترتیب با ضابطهٔ$(g * x)(a) = g(x\cdot a)$ و$(x * g)(a) = g(a\cdot x)$ تعریف می‌شوند.

با لم زیر شروع می‌کنیم که نمایش اشتقاق‌های دوری روی گسترش مدولی یک جبر باناخ را مشخص می‌کند.

لم ۳,۱. *فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A-دو مدول باناخ باشد. در این صورت نگاشت خطی و پیوسته $D: A \oplus_1 X \to (A \oplus_1 X)^*$ یک اشتقاق دوری است اگر و تنها اگر*

$$D(a,x) = \left(D_A(a) - {D_X}^*(\hat{x}), D_X(a) + S(x)\right)\left((a,x) \in A \times X\right),$$

که در آن

(a) $D_A: A \to A^*$ یک اشتقاق دوری پیوسته است .

(b) $D_X: A \to X^*$ یک اشتقاق پیوسته است .

(c) $S: X \to X^*$یک همریختیA-دو مدولی پیوسته است که در $S(x)(y) + S(y)(x) = 0$ برای هر

$x, y \in X$ صدق می‌کند.

همچنین اشتقاق Dدرونی (تقریبی) است اگر و تنها اگر هر دو اشتقاق D_A و D_X درونی (تقریبی) بوده و $S = 0$

اثبات.با توجه به [۱۶، گزارهٔ ۴,۲] نگاشت $D: A \oplus_1 X \to (A \oplus_1 X)^*$ یک اشتقاق است اگر و فقط اگر

$$D(a, x) = \big(D_A(a) + T(x), D_X(a) + S(x)\big)\big((a, x) \in A \times X\big),$$

که در آن $D_A: A \to A^*$ و $D_X: A \to X^*$ هر دو اشتقاق هستند، $T: X \to A^*$نگاشتی خطی است که برای هر $a \in A$ و $x \in X$

$$T(x \cdot a) = T(x) \cdot a + x * D_X(a) \;\;,\;\; T(a \cdot x) = a \cdot T(x) + D_X(a) * x$$

و$S: X \to X^*$ یک همریختی A-دومدولی است که برای هر $x, y \in X$

$$S(x) * y + x * S(y) = 0.$$

از آن‌جا که

$$\begin{aligned} D(a,x)((b,y)) + D(b,y)((a,x)) &= (D_A(a + T(x), D_X(a) + S(x))((b,y)) \\ &+ (D_A(b) + T(y), D_X(b) + S(y))((a,x)) \\ &= (D_A(a) + T(x))(b) + \big(D_X(a) + S(x)\big)(y) \\ &+ (D_A(b) + T(y))(a) + (D_X(b) + S(y))(x) \\ &= D_A(a)(b) + T(x)(b) + D_X(a)(y) + S(x)(y) \\ &+ D_A(b)(a) + T(y)(a) + D_X(b)(x) + S(y)(x) \end{aligned}$$

با انتخاب مقادیر مناسب برای متغیرهای x, b, a و y درمی‌یابیم که D یک اشتقاق دوری است اگر و تنها اگر اشتقاق D_A دوری باشد، $T(x) = -D_X^*(\hat{x})$و $S(x)(y) + S(y)(x) = 0$ برای هر $x, y \in X.$

سرانجام $D = d_{(f,g)}$ برای برخی $(f, g) \in A^* \times X^*$ اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} \big(D_A(a) - D_X{}^*(\hat{x}), D_X(a) + S(x)\big) &= D(a,x) \\ &= (a,x) \cdot (f,g) - (f,g) \cdot (a,x) \\ &= (a \cdot f - f \cdot a + x * g - g * x, a \cdot g - g \cdot a) \end{aligned}$$

دوباره با انتخاب مقادیر مناسب برای a و x به این نتیجه می‌رسیم که D *درونی (تقریبی) است اگر و تنها اگر* $S = 0$ و D_1 و D_2 *هردو درونی (تقریبی) باشند.* ■

ژانگ در [۲۳] ضمن مطالعهٔ n-میانگین‌پذیری ضعیف گسترش مدولی $A\oplus_1 X$ از آن برای پاسخ به چندین مسالهٔ باز [۳]، در خصوص n-میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ استفاده نموده است. در قضیهٔ بعد، در حالت کلی شرایط لازم و کافی برای میانگین‌پذیری دوری $A \oplus_1 X$ را ارایه می‌دهیم. با الهام از اثبات قضیهٔ زیر می‌توان اثباتی مستقیم و ساده برای دو قضیهٔ اساسی [۲۳] نیز ارایه نمود.

