Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/
Kharazmi University

An exponential spline for solving the fractional riccati differential equation

Homan Emadifar[1], **Reza Jalilian**[2]

1. Department of Mathematics, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Hamedan, Iran.

E-mail: homan_emadi@yahoo.com

2. Department of Mathematics, Razi University Tagh Bostan, Kermanshah, Iran.

✉E-mail: rezajalilian72@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
25 March 2020
Received in revised form:
24 August 2020
Accepted:
31 October 2020
Published online:
31 December 2022

Keywords:
Fractional Riccati Differential Equation,
Caputo Derivative,
Expositional Spline,
Convergence.

ABSTRACT

Introduction

Fractional calculus is an extension of derivatives and integrals to non-integer orders and it has been widely used to model engineering and scientific problems. Studying fractional calculus is an old topic in mathematical analysis, which goes back to Leibniz (1695) and Euler (1730). Exact solutions for the majority of fractional differential equations cannot be found easily, thus analytical and numerical methods must be used. In fact, several numerical methods for solving fractional differential equations have been presented in the literature and they have their own advantages and limitations. In recent years, the numerical solution of fractional equations has become a popular topic in applied sciences control and engineering. The Riccati equations play a significant role in many fields of engineering and applied science such as the theory of random processes, diffusion problems, transmission-line phenomena and optimal control theory. The Riccati differential equation is named after the Italian Nobleman Count Jacopo Francesco Riccati (1676-1754). In this work, we implement exponential spline method for solving the time fractional nonlinear Riccati initial value problem with the Caputo fractional derivative. Many authors have made attempts to solve these equations using different numerical methods. Some of these methods, such as the Laplace-Adomian-Pade method, the modified homotopy perturbation method, the He's variational iteration method, the Chebyshev wavelet operational matrix method, the finite difference method and Pade-variational iteration method, the shifted Jacobi polynomial integral operational matrix method, The sine-cosine wavelet operational matrix, Variational iteration algorithm and the residual power series method.

Material and methods

There are several definitions of a fractional derivative of order such as Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikove, and Caputo. In this paper, the Caputo fractional derivative is used for the formulation of the problem.

The exponential spline function is presented for solving Riccati differential equations. Applying the continuity of the exponential spline function and its derivative we get the consistency relations. The relations of exponential spline function are utilized to transform the differential equations to the system of algebraic equations. Also, the error analysis of the exponential spline function bases is given. We use exponential spline approximation to develop a family of new numerical methods to obtain smooth approximations to the solution of fractional riccati differential equation. The proposed methods can be used to solve not only the classical Riccati differential equations but also the fractional ones. The convergence analysis of the method has been discussed. Some examples are included to demonstrate the validity and applicability of the technique and to compare the computed results with the other methods.

Results and discussion

Our main aim is to solve the Riccati differential equations by using exponential spline function. We propose two main methods to find an approximate solution of the fractional Riccati equation. The main advantage of our algorithm is that it can be used directly without using an assumption or transformation formulae and the convergence analysis of the method has been discussed. By using the truncation error to eliminate the coefficients of various powers *h* we can obtain classes of the methods. The presented method is its greater accuracy and smooth approximation without using an off-step point. The present method enables us to approximate the solution at every point of the interval [a, b].

Conclusion

In this paper, the exponential spline has been applied to approximate the solution of the fractional riccati differential equations and we have obtained some methods of order-two. To demonstrate the convergence and applicability of the presented methods, some numerical experiments are reported. Comparisons with other methods and the exact solution show that this technique is a good approximation for solving the fractional Riccati differential equations.

Based on the error analysis and convergence of these methods, we find that the order of convergence is two and applies to all kinds of fractional equations.

How to cite: Emadifar H., Jalilian, R. (2022). An exponential spline for solving the fractional riccati differential equation. *Mathematical Researches*, 8 (4), 44-62.

Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/
Kharazmi University

اسپلاین‌نمائی برای حل معادله ریکاتی کسری

هومن عمادیفر[1]، رضا جلیلیان[2]

۱. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران. رایانامه: homan_emadi@yahoo.com
۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران. رایانامه: rezajalilian72@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۰۶
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۰۳
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

واژه‌های کلیدی:
معادلهٔ دیفرانسیل ریکاتی کسری،
مشتق کاپوتو،
اسپلاین نمائی،
همگرایی.

چکیده

در این مقاله با استفاده از دو روش پیشنهادی، تقریبی به‌مراتب کاراتر نسبت به روش‌های عددی موجود برای دسترسی به جواب‌های عددی معادله ریکاتی کسری ارائه می‌گردد. این تقریب برای جواب معادله ریکاتی کسری بر پایه استفاده از توابع اسپلاین نمائی پیشنهاد می‌شود. سپس روابط سازگار اسپلاین نمائی به‌دست‌آمده و معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری گسسته‌سازی می‌گردد و براثر اجرای این عملیات ریاضی یک دستگاه جبری از معادلات به دست می‌آید. به جهت بیان مزایای روش‌های پیشنهادی در این مقاله تحلیل خطا و همگرایی نیز بر اساس این اسپلاین نمائی مورد بحث قرار می‌گیرد. و نهایتاً هر دو روش پیشنهادی از مرتبه همگرایی دو برخوردار می‌باشند. از اهم مزایای این روش‌های پیشنهادی این است که این روش‌ها نه‌تنها برای حل معادلات ریکاتی کسری، بلکه برای انواع معادلات کسری می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. برای نشان دادن کارایی این روش‌ها، مثال‌های عددی از نوع معادلات ریکاتی کسری به واسطه این روش‌ها حل و نتایج به دست آمده را با نتایج سایر روش‌های عددی موجود مقایسه و این ادعا ثابت می‌گردد، که روش‌های موصوف تقریب خوبی برای معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری می‌باشند.

استناد: عمادیفر، هومن؛ جلیلیان، رضاً؛ (۱۴۰۱). اسپلاین‌نمائی برای حل معادله ریکاتی کسری. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۶۲-۴۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱- مقدمه

کاربرد فزاینده مشتقات و انتگرال کسری در معادلات و علوم موجب استقبال و گرایش محققان به سمت حسابان کسری گردید. مطالعه محاسبات کسری یک موضوع قدیمی در علم ریاضیات است. لایبنیتز (۱۹۶۵) و اویلر (۱۷۳۰)، [۲۴و۲۲]. چون در اکثر مواقع حل معادلات دیفرانسیل کسری به‌سادگی به جواب واقعی منجر نمی‌گردد، به ناچار برای نیل به جواب به روش‌های عددی و تحلیلی متوسل می‌شویم. درواقع روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری دارای مزایا و محدودیت‌هایی می‌باشند. در سال‌های اخیر روش‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل کسری به یک موضوع محبوب در علوم کاربردی مانند کنترل و مهندسی تبدیل گردیده است. معادلات ریکاتی نقش‌آفرینان اصلی در بسیاری از حوزه‌های مهندسی و علوم کاربردی نظیر، نظریه فرایندهای تصادفی مسائل انتشار، پدیده‌های خط انتقال و همچنین نظریهٔ کنترل بهینه، انتشار صورت، انتقال حرارت، گردش مایعات، دینامیک زلزله، زمین شناسی، مواد ویسکوالاستیک، کنترل مبدل‌های الکترونیک قدرت، پردازش سیگنال و ... می‌باشند [۱،۲،۷،۲۳،۳۴]. به‌عنوان مصداقی از این کاربردها می‌توان به کاربرد روش‌های منحنی بیزاز برای حل مسائل بهینه کسری با استفاده از معادلات ریکاتی کسری اشاره نمود[۵]. معادله دیفرانسیل ریکاتی به‌افتخار، کنت فرانچسکو ریکاتی (۱۶۷۶-۱۷۵۴) دانشمند مشهور ایتالیایی نام‌گذاری شده است. در این پژوهش روش اسپلاین نمائی را برای به‌دست آوردن جواب تقریبی معادلهٔ ریکاتی کسری غیرخطی زمانی ریکاتی به فرم معادله زیر:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} u(t) + p(t)u(t) + q(t)u^2(t) = r(t), 0 < \alpha < 1, \qquad t \in [0,T], \\ u(0) = d. \end{cases} \tag{۱}$$