قضیهٔ ۳،۲. *فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A-دومدول باناخ باشد. در این صورت $A \oplus_1 X$ میانگین‌پذیر دوری است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند.*

(۱). A *میانگین‌پذیر* دوری باشد.

(۲). $H^1(A,X^*)=\{0\}$.

(۳). هیچ هم ریختی A-دو مدولی غیر صفر $S: X \to X^*$ موجود نباشد که در $S(x)(y)+S(y)(x)=0$ برای هر $x,y \in X$ صدق کند.

اثبات. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۳) برقرار است و $D: A \oplus_1 X \to (A \oplus_1 X)^*$ یک اشتقاق دوری پیوسته باشد. لذا طبق لم ۳،۱

$$D(a,x)=\big(D_A(a)-{D_X}^*(\hat{x}), D_X(a)+S(x)\big), \qquad \big((a,x)\in A\times X\big).$$

چون $D_A: A \to A^*$ یک اشتقاق دوری پیوسته است پس طبق شرط(۱)، عضو $f \in A^*$ موجود است که $D_A=d_f$. همچنین طبق شرط (۲) عضو $g \in X^*$ موجود است که $D_X=d_g$. سرانجام شرط (۳) نتیجه می‌دهد که $S=0$. بنابراین D درونی است.

بر عکس فرض کنیم $d: A \to A^*$ یک اشتقاق دوری پیوسته باشد. نگاشت $D: A \oplus_1 X \to (A \oplus_1 X)^*$ تعریف شده با ضابطهٔ $D(a,x)=(d(a),0)$ یک اشتقاق دوری پیوسته است که طبق فرض باید درونی باشد. بنا به لم ۳،۱، d نیز درونی است. این (۱) را اثبات می‌کند.

برای اثبات (۲) فرض کنید $d: A \to X^*$ اشتقاقی پیوسته باشد.در این صورت لم ۳،۱ نشان می‌دهد که نگاشت $D: A \oplus_1 X \to (A \oplus_1 X)^*$ با ضابطهٔ

$$D(a,x)=(-d^*(\hat{x}),d(a))$$

یک اشتقاق دوری پیوسته است. طبق فرض D باید درونی باشد. پس اشتقاق d نیز درونی است و بنابراین $H^1(A,X^*)=\{0\}$.

بالاخره فرض کنید نگاشت $S: X \to X^*$ یک هم ریختی A-*دومدولی* باشد که به ازای هر $x,y \in X$ در رابطه $S(x)(y)+S(y)(x)=0$ صدق می‌کند. طبق لم ۳،۱ نگاشت $D: A \oplus_1 X \to (A \oplus_1 X)^*$ با ضابطهٔ $D(a,x)=(0,S(x))$ یک

اشتقاق دوری پیوسته است که طبق فرض باید درونی باشد.بنابراین $S = 0$ ■

فرض کنید A و B دو جبر باناخ و X یک (A, B)-دومدول باناخ باشد؛ یعنی X یک فضای باناخی است که یک A-مدول چپ و یک B-مدول راست باشد که برای هر $a \in A$، $b \in B$ و $x \in X$

$$(a \cdot x) \cdot b = a \cdot (x \cdot b), \qquad \|a \cdot x \cdot b\| \le \|a\|\|x\|\|b\|,$$

در این صورت مجموعهٔ

$$Tri(A, X, B) = \left\{ \begin{bmatrix} a & x \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \ a \in A, b \in B, x \in X \right\}$$

به همراه اعمال ضرب اسکالر، جمع و ضرب ماتریسها و نرم

$$\left\| \begin{bmatrix} a & x \\ 0 & b \end{bmatrix} \right\| = \|a\| + \|b\| + \|x\|$$

تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود که جبر باناخ مثلثی نامیده می‌شود.یادآوری می‌کنیم که هر جبر باناخ مثلثی یک جبر گسترش مدولی است. در واقع $Tri(A, X, B)$ با گسترش مدولی $(A \times B) \oplus_1 X$ به طور طولپا یکریخت جبری است، جایی که $A \times B$ حاصل ضرب مستقیم دو جبر باناخ A و B و X با اعمال

$$(a, b) \cdot x = a \cdot x, \quad x \cdot (a, b) = x \cdot b; \qquad \big((a, b) \in A \times B, x \in X\big),$$

به عنوان یک $(A \times B)$-دومدول در نظر گرفته شده است.

در [۷] به مطالعهٔ n-میانگین‌پذیری ضعیف $Tri(A, X, B)$ پرداخته شده و نشان داده شده است هرگاه A و B یکدار و X یک مدول یکانی باشد آن‌گاه $(2n + 1)$-میانگین‌پذیری ضعیف $Tri(A, X, B)$ با $(2n + 1)$-میانگین‌پذیری ضعیف A و B معادل است. به عنوان نتیجه ای از قضیهٔ ۳،۲، در قضایای زیر میانگین‌پذیری دوری $Tri(A, X, B)$ را بررسی خواهیم کرد که به نوبه خود نتایجی جدید و جالب هستند.

قضیهٔ ۳،۳. *فرض کنید* A *و* B *جبرهای باناخ و* X *یک* (A, B)-دومدول *باناخ باشد. همچنین فرض کنید* A *دارای همانی تقریبی چپ باشد و* $X = \overline{\langle A \cdot X \rangle}$. *در این صورت جبر باناخ مثلثی* $Tri(A, X, B)$ *میانگین‌پذیر دوری است اگر و تنها اگر* A و B میانگین‌پذیر دوری باشند.

اثبات. فرض کنیم $Tri(A, X, B)$ *میانگین‌پذیر دوری* باشد در این صورت با استفاده از قضیهٔ ۳،۲ نتیجه می‌شود که $A \times B$ میانگین‌پذیر دوری است. یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که این با میانگین‌پذیری دوری A و B معادل است.

برعکس فرض می‌کنیم A و B میانگین‌پذیر دوری باشند. برای اثبات میانگین‌پذیری دوری $Tri(A, X, B)$ کافی است نشان دهیم شرایط (۱) تا (۳) قضیهٔ ۳،۲ برقرارند. طبق فرض شرط (۱) برقرار است. برای اثبات شرط (۲) فرض کنید $D_X: A \times B \to X^*$ یک اشتقاق پیوسته باشد. در این صورت $D_X(a, b) = f_A(a) + f_B(b)$ که $f_A: A \to X^*$ و $f_B: B \to X^*$ به ترتیب هم ریختی A-مدولی راست و B-مدولی چپ هستند که با ضابطه های $f_A(a) = D_X(a, 0)$ و $f_B(b) = D_X(0, b)$ تعریف می‌شوند.چون A *دارای همانی تقریبی* چپ است طبق [۱۸، لم ۲،۲] عضو $g \in X^*$ موجود است که $f_A(a) = -g \cdot a$. از طرفی از این‌که D یک اشتقاق است برای هر $a \in A$ و $b \in B$ داریم.

$$f_B(b) \cdot a + b \cdot f_A(a) = 0.$$

بنابراین

$$f_B(b) \cdot a = -b \cdot f_A(a) = -b \cdot (-g \cdot a) = (b \cdot g) \cdot a$$

به عبارت دیگر $(f_B(b) - b \cdot g) \cdot a = 0$.حال چون $\overline{\langle A \cdot X \rangle} = X$ پس $f_B(b) = b \cdot g$. در نتیجه

$$D_X(a,b) = -g \cdot a + b \cdot g = (a,b) \cdot g - g \cdot (a,b) = d_g(a,b).$$

برای اثبات شرط (۳) فرض کنید $S: X \to X^*$ یک هم ریختی $(A \times B)$-دومدولی باشد در این صورت

$$S(a \cdot x)(y) = S\big((a,0) \cdot x\big)(y) = \big((a,0) \cdot S(x)\big)(y) = S(x)\big(y \cdot (a,0)\big) = S(x)(0) = 0.$$

از فرض $X = \overline{\langle A \cdot X \rangle}$ در می‌یابیم که $S = 0$. بنابراین $Tri(A,X,B)$ *میانگین‌پذیر دوری* است. ■

قضیهٔ بعدی به طور مشابه اثبات خواهد شد.

قضیهٔ ۳,۴. *فرض کنید A و B جبرهای باناخ و X یک (A,B)-دومدول باناخ باشد. همچنین فرض کنید B دارای همانی تقریبی راست باشد و $X = \overline{\langle X \cdot B \rangle}$. در این صورت جبر باناخ مثلثی $Tri(A,X,B)$ میانگین‌پذیر دوری است اگر و تنها اگر A* و B میانگین‌پذیر دوری باشند.