را به کار می‌بریم که، D_t^{α} مشتق کسری از نوع کاپوتو بوده و، $r(t), q(t), p(t)$ توابعی برحسب متغیر، t است. همچنین، d مقدار ثابتی است. بسیاری از نویسندگان تلاش نمودند تا این معادلات را با استفاده از روش‌های مختلف عددی مورد حل قرار دهند. بعضی از این روش‌ها مانند لاپلاس- آدومین-پد [۱۳]، آشوب اصلاح‌شده [۲۱]، روش تکرار تغییرات [۹] و روش عملگر ماتریسی موجک چبیشف [۱۵] می‌باشد. همچنین روش تفاضلات متناهی و روش متغیر تکرار تغییرات پد [۳۳]، روش عملگر ماتریسی انتگرالی چندجمله‌ای انتقال‌یافته را نیز می‌توان نام برد. چبیشف [۲۰] و عملگر موجک سینوسی-کسینوسی [۳۶]، الگوریتم تکرار تغییرات [۶]، روش مانده سری توانی[۱۱] نیز از جمله این روش‌ها می‌باشند و همچنین در [۳۷،۳۹] از توابع نمائی برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل بهره می‌گیرند. در این پژوهش به طور عمده بر روش اسپلاین پارامتری ارائه شده در [۱۲،۱۴،۱۹،۲۵] متمرکز می‌شویم. معادلات انتگرالی فردهلم با استفاده از اسپلاین نمائی در[۱۰] به‌صورت عددی حل‌شده است. همچنین از روش اسپلاین نمائی به طور موفقیت‌آمیز برای حل انواع دیگری از معادلات دیفرانسیل کسری بهره گرفته‌شده است [۱۶،۱۷]. وجود جواب برای معادلات دیفرانسیل کسری در[۳۲] مطرح و بررسی‌شده است. در [۲۶] نیز روشی برپایه توابع لاگرانژ برای یافتن یک عملکرد عددی برای حل معادلات دیفرانسیل ریکاتی کسری ارائه شده است که در آن از توابع پایه مثلثاتی استفاده شده

است. در [۲۷] نیز نویسندگان به دنبال یافتن تقریبی از جواب‌های معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری می‌باشند که، در مسیر یافتن این تقریب از روش‌هایی مبتنی بر ترکیب توابع فیبوناچی کسری و بلاک-پالس استفاده می‌شود. این معادلات کسری در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌ها از جمله مدل چینسون کاربرد دارد. در[۲۸] نیز مولفان سعی نموده‌اند که، با استفاده از توابع لاگرانژ مرتبه کسری مدل ریاضی اثر نویز را بر روی دستگاه لیزر حل نمایند. در[۲۹] یک روش عددی جدیدی برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه کسری را بر پایه توابع ترکیبی دوبعدی مانتز-لژاندر معرفی نموده‌اند. به‌تبع همین تلاش‌ها در[۳۰] نیز یک روش کارا به جهت یافتن تقریب جواب‌های معادلات از مرتبه کسری بر پایه چند جمله‌ای‌های مانتز-لژاندر و روش پتروگالیرکین ساخته شده است، که در آن عملگر ماتریسی جدید ریمان-لیوویل برای چندجمله‌ای‌های مانتز-لژاندر با استفاده از تبدیل لاپلاس پیشنهاد شده است و همچنین در[۳۱] یک روش عملیاتی بر اساس مجموعه تائو برپایه چندجمله‌ای‌های لاگرانژ ساخته می‌شود، که می‌تواند برای به دست آوردن جواب تقریبی معادلات کسری از مرتبه متغیر مورد استفاده قرار بگیرد. هدف اصلی ما حل معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری به‌وسیله توابع اسپلاین نمائی می‌باشد. دو روش اصلی را برای یافتن یک تقریب از جواب معادله دیفرانسیل کسری پیشنهاد می‌دهیم. مزیت اصلی این الگوریتم این است که می‌توان آن را به‌طور مستقیم و بدون استفاده از فرض و یا فرمول تبدیلات مورد استفاده قرار داد. در ادامه مقاله به‌صورت زیر مرتب شده است. در بخش بعدی تعاریف اساسی و روش اسپلاین غیر چندجمله‌ای برای تقریب جواب‌های معادله دیفرانسیل ریکارتی کسری مورد توصیف قرار می‌گیرد. همچنین در بخش سوم آنالیز همگرایی روش مورد بحث قرار گرفته و در بخش چهارم با مثال‌های عددی کارایی روش‌ها را به تصویر می‌کشیم، و با نتایج سایر محققان مقایسه می‌نماییم.

۲-تعریف اساسی و توصیف روش اسپلاین‌نمائی

در این بخش برخی از تعاریف و خواص تئوری حسابان کسری را که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌دهیم، ارائه می‌نماییم. همچنین برای، $\alpha > 0$ مشتق کسری کاپوتو به‌صورت زیر تعریف می‌گردد. یادآور می‌گردد که مشتق کسری مورد استفاده در این تحقیق از نوع کاپوتو می‌باشد.

تعریف ۱- اگر u تابعی تعریف‌شده بر بازه باز، (a,b) باشد، آن‌گاه مشتق کسری کاپوتو نیز به شکل زیر مورد تعریف قرار می‌گیرد [۲۴]:

$$D^{\alpha}\big(u(t)\big)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{m-\alpha-1}\ u^{(m)}(x)dx, \alpha>0\,, m-1<\alpha<m. \qquad (۲)$$

همچنین در این بخش تابع اسپلاین نمائی که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌دهیم را به‌صورت زیر تعریف می‌شود. نقاط گره‌ایی، t_i را روی بازهٔ بسته، $[0,T]$ به شکل زیر در نظر گرفته شده:

$$\Delta: 0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T,$$

که $h = \frac{T}{n}$, $t_i = t_۰ + ih$ برای، $i = ۰\,(۱)n$. با فرض بر این‌که، $u(t)$ جواب دقیق رابطهٔ (۱) بوده و، S_i تقریبی از آن باشد که، $u_i = u(t_i)$ تابع اسپلاین، $Q_i \in C^{\infty}[۰,T]$ گذرنده از نقاط، $(t_{i+۱},\ S_{i+۱})$ ، (t_i, S_i) را در نظر می‌گیریم. آن‌گاه در هر زیر بازه اسپلاین پارامتری، $Q_i(t)$ به شکل زیر است [۳۹]،[۳۵]،[۱۷]،[۱۰].

$$Q_i(t) = \sum_{k=۱}^{4} a_{ik} e^{-k\tau(t-t_i)}. \qquad (۳)$$

که، τ متغیر آزاد از اسپلاین می‌باشد. که می‌تواند حقیقی یا موهومی باشد و برای افزایش دقت به‌کار می‌رود [۳۵]. برای دسترسی به ضرایب اسپلاین معرفی‌شده در (۳) در ابتدا روابط زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} Q_i(t_i) = u_i, & Q_i''(t_i) = M_i\,, \\ Q_i(t_{i+1}) = u_{i+1}, & Q_i''(t_{i+1}) = M_{i+1}\,. \end{cases} \qquad (۴)$$

با محاسبات جبری ضرایب رابطهٔ (۳) به شکل زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} \lambda_1 = e^{-\theta}(-5e^{\theta}M_i + 5e^{3\theta}M_{i+1} - 7e^{4\theta}M_{i+1} + 7M_i + 80e^{\theta}\tau^2u_i \\ \qquad -80e^{3\theta}\tau^2u_{i+1} + 28e^{4\theta}\tau^2u_{i+1} - 28\tau^2u_i), \\ \lambda_2 = -e^{2\theta}(7M_i + 7e^{\theta}M_i - 8e^{2\theta}M_i + 8e^{3\theta}M_{i+1} - 7e^{4\theta}M_{i+1} - 7e^{5\theta}M_{i+1} - 7\tau^2u_i \\ \qquad -7e^{\theta}\tau^2u_i + 128e^{2\theta}\tau^2u_i - 128e^{3\theta}\tau^2u_{i+1} + 7e^{4\theta}\tau^2u_{i+1} + 7e^{5\theta}\tau^2u_{i+1}), \\ \lambda_3 = e^{-2\theta}(-e^{\theta}M_i - e^{2\theta}M_i + e^{2\theta}M_{i+1} + e^{3\theta}M_{i+1} - 4e^{4\theta}M_{i+1} + 4M_i + 16e^{\theta}\tau^2u_i \\ \qquad +16e^{2\theta}\tau^2u_i - 16e^{2\theta}\tau^2u_{i+1} - 16e^{3\theta}\tau^2u_{i+1} + 4e^{4\theta}\tau^2u_{i+1} - 4\tau^2u_i), \\ \lambda_4 = -e^{-2\theta}(-3e^{\theta}M_i + 3e^{2\theta}M_{i+1} - 5e^{3\theta}M_{i+1} + 5M_i + 27e^{\theta}\tau^2u_i \\ \qquad -27e^{2\theta}\tau^2u_{i+1} + 5e^{3\theta}\tau^2u_{i+1} - 5\tau^2u_i), \\ \lambda_5 = 3\left(e^{\theta}-1\right)\left(-18e^{\theta} + 7e^{2\theta} + 7\right)\tau^2, \end{cases}$$

$$a_{i1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_5}\,, a_{i2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_5}\,, a_{i3} = \frac{\lambda_3}{\lambda_5}, a_{i4} = \frac{\lambda_4}{\lambda_5}.$$

که در آن، $\theta = h\tau$. همچنین با به کارگیری داریم، $Q_i'(t) = Q_{i-۱}'(t)$ در، $t = t_i$ رابطهٔ زیر به دست می‌آید (خاصیت پیوستگی مشتق اول):

$$\alpha_1u_{i+1} + \alpha_2u_i + \alpha_3u_{i-1} = h^2[\alpha_4M_{i-1} + \alpha_5M_i + \alpha_6M_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, n-1. \qquad (۵)$$

مقادیر ضرایب این رابطه نیز عبارت‌اند از:

$$\alpha_1 = \frac{2e^{3\theta}\left(-11e^{\theta} + e^{2\theta} + 16\right)}{3(e^{\theta}-1)\,(-18e^{\theta} + 7e^{2\theta} + 7)}, \qquad \alpha_2 = \frac{2\left(e^{\theta}+1\right)\left(-28e^{\theta} + 11e^{2\theta} + 11\right)}{3(e^{\theta}-1)\,(-18e^{\theta} + 7e^{2\theta} + 7)},$$

$$\alpha_3 = \frac{2e^{-2\theta}\left(-11e^{\theta} + 16e^{2\theta} + 1\right)}{3(e^{\theta}-1)\,(-18e^{\theta} + 7e^{2\theta} + 7)}, \qquad \alpha_4 = \frac{2e^{-3\theta}\left(e^{\theta}-1\right)}{3\,(-18e^{\theta} + 7e^{2\theta} + 7)\theta^2}\,,$$

$$\alpha_5 = \frac{4\left(e^{\theta}-1\right)\left(e^{\theta}+1\right)}{3\,(-18e^{\theta} + 7e^{2\theta} + 7)\theta^2}, \qquad \alpha_6 = \frac{2e^{-2\theta}\left(e^{\theta}-1\right)}{3\,(-18e^{\theta} + 7e^{2\theta} + 7)\theta^2}.$$

همچنین با فرض پیوستگی مشتق دوم از رابطهٔ، $Q_i''(t) = Q_{i-۱}''(t)$ در، $t = t_i$ نیز به دست می‌آید.

$$h(\alpha_7 m_i + \alpha_8 m_i + \alpha_9 m_{i+1}) = (\alpha_{10} u_{i-1} + \alpha_{11} u_i + \alpha_{12} u_{i+1}), i = 1, \dots, n-1. \qquad (۶)$$

$$\alpha_7 = -2e^{-2\theta}, \quad \alpha_8 = -4(e^{\theta}+1), \quad \alpha_9 = -2e^{-3\theta}, \quad \alpha_{10} = \frac{2e^{-2\theta}(4e^{\theta}-1)\theta}{e^{\theta}-1},$$
$$\alpha_{11} = 10(e^{\theta}+1)\theta, \quad \alpha_{12} = \frac{2e^{3\theta}(e^{\theta}-4)\theta}{e^{\theta}-1}.$$

که مقادیر، M_i , $i= ۰, ۱, ۲, \dots, n$ با شرایط مرزی به فرم، $M_۰ = Q''(t_۰) = M_n = Q''(t_n) = ۰$ جواب‌های دستگاه خطی (۵) را برآورد می‌نمایند. همچنین مقادیر، $m_i, i = ۰, ۱, ۲, \dots, n$ نیز مسیر دسترسی به جواب‌های دستگاه خطی (۶) را با شرایط مرزی زیر:

$$\begin{cases} u_۰' = m_۰ = \frac{-3u_۰+4u_1-u_2}{2h}, \\ u_n' = m_n = \frac{3u_{n-2}-4u_{n-1}+u_n}{2h}. \end{cases} \qquad (۷)$$

را هموار می‌سازد. همچنین با این فرض که، $Q(t)$ یک درونیاب اسپلاین از نوع نمائی برای تابع، $u(t) \in C^8[۰,T]$ باشد. به‌واسطه بسط تیلور در حالت حدی برای زمانی که، $\theta \to ۰$ برای روابط (۵) و (۶) باشد، به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} u_i'' = Q_i'' + \frac{h^2}{12} Q_i^{(4)} + \frac{h^4}{240} Q_i^{(6)} - \frac{h^6}{6048} Q_i^{(8)} + O(h^7), \quad i = 1, \dots, n-1, \ (1) \\ Q_i'' = u_i'' + \frac{h^2}{12} u_i^{(4)} + \frac{h^4}{360} u_i^{(6)} + \frac{17h^6}{60480} u_i^{(8)} + O(h^7), \quad i = 1, \dots, n-1. \ (2) \end{cases} \qquad (۸)$$

و با روشی مشابه نیز به دست می‌آید.

$$\begin{cases} u_i' = Q_i' + \frac{h^4}{180} Q_i^{(5)} + \frac{h^6}{1512} Q_i^{(7)} - \frac{h^8}{14400} Q_i^{(9)} + O(h^9), \quad i = 1, \dots, n-1, \ (3) \\ Q_i' = u_i' - \frac{h^4}{180} u_i^{(5)} + \frac{h^6}{1512} u_i^{(7)} + \frac{h^8}{25920} u_i^{(8)} + O(h^9), \quad i = 1, \dots, n-1. \ (4) \end{cases} \qquad (۹)$$

روش اسپلاین مکعبی و نمائی برای تقریب معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری

در این بخش روش‌هایی برای تقریب مشتق کسری، $D^{\alpha}(u)$ به وسیلهٔ استفاده از تابع اسپلاین نمائی ارائه می‌دهیم.