سرانجام به عنوان نتیجه ای از قضیه فوق خواهیم داشت.

قضیهٔ ۳,۴. *فرض کنید A و B جبرهای باناخ یکدار و X یک (A,B)-دومدول باناخ یکانی باشد. در این صورت جبر باناخ مثلثی $Tri(A,X,B)$ میانگین‌پذیر دوری است اگر و تنها اگر A* و B میانگین‌پذیر دوری باشند.

References

1. Bade W.G., Curtis P.C.J., Dales H.G., “Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras”, *Proc. London Math. Soc. (3)* 55 (1987), no. 2, 359--377.

2. Dales H.G., “Banach algebras and automatic continuity”, London Mathematical Society Monographs. New Series, 24. Oxford Science Publications.

3. Dales H.G., Ghahramani F., Grønbæk N., “Derivations into iterated duals of Banach algebras”, *Studia Math.* 128 (1998), no. 1, 19--54.

4. Ebrahimi Vishki H.R., Khoddami A.R., “Character inner amenability of certain Banach

algebras”, *Colloq. Math.* 122 (2011), no. 2, 225--232.

5. Ebrahimi Vishki H.R., Khoddami A.R., “n-weak amenability for Lau product of Banach algebras”, *P.U.B. Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.* 77 (2015), no. 4, 177--184.

6. Esslamzadeh G.H., Shojaee B., “Approximate weak amenability of Banach algebras”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 18 (2011), no. 3, 415--429.

7. Forrest B.E., MarcouxL.W., “Weak amenability of triangular Banach algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 354 (2002), no. 4, 1435--1452.

8. Ghaderi E., Nasr-Isfahani R., Nemati M.,“Some notions of amenability for certain products of Banach algebras”, *Colloq. Math.* 130 (2013), no. 2, 147--157.

9. Ghahramani F., Loy R.J., “Generalized notions of amenability”, *J. Funct. Anal.* 208 (2004), no. 1, 229--260.

10. Ghahramani F., Loy R.J., Zhang Y., “Generalized notions of amenability II”, *J. Funct. Anal.* 254 (2008), no. 1, 1776--1810.

11. Grønbæk N.,“Weak and cyclic amenability for noncommutative Banach algebras”, *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)* 35 (1992), no. 2, 315--328.

12. Johnson B.E., “Derivations from $L^1(G)$ into $L^1(G)$ and $L^\infty(G)$ ”, Lecture Notes in Math., 1359, *Springer, Berlin,* (1988), 191--198.

13. Kaniuth E., Lau A.T., Pym J.,“On φ-amenability of Banach algebras”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 144 (2008), no. 1, 85--96.

14. Khoddami A.R., Ebrahimi Vishki H.R., “Biflatness and biprojectivity of Lau product of Banach algebras”, *Bull. Iranian Math. Soc.* 39 (2013), no. 3, 559--568.

15. Lau A.T.M.,“Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups”, *Fund. Math.* 118 (1983), no. 3, 161--175.

16. Medghalchi A.R., Pourmahmood-Aghababa H., “On module extension Banach algebras”, *Bull. Iranian Math. Soc.* 37 (2011), no. 4, 171--183.

17. Medghalchi A.R., Sattari M.H., “Biflatness and biprojectivity of triangular Banach algebras”, *Bull. Iranian Math. Soc.* 34 (2008), no. 2, 115--120, 162.

18. Medghalchi A.R., Sattari M.H., Yazdanpanah T., “Amenability and weak amenability of triangular Banach algebras”, *Bull. Iranian Math. Soc.* 31 (2005), no. 2, 57--69, 87.

19. Monfared M.S.,“On certain products of Banach algebras with applications to harmonic analysis”, *Studia Math.* 178 (2007), no. 3, 277--294.

20. Pourmahmoud-AghababaH., “Derivations on generalized semidirect product of Banach algebras”,*Banach J. Math. Anal.*10(2016), no. 3, 509—522.

21. Ramezanpour M.,“Derivations into various duals of Lau product of Banach algebras”, *Publ. Math. Debrecen* 90 (2017), no. 3-4, 493--505.

22. Ramezanpour M., Barootkoob S., “Generalized module extension Banach algebras: derivations and weak amenability”, *Quaest. Math., 40*(2017), no. 4, 451—465.

23. Zhang Y.,“Weak amenability of module extensions of Banach algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 354 (2002), no. 10, 4131--4151.