روش اول

در این روش تقریب گسسته‌ای از مشتق کسری کاپوتو به‌وسیله اسپلاین مکعبی بیان می‌شود (در حالت حدی هنگامی‌که، $\theta \to ۰$ روابط اسپلاین نمائی به اسپلاین مکعبی تبدیل می‌گردد.) [۱۷]،[۱۰]. به‌وسیله مشتق کاپوتو برای، $۰ < \alpha < ۱$ داریم:

$$D^{\alpha}(u(t))\Big|_{t=t_i} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_۰^{t_i} (t_i - \eta)^{-\alpha} u'(\eta) d\eta. \qquad (۱۰)$$

رابطهٔ (۱۰) را به کمک اسپلاین مکعبی به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم و داریم:

$$D^{\alpha}\big(u(t)\big)|_{t=t_i} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{i}\int_{(j-1)h}^{jh}\big(Q'(\eta)+O(h^4)\big)\,(t_i-\eta)^{-\alpha}\,d\eta. \qquad (۱۱)$$

چون، $(t_i-\eta)^{-\alpha}$ در بازه، $[(j\text{-}1)h\,,\,jh]$ تغییر علامت نمی‌دهد. بر اساس قضیه مقدار میانگین وزنی برای انتگرال‌ها داریم[۴]:

$$\int_{(j-1)h}^{jh}\big(Q'(\eta)+O(h^4)\big)(t_i-\eta)^{-\alpha}d\eta = \big(Q'(\eta)+O(h^4)\big)\int_{(j-1)h}^{jh}(t_i-\eta)^{-\alpha}d\eta. \quad (۱۲)$$

که، $\eta \in [(j-۱)h, jh]$. پس از محاسبات ساده بر روی روابط (۳) و (۱۱) به دست می‌آوریم:

$$D_t^{\alpha}u_i = D^{\alpha}\big(u(t)\big)\,|_{t=t_i} = \frac{\mathrm{h}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=1}^{i}\mathrm{Q}'(t_j)\,\big((i-j+1)^{1-\alpha}-(\mathrm{i}-\mathrm{j})^{1-\alpha}\big)+\mathrm{O}(h^4), \qquad (۱۳)$$

$$= \frac{\mathrm{h}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=1}^{i}m_j\,\big((i-j+1)^{1-\alpha}-(\mathrm{i}-\mathrm{j})^{1-\alpha}\big)+\mathrm{O}(h^4).$$

حال با قرار دادن رابطهٔ (۱۳) در رابطهٔ زیر

$$D_t^{\alpha}u_{i+}p(t_i)u_i+q(t_i){u_i}^2 = r(t_i), \quad i=1,\dots,n. \qquad (۱۴)$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\mathrm{h}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=1}^{i}\big((i-j+1)^{1-\alpha}-(i-j)^{1-\alpha}\big)m_j+p_iu_i+q_i{u_i}^2 = r_i, \quad i=1,\dots,n. \qquad (۱۵)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{h^{۱-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=1}a_{ij}\,m_j+p_i\,u_i+q_iu_i^2 = r_i, i=1,\dots,n. \qquad (۱۶)$$

که، $A = (a_{ij}) = \big((i-j+1)^{1-\alpha}-(i-j)^{1-\alpha}\big), p_i = \mathrm{p}(t_i), q_i = \mathrm{q}(t_i)$ و $r_i = r(t_i)$ برای، i=1, 2, 3, …, n. ازآن‌جا که ماتریس ضرایب برای دستگاه‌های (۵) و (۶) برای تقریب، M_i و m_i به‌کاربرده می‌شوند. لذا در حالت حدی وقتی‌که، $\theta \to ۰$ این ماتریس اکیداً قطر غالب می‌باشد، و درنتیجه وارون‌پذیر بوده و داریم، $\|Z^{-1}\| = \|W^{-1}\| < \frac{1}{2}$. بنابراین روابط (۵) و (۶) به شکل این ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases}(1): h^2WM = RU\,,\\(2): hZm = SU\,.\end{cases} \qquad (۱۷)$$

و لذا مقادیر، $(M_0\,, M_1\,, \dots\,, M_n)$ جواب‌های دستگاه خطی(۱) (۱۷) با شرایط، $M_0 = M_n = 0$ می‌باشند. همچنین به وسیله حل روابط بررسی سازگاری در رابطهٔ (۷) و (۲) (۱۷) مقادیر، $(m_0, m_1, \dots, m_n)$ نیز قابل محاسبه بوده و داریم:

$$\begin{cases}(1): M = \frac{1}{h^2} W^{-1} RU + O(h^2)\,,\\ (2): m = \frac{1}{h} Z^{-1} SU + O(h^3).\end{cases} \tag{۱۸}$$

لذا معادلهٔ (۱۶) در حالت ماتریسی به شکل زیر است:

$$\frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\, Am + pU + qU^2 = r\,. \tag{۱۹}$$

که، $q = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n)$، $p = \mathrm{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ و $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^t$. با قرار دادن رابطهٔ (۱۸) در رابطهٔ (۱۹) خواهیم داشت:

$$\frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} AZ^{-1}\, SU + pU + qU^2 = r. \tag{۲۰}$$

روش دوم

در این بخش به‌واسطه تعاریف مشتق کسری برای، $0 < \alpha < 1$ همچنین با استفاده از روابط (۳) ، (۴) و (۱۳) و بعد از انجام یک سری از محاسبات ساده خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\big(u(t)\big)\,\big|_{t=t_i} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{i} \big(Q'(jh) + O(h^3)\big)\,((t_i - jh + h)^{1-\alpha} - (t_i - jh)^{1-\alpha}),\\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{i} ((t_i - jh + h)^{1-\alpha} - (t_i - jh)^{1-\alpha})\,(-\frac{(e^{\theta}-1)(3e^{\theta}-7)M_j}{3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\,\tau})\\ &+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{i} ((t_i - jh + h)^{1-\alpha} - (t_i - jh)^{1-\alpha})\,(\frac{2e^{3\theta}(e^{\theta}-1)M_{j+1}}{3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\,\tau})\\ &- \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{i} ((t_i - jh + h)^{1-\alpha} - (t_i - jh)^{1-\alpha})\,(\frac{2(29e^{\theta}-46e^{2\theta}+18e^{3\theta}-7)\tau u_j}{3(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)})\\ &- \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{i} ((t_i - jh + h)^{1-\alpha} - (t_i - jh)^{1-\alpha})\left(\frac{2e^{3\theta}\big(-11e^{\theta}+e^{2\theta}+16\big)\tau u_{j+1}}{3(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)}\right). \end{aligned} \tag{۲۱}$$

درنتیجه تقریب، u_i به‌وسیله، $\hat{u}_i$ و، M_i به وسیلهٔ $\widehat{M}_i$ برای هر، $i = 1, 2, \dots, n\text{-}1$ در رابطهٔ (۱) (۱۷) صدق می‌کند و لذا داریم:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\big(u(t)\big)\big|_{t=t_i} &= \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{i} \big(Q'(ih) + O(h^3)\big)\,((i - jh + h)^{1-\alpha} - (i - jh)^{1-\alpha}\\ &= \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\,(-\frac{\big(e^{\theta}-1\big)\big(3e^{\theta}-7\big)}{3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\tau}) \sum_{j=1}^{i} ((i-j+1)^{1-\alpha} - (i-j)^{1-\alpha})(\widehat{M}_j) \end{aligned}$$

$$+\ \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{2e^{3\theta}(e^{\theta}-1)}{3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\tau}\right)\sum_{j=1}^{i}((i-j+1)^{1-\alpha}-(i-j)^{1-\alpha})(\widehat{M}_{j+1})$$
$$-\frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{2(29e^{\theta}-46e^{2\theta}+18e^{3\theta}-7)\tau}{3(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)}\right)\sum_{j=1}^{i}((i-j+1)^{1-\alpha}-(i-j)^{1-\alpha})\ \hat{u}_j$$
$$-\ \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{2e^{3\theta}\left(-11e^{\theta}+e^{2\theta}+16\right)\tau}{3(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)}\right)$$
$$\sum_{j=1}^{i}((i-j+1)^{1-\alpha}-(i-j)^{1-\alpha})\ \hat{u}_{j+1}.$$

(۲۲)

از رابط فوق و رابطهٔ (۱۴) به دست می‌آید:

$$r_i-p_iu_i-\ q_iu_i^2\ =\ -\left(\frac{\mathrm{h}^{1-\alpha}\left(e^{\theta}-1\right)\left(3e^{\theta}-7\right)}{\Gamma(2-\alpha)3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\tau}\right)\sum_{j=1}^{i}(\chi_{ij})\,\widehat{M}_J$$
$$+\ \left(\frac{\mathrm{h}^{1-\alpha}2e^{3\theta}\left(e^{\theta}-1\right)}{\Gamma(2-\alpha)3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\tau}\right)\sum_{j=1}^{i}(\psi_{ij+1})\,\widehat{M}_{J+1}$$
$$-\ \left(\frac{2\mathrm{h}^{1-\alpha}\left(29e^{\theta}-46e^{2\theta}+18e^{3\theta}-7\right)\tau}{3\Gamma(2-\alpha)(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)}\right)\sum_{j=1}^{i}(\varphi_{ij})\,\hat{u}_j$$
$$-\ \left(\frac{2\mathrm{h}^{1-\alpha}e^{3\theta}\left(-11e^{\theta}+e^{2\theta}+16\right)\tau}{3\Gamma(2-\alpha)(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)}\right)\sum_{j=1}^{i}(\phi_{ij+1})\,\hat{u}_{j+1}\,.$$

(۲۳)

به طوری‌که، $x_{in}=x_{nj}=\varphi_{in}=\varphi_{nj}=0$ و، $\psi_{nj}=\ \psi_{i1}=\phi_{nj}\ =\phi_{i1}=\ 0$ برای، $i=1,2,\ldots,n$ و، $j=1,2,\ldots,n$. و لذا در حالت ماتریسی داریم:

$$-\ \left(\frac{\mathrm{h}^{1-\alpha}\left(e^{\theta}-1\right)\left(3e^{\theta}-7\right)}{\Gamma(2-\alpha)3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\tau}\right)(\chi)\widehat{M}$$
$$+\ \left(\frac{\mathrm{h}^{1-\alpha}2e^{3\theta}\left(e^{\theta}-1\right)}{\Gamma(2-\alpha)3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\tau}\right)(\psi)\widehat{M}$$
$$-\ \left(\frac{2\mathrm{h}^{1-\alpha}(29e^{\theta}-46e^{2\theta}+18e^{3\theta}-7)\tau}{3\Gamma(2-\alpha)(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)}\right)(\varphi)\widehat{U}$$
$$-\ \left(\frac{2h^{1-\alpha}e^{3\theta}\left(-11e^{\theta}+e^{2\theta}+16\right)\tau}{3\Gamma(2-\alpha)(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)}\right)(\phi)\widehat{U}$$
$$+\ \ pU+\ qU^2-\ \ r=0\,.$$

(۲۴)

با قرار دادن رابطهٔ (۱) (۱۸) در رابطهٔ (۲۴) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{h^{1-\alpha}\left(e^{\theta}-1\right)\left(3e^{\theta}-7\right)}{\Gamma(2-\alpha)3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\tau}\right)(\chi)\left(\frac{1}{h^2}W^{-1}R\widehat{U}\right)\\
&+\left(\frac{h^{1-\alpha}2e^{3\theta}\left(e^{\theta}-1\right)}{\Gamma(2-\alpha)3(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)\tau}\right)(\psi)\left(\frac{1}{h^2}W^{-1}R\widehat{U}\right)\\
&-\left(\frac{2h^{1-\alpha}(29e^{\theta}-46e^{2\theta}+18e^{3\theta}-7)\tau}{3\Gamma(2-\alpha)(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)}\right)(\varphi)\widehat{\mathrm{U}}\\
&-\left(\frac{2h^{1-\alpha}e^{3\theta}\left(-11e^{\theta}+e^{2\theta}+16\right)\tau}{3\Gamma(2-\alpha)(e^{\theta}-1)(-18e^{\theta}+7e^{2\theta}+7)}\right)(\phi)\widehat{\mathrm{U}}\\
&+pU+qU^2-r+O(h^2)=0. \qquad (۲۵)
\end{aligned}
$$

۳- تحلیل همگرایی

در این بخش به بحث در مورد آنالیز همگرایی روش دوم اسپلاین‌نمائی می‌پردازیم. همگرایی روش اول نیز مشابه است. در ابتدا در معادلهٔ (۲۵) (در نقاط، $t_i, i=1,2,\dots,n$) خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}F(t_i\,, u(t_i), u''(t_i))=0, i=0,1,2,\dots,n\,,\\ u(t_0)=d.\end{cases} \qquad (۲۶)
$$

حال با استفاده از نتایج به دست‌آمده از رابطهٔ (۸) داریم:

$$
\begin{cases}F(t_i\,, Q(t_i), Q''(t_i))=0, i=0,1,2,\dots,n\,,\\ Q(t_0)=d.\end{cases} \qquad (۲۷)
$$

رابطهٔ (۲۷) یک دستگاه غیرخطی را می‌سازد که می‌تواند توسط روش تکراری نیوتن حل شود. با فرض بر این‌که، $u(t)$ جواب دقیق مسئله باشد و، $Q(t)\in C^{\infty}[0,T]$ اسپلاین نمائی تقریب زننده، $u(t)$ باشد و در روابط، $i=1,2,\dots,n$-1 و، $Q(t_i)=u(t_i)$، $Q''(t_i)=u''(t_i)$, $i=0,n$ صدق کند. بنابراین تخمین خطا از رابطه، $\|u-Q\|$ حاصل می‌شود. همچنین با فرض بر اینکه، $\widehat{Q}(t)$ اسپلاین محاسباتی حاصل از تقریب، $Q(t)$ باشد. آنگاه برآورد خطا محاسباتی به واسطهٔ روابط، $\|u-Q\|$, $\|u-\widehat{Q}\|$ و $\|\widehat{Q}-Q\|$ به طور جداگانه قابل محاسبه است.

لم: با فرض بر این‌که، $\widehat{Q}(t)$ یک درونیابی اسپلاین یکتا از، $Q(t)$ باشد و همچنین با فرض بر این‌که مشتقات جزئی، F موجود و کراندار به شکل، $\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|\le k_1\,,\left|\frac{\partial F}{\partial u''}\right|\le k_2$ باشند(k_1 و k_2 ثابت می‌باشند.). آن‌گاه برای هر، $0\le i\le n$ داریم:

$$
|F(t_i\,, Q(t_i), Q''(t_i))-F(t_i\,,\widehat{Q}(t_i),\widehat{Q}''(t_i))|\le O(h^2)\,. \qquad (۲۸)
$$

اثبات: با استفاده از [۱۷] و برای، $1 \le i \le n$ داریم:

$$\begin{aligned}F(t_i\,,Q(t_i),Q''(t_i)) - F(t_i\,,\hat{Q}(t_i),\hat{Q}''(t_i)) &= F(t_i\,,Q(t_i),Q''(t_i))\\ &- F(t_i\,,\hat{Q}(t_i),Q''(t_i))\\ &+F(t_i\,,\hat{Q}(t_i),Q''(t_i))\\ &+F(t_i\,,\hat{Q}(t_i),\hat{Q}''(t_i)).\end{aligned}$$

(۲۹)

حال با استفاده از قضیه مقدار میانگین یک، ξ_iو ν_i وجود دارند، به طوری‌که:

$$F\big(t_i,Q(t_i),Q''(t_i)\big) - F\left(t_i,\hat{Q}(t_i),Q''(t_i)\right) = \frac{\partial F}{\partial u}(\xi_i)\left(Q(t_i) - \hat{Q}(t_i)\right),$$

$$F\left(t_i,\hat{Q}(t_i),Q''(t_i)\right) - F\left(t_i,\hat{Q}(t_i),\hat{Q}''(t_i)\right) = \frac{\partial F}{\partial u''}(\nu_i)\left(Q''(t_i) - \hat{Q}''(t_i)\right),$$

از رابطهٔ (۱۸) داریم:

$$\left|Q(t_i) - \hat{Q}(t_i)\right| \equiv O(h^4)$$

$$\left|Q''(t_i) - \hat{Q}''(t_i)\right| \equiv O(h^2)\,.$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned}|F(t_i\,,Q(t_i),Q''(t_i)) - F(t_i\,,\hat{Q}(t_i),\hat{Q}''(t_i))| &\le k_1\left|Q(t_i) - \hat{Q}(t_i\,)\right|\\ &+ k_2\left|Q''(t_i) - \hat{Q}''(t_i)\right|\\ &\le k_1 O(h^4) + k_2 O(h^2)\\ &\equiv O(h^2)\,.\end{aligned}$$

(۳۰)

قضیه: با فرض بر اینکه، $u(t) \in C^2\,[\text{۰}, T\,]$ جواب دقیق رابطه (۱) باشد و، $Q(t)$ یک تقریب اسپلاین نمائی از، $u(t)$ باشد، داریم :

$$\|u(t)\ -\ Q(t)\|\ \equiv\ O(h^2).$$

اثبات: چون، $\hat{Q}(t)$ درونیاب، $u(t)$ می‌باشد. لذا در رابطه (۱) صدق می‌کند، بنابراین یک ثابت متناهی، ϱ_1 مستقل از، h موجود است که:

$$\|u(t)\ -\ Q(t)\|\ \equiv\ O(h^2).$$

حال با استفاده از نامساوی مثلثی و لم فوق داریم:

$$\|u(t) - Q(t)\| \le \left\|u(t) - \hat{Q}(t)\right\| + \left\|\hat{Q}(t) - Q(t)\right\|\ \equiv O(h^2).$$

اثبات همگرایی روش اول نیز به شیوه مشابه امکان‌پذیر است.

۴- مثال‌های عددی

در این بخش برای نشان دادن کارایی روش‌های پیشنهادی در بخش‌های قبلی مثال‌هایی از معادلات دیفرانسیل ریکاتی کسری را در نظر گرفته و با روش‌های پیشنهادی به حل آن‌ها پرداخته می شود. سپس نتایج حاصله از این اقدام را با جواب‌های حاصل‌شده از سایر روش‌های عددی موجود را به بوته قضاوت و مقایسه می‌گذاریم.

مثال یک: معادلهٔ ریکاتی کسری زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}\mathrm{u(t)} + u^2(\mathrm{t}) = 1, 0 < \alpha \leq 1, \quad t \in [0,T] \ , \\ u(0) = 0. \end{cases} \qquad (۳۱)$$

جواب دقیق، $\alpha =$۱ ، $u(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ می‌باشد. در جدول ۱ این مثال با روش دوم و طول گام، ۰/۰۱ برای، $\alpha =$۰/۵ ، $\alpha =$۰/۷۵ ، $\alpha =$۰/۹۹۹۹ و $\alpha =$۱ حل شده و جواب به‌دست آمده در نقاط، $x =$ ۰/۱, ۰/۲ , … , ۰/۹ و ۱ آورده شده و همچنین در جدول ۲ این مثال با روش اول با، $\alpha =$۰/۷۵ ، و طول گام، ۰/۰۱ حل شده و جواب‌های به‌دست آمده در نقاط، $x =$ ۰/۲, ۰/۴ , ۰/۶ و ۰/۸ با روش اختلال هموتوپی اصلاح شده و اختلال هموتوپی پیشرفته [۸] ، توابع ترکیبی [۱۶] ، اختلال هموتوپی اصلاح شده [۲۱]، و چندجمله‌ای برنشتاین [۳۸] مقایسه شده است.

مثال دو: معادله ریکاتی کسری زیر را داریم.

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}u(t) - 2u(t) + u^2(t) = 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t \in [0,T], \\ u(0) = 0\ . \end{cases} \qquad (۳۲)$$

که جواب دقیق برای، $\alpha =$۱ ، $u(t) = 1 + \sqrt{2}\,\tan^{-1}(\sqrt{2}\,t + \frac{1}{2}\ln\,(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}))$ می‌باشد. جواب‌های عددی مثال ۲ با استفاده از روش دوم برای مقادیر، $\alpha =$۰/۲۵, ۰/۷۵, ۰/۹۹ و، $n =$ ۱۰۰ و همچنین با به‌کار بردن رابطهٔ (۶) با شرایط مرزی (۷) برای ($\alpha =$ ۱) در جدول ۳ آورده شده است. در جدول ۴ جواب‌های عددی به‌دست آمده با طول گام، ۰/۰۱ و $\alpha =$۰/۵ در نقاط، $x =$ ۰/۱, ۰/۲ , … , ۰/۹ آورده شده و همچنین با نتایج عددی روش موجک‌های چیبیشف [۱۵] و توابع ترکیبی [۱۶] مقایسه گردیده است.

مثال سه: معادله ریکاتی کسری به شکل زیر را داریم.

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}u(t) - u(t) + u^2(t) = 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t \in [0,T], \\ u(0) = \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (۳۳)$$

که جواب دقیق برای، $\alpha =$۱ ، $u(t) = \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}$ است.

در جدول ۵ ماکزیمم خطای مطلق و زمان اجرای برنامه برحسب ثانیه و همچنین مرتبه همگرایی، برای مثال‌های ۲، ۱، و ۳ با استفاده از رابطهٔ (۶) با شرایط مرزی(۷) در حالت صحیح ($\alpha =$ ۱) و ($h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}$) آورده شده است.

جدول ۱: تقریب جواب‌های مثال یک با روش دوم به ازای، ۰/۹۹۹ , ۰/۷۵ , ۰/۵ = α و، ۱۰۰ = n و برای رابطهٔ (۶) با شرایط مرزی (۷) در حالت صحیح(α = ۱).

روش دوم α=۰/۵	روش دوم α=۰/۷۵	روش دوم α=۰/۹۹۹۹	رابطهٔ (۶) با شرایط مرزی (۷) برای α=۱	جواب واقعی	x
۰/۳۲۲۷۳۹	۰/۱۸۴۹۳۹	۰/۰۹۹۵۹۴	۰/۰۹۹۶۶۸	۰/۰۹۹۶۶۷	۰/۱
۰/۴۳۲۴۰۴	۰/۳۰۵۴۵۱	۰/۱۹۷۰۳۰	۰/۱۹۷۳۷۵	۰/۱۹۷۳۷۵	۰/۲
۰/۵۰۱۶۲۵	۰/۴۰۰۴۹۵	۰/۲۹۰۵۴۴	۰/۲۹۱۳۱۳	۰/۲۹۱۳۱۳	۰/۳
۰/۵۵۱۰۸۲	۰/۴۷۷۷۹۶	۰/۳۷۸۶۶۰	۰/۳۷۹۹۴۹	۰/۳۷۹۹۴۸	۰/۴
۰/۵۸۸۷۷۸	۰/۵۴۱۴۶۳	۰/۴۶۰۲۷۲	۰/۴۶۲۱۱۷	۰/۴۶۲۱۱۷	۰/۵
۰/۶۱۸۷۳۴	۰/۵۹۴۳۱۹	۰/۵۳۴۶۶۹	۰/۵۳۷۰۴۹	۰/۵۳۷۰۴۹	۰/۶
۰/۶۴۳۲۶۶	۰/۶۳۸۴۹۵	۰/۶۰۱۵۱۷	۰/۶۰۴۳۶۸	۰/۶۰۴۳۶۸	۰/۷
۰/۶۶۳۸۲۳	۰/۶۷۵۶۵۱	۰/۶۶۰۸۱۳	۰/۶۶۴۰۳۷	۰/۶۶۴۰۳۶	۰/۸
۰/۶۸۱۳۶۴	۰/۷۰۷۱۰۱	۰/۷۱۲۸۱۲	۰/۷۱۶۲۹۸	۰/۷۱۶۲۹۸	۰/۹
۰/۷۳۱۳۹۵	۰/۷۳۱۳۹۵	۰/۷۵۳۷۳۸	۰/۷۶۱۵۹۴	۰/۷۶۱۵۹۴	۱/۰

جدول ۲: جواب‌های عددی مثال یک با روش اول به ازای، ۰/۷۵ = α و، ۱۰۰ = n و مقایسه با منابع [۸], [۱۶], [۲۱] و [۳۸].

توابع ترکیبی [۱۶] N = ۱۶	روش اختلال هموتوپی اصلاح شده [۲۱]	روش اختلال هموتوپی پیشرفته[۸]	روش اختلال هموتوپی اصلاح شده [۸]	چندجمله‌ای برنشتاین [۳۸] N = ۱۱	روش اول	x
۰/۳۰۹۹	۰/۳۱۳۸	۰/۳۲۱۴	۰/۳۱۳۸	۰/۳۰۹۹	۰/۳۰۵۴	۰/۲
۰/۴۸۱۶	۰/۴۹۲۹	۰/۵۰۷۷	۰/۴۹۲۹	۰/۴۸۱۶	۰/۴۷۷۸	۰/۴
۰/۵۹۷۸	۰/۵۹۷۴	۰/۶۲۵۹	۰/۵۹۷۴	۰/۵۹۷۸	۰/۵۹۴۳	۰/۶
۰/۶۷۸۸	۰/۶۶۰۴	۰/۷۰۲۸	۰/۶۶۰۴	۰/۶۷۸۸	۰/۶۷۵۶	۰/۸

جدول ۳: جواب‌های عددی مثال دوم به‌واسطه اجرای روش دوم برای مقادیر، ۰/۹۹ , ۰/۷۵ ,۰/۲۵ = α و، ۱۰۰ = n و همچنین با استفاده از رابطهٔ (۶) با شرایط مرزی (۷) در حالت صحیح (α = ۱).

روش دوم α=۰/۲۵	روش دوم α=۰/۷۵	روش دوم α=۰/۹۹	رابطهٔ (۶) با شرایط مرزی (۷) برای α=۱	جواب واقعی	x
۱/۲۰۲۳۶	۰/۲۴۱۰۶۹	۰/۱۱۵۸۵۴	۰/۱۱۰۲۹۵	۰/۱۱۰۲۹۵	۰/۱
۱/۳۸۳۰۱	۰/۴۷۲۲۶۷	۰/۲۵۳۱۴۱	۰/۲۴۱۹۷۷	۰/۲۴۱۹۷۷	۰/۲
۱/۴۷۸۵۹	۰/۷۰۸۵۵۳	۰/۴۱۱۹۹۸	۰/۳۹۵۱۰۵	۰/۳۹۵۱۰۵	۰/۳
۱/۵۴۱۷۵	۰/۹۳۸۰۶۲	۰/۵۸۹۹۳۹	۰/۵۶۷۸۱۲	۰/۵۶۷۸۱۲	۰/۴
۱/۵۸۸۰۹	۱/۱۴۹۱۲	۰/۷۸۲۰۸۱	۰/۷۵۶۰۱۵	۰/۷۵۶۰۱۵	۰/۵
۱/۶۲۴۲۹	۱/۳۳۴۴۷	۰/۹۸۱۵۵۹	۰/۹۵۳۵۶۶	۰/۹۵۳۵۶۶	۰/۶
۱/۶۵۳۷۳	۱/۴۹۱۷۷	۱/۱۸۰۴۷	۱/۱۵۲۹۵	۱/۱۵۲۹۵	۰/۷
۱/۶۷۸۴۰	۱/۶۲۲۳۲	۱/۳۷۱۰۹	۱/۳۴۶۳۶	۱/۳۴۶۳۶	۰/۸
۱/۶۹۹۵۴	۱/۷۲۹۳۱	۱/۵۴۷۰۶	۱/۵۲۶۹۱	۱/۵۲۶۹۱	۰/۹

جدول ۴: مقایسه جواب‌های عددی روش دوم برای مثال دو با منابع، [۱۵]، [۱۶] و به ازای، $\alpha = ۰/۵$ و $n = ۱۰۰$.

توابع ترکیبی [۱۶]	موجک چیبیشف [۱۵]	روش دوم با $n = ۱۰۰$	x
۰/۵۹۲۸۰۵	۰/۵۹۲۷۵۶	۰/۵۷۷۳۵۰	۰/۱
۰/۹۳۳۲۱۳	۰/۹۳۳۱۷۹	۰/۹۲۳۳۰۰	۰/۲
۱/۱۷۴۰۱	۱/۱۷۳۹۸	۱/۱۶۸۱۰	۰/۳
۱/۳۴۶۶۷	۱/۳۴۶۶۵	۱/۳۴۳۴۵	۰/۴
۱/۴۷۳۹۰	۱/۴۷۳۸۹	۱/۴۷۲۳۲	۰/۵
۱/۵۷۰۵۸	۱/۵۷۰۵۷	۱/۵۶۹۸۷	۰/۶
۱/۶۴۶۲۰	۱/۶۴۶۱۹	۱/۶۴۵۸۱	۰/۷
۱/۷۰۶۸۸	۱/۷۰۶۸۸	۱/۷۰۶۴۲	۰/۸
۱/۷۵۶۶۵	۱/۷۵۶۶۴	۱/۷۵۵۸۸	۰/۹

جدول ۵: ماکزیمم خطای مطلق و زمان اجرای برنامه برحسب ثانیه و مرتبه همگرایی، جواب‌های عددی بدست آمده از رابطهٔ (۶) با شرایط مرزی(۷) در حالت صحیح ($\alpha = ۱$) و $\left(h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}\right)$ برای هر سه مثال.

زمان محاسبات برای مثال یک	مرتبه همگرایی برای مثال یک	مثال یک	زمان محاسبات برای مثال دو	مرتبه همگرایی برای مثال دو	مثال دو	زمان محاسبات برای مثال سه	مرتبه همگرایی برای مثال سه	مثال سه	n
۲/۸۰		۳/۵۲e−۳	۲/۸۰		۴/۰۶e−۲	۲/۹۲		۵/۲۵e−۴	۴
	۲/۰۹			۲/۶۰			۲/۲۲		
۲/۸۳		۸/۲۸e −۴	۲/۸۶		۶/۶۷e−۳	۲/۹۷		۱/۱۳e−۴	۸
	۲/۰۴			۲/۳۵			۲/۱۰		
۲/۸۹		۲/۰۲e−۴	۲/۸۹		۱/۳۱e−۳	۳/۰۸		۲/۶۳e−۵	۱۶
	۲/۰۱			۲/۱۴			۲/۰۵		
۲/۹۵		۴/۹۹e−۵	۲/۹۲		۲/۹۷e−۴	۳/۲۴		۶/۳۸e−۶	۳۲
	۲/۰۱			۲/۰۶			۲/۰۲		
۳/۲۰		۱/۲۴e−۵	۳/۲۵		۷/۱۲e−۵	۳/۳۸		۱/۵۷e−۶	۶۴
	۲/۰۰			۲/۰۳			۲/۰۱		
۳/۵۵		۳/۰۹e−۶	۳/۸۱		۱/۷۵e−۵	۳/۸۲		۳/۸۹e−۷	۱۲۸
	۲/۰۰			۲/۰۱			۲/۰۰		
۴/۳۳		۷/۷۴e−۷	۴/۸۳		۴/۳۳e−۶	۴/۶۸		۹/۶۹e−۸	۲۵۶
	۲/۰۰			۲/۰۰			۲/۰۰		
۶/۲۱		۱/۹۳e−۷	۶/۹۴		۱/۰۸e−۶	۶/۴۷		۲/۴۲e−۸	۵۱۲
	۲/۰۰			۲/۰۰			۲/۰۰		
۱۰/۴۹		۴/۸۳e−۸	۱۰/۴۳		۲/۶۹e−۷	۱۱/۰۵		۶/۰۴e−۹	۱۰۲۴

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک اسپلاین نمائی برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل ریکاتی کسری به‌کاربرده می‌شود. بر این اساس اهتمام نویسندگان بر اثبات این موضوع بود که دو روش ارائه شده در این مقاله از این قابلیت برخوردارند که تقریب بهتری برای حل معادله ریکاتی کسری فراهم می‌آورند. با مقایسه جواب‌های حاصله با جواب‌های واقعی و جواب‌های مکتسبه از سایر روش‌های عددی موجود به این نتیجه می‌رسیم که روش‌های ارائه گردیده تقریب خوبی برای حل معادلات

دیفرانسیل ریکاتی کسری است. ولی ازلحاظ همگرایی هر دو روش هم‌مرتبه می‌باشند. به دلیل استفاده از تابع اسپلاین در این مقاله و نظر به این‌که روش اسپلاین نسبت به روش‌های نیمه‌تحلیلی مانند اختلال هموتوپی اصلاح‌شده، اختلال هموتوپی پیشرفته، تکرار تغییرات و... از همگرایی تضمین‌شده برخوردار است و نیز چون درروش اسپلاین برخلاف روش تفاضلات متناهی نه‌تنها جواب معادله، بلکه مشتقات جواب را در هر نقطه تقریب می‌زند و همچنین زمانی که معادلهٔ (۱) گسسته سازی می‌گردد ماتریس ضرایب مجهولات اکیداً غالب قطری است. لذا پس از مقایسه جواب‌های حاصل از روش‌های پیشنهادی در این مقاله با جواب‌های سایر روش‌های موجود در مقالاتی که با آن‌ها مقایسه صورت پذیرفته است، درمی‌یابیم که روش‌های معرفی گشته در این مقاله از حیث زمان محاسبات مقرون به صرفه‌تر و بعضاً از مرتبهٔ همگرایی بهتری برخوردارند.

References

1. Axtel M., Bise E. M., "Fractional Calculus applications in control systems", Proceedings of the IEEE National Aerospace and electronics Conference. New York. (1990) 563-566.

2. Battaglia J. L., Cois O., Puigsegur L., and Oustaloup A., "Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model", Int. J. Heat mass Transf. 44(2001) 2671-2680

3. Belloura A., Sbibih D., and Zidna A., "Two cubic spline methods for solving Fredholm integral equations", Appl. Math. Comput. 276(2016) 1-11.

4. Burden R. I., Faires J. D., "Numerical Analysis (eighth edition), Tomson Brooks/ cole", (2005).

5. Ghomanjani F., "A numerical technique for solving fractional optimal control problems and fractional Riccati differential equations", Egyptian Mathematical Society. (2016) 638-643.

6. Ghorbani A., Momani S., "An effective variational iteration algorithm for solving Riccati differential equations", Appl. Math. Lett. 23(2010) 922-927.

7. Hilfer R., "Fractional Calculus in Physics", World Scientific (2000).

8. Hosseinnia S. H., Ranjbar A., and Momani S., "Using an enhanced homotopy perturbation method in fractional differential equations via deforming the linear part", Comput. Math. Appl. 56(2008) 3138-3149.

9. Jafari H., Tajadodi H., "Hes variational iteration method for solving fractional Riccati differential equation", Int. J. Differ. Equ. (2010) 8 pages.

10. Jalilian R., Tahernezhad T., "Exponential spline method for approximation solution of Fredholm integro-differential equation", I. J. Comput Math. (2019) 791-801. DOI: 10.1080/00207160.2019.1586891.

11. Jaradat A. M., Alquran J. M., "New computational method for solving fractional Riccati equation", J. Math. Computer. Sci. 17(2017)106-114. DOI:10.22436/jmcs.017.01.10.

12. Kadalbajoo M. K., Patidar K. C., "Tension spline for the numerical solution of singularly perturbed non-linear boundary value problems", Comput. Appl. Math. 21 (3) (2002)717-742.

13. Khan N. A., Ara A., and Khan N. A., "Fractional-order Riccati differential equation: analytical approximation and numerical results", Adv. Differ. Equ. (2013)16 pages.

14. Khan A., "Parametric cubic spline solution of two point boundary value problems", Appl. Math. Comput. 154(2004) 175-182.

15. Li Y. L., "Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets", Commun Nonlinear Sci Numer Simul. 15(2010) 2284-2292.

16. Maleknejad K. h., Torkzadeh L., "Hybrid functions approach for the fractional Riccati differential equation". Filomat. 30(9) (2016) 2453-2463.

17. Maleknejad K. h., Rashidinia J., and Jalilian H., "Nonpolynomial spline functions and Quasilinearization". FILOMAT. 32 (11) (2018) 3947-3956.

18. Merdan M., "On the Solutions Fractional Riccati Differential Equation with Modified Riemann-Liouville Derivative", International Journal of Differential Equations Volume, Article ID 346089, (2012)17 pages. DOI:10.1155/2012/346089.

19. Mohanty R. K., Arora U., "A family of non-uniform mesh tension spline methods for singularly perturbed two-point singular boundary value problems with significant first derivatives", Appl. Math. Comput. 172 (2) (2006) 531-554.

20. Neamaty A., Agheli B., and Darzi R., "The shifted Jacobi polynomial 1 integral operational matrix for solving Riccati differential equation of fractional order", Appl. Math. 10(2015) 878-892.

21. Odibat Z., Momani S.," Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation 13 of fractional order", Chaos Solitons Fractals. 36(2008) 167-174.

22. Oldham K. B., Spanier J., "The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order", New York: Academic Press (1974).

23. Podlubny I., "Applications of fractional-order derivatives to Calculation of heat load intensity change in blast furnace walls ", Transactions of Tech, univ. of Kosice, 5(1995) 137-144.

24. Podlubny I., "The Fractional Calculus" , New York: Academic Press (1999).

25. Rashidinia J., Jalilian R., "Non-polynomial spline for solution of boundary-value problems in plate deflection theory", I. J. Comput Math. 84(2007) 1483-1494.

26. Sabermahni S., Ordokhani Y., and Yousefi S. A., "Numerical approach based on fractional-order Lagrange polynomials for solving a class of fractional differential equations", S. B. M. A. C. (2018) 3846-3868.

27. Sabermahni S., Ordokhani Y., and Yousefi S. A., "Fractional‐order Fibonacci‐hybrid functions approach for solving fractional delay differential equations", Eng. Comput. (2020) 795-806.

28. Sabermahni S., Ordokhani Y., and Yousefi S. A., "Fractional-order general Lagrange scaling functions and their applications", BIT. Numer. Math. (2020) 101-128.

29. Sabermahni S., Ordokhani Y., and Yousefi S. A., "Two-dimensional Müntz–Legendre hybrid functions: theory and applications for solving fractional-order partial differential equations ", Comp. Appl. Math. 39, 111 (2020). https://doi.org/10.1007/s40314-020-1137-5.

30. Sabermahni S., Ordokhani Y., "A new operational matrix of Müntz-Legendre polynomials and Petrov- Galerkin method for solving fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations", CMDE. 8(3) (2020) 408-423.

31. Sabermahani, S., Ordokhani, Y., and Lima, P.M., "A Novel Lagrange Operational Matrix and Tau-Collocation Method for Solving Variable-Order Fractional Differential Equations ", Iran J Sci Technol Trans Sci .44 (2020) 127–135. https://doi.org/10.1007/s40995-019-00797-z.

32. Sife K. I., "Existence of solution for some two-point boundary value fractional differential equations", Turk. J. Math. 42(2018) 2953-2964.

33. Sweilam N. H., Khader M. M., and Mahdy A. M. S., "Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation", Appl. Math. 7(2012) 595-608.

34. Torvik P. J., Bagley R. L., "On the appearance of the Fractional derivative in the behavior of real materials", Transactions of the ASME. 51(1984) 294-298.

35. Van Daele M., Vanden Berghe G., and De Meyer H., "A smooth approximation for the solution of a fourth-order boundary value problem based on Nonpolynomial splines", J. Comput. Appl. Math. 51(1994) 383-394.

36. Wang Y., Tianhe Yin T., and Zhu L., "Sine-cosine wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order Riccati differential equations", Adv. Differ. Equ. 222(2017). DOI 10.1186/s13662-017-1270-7.

37. Yuzbasi S., Sezer M., "An exponential matrix method for solving systems of linear differential equations", Math. Meth. Appl. Sci. 37(2013) 336-348.

38. Yuzbasi S., "Numerical solutions of fractional Riccati type differential equations by means of the Bernstein polynomial", Appl. Math. Comput. 219(2013) 6328- 6343.

39. Yuzbasi S., "An exponential method to solve linear Fredholm-Volterra integrodifferential equations and residual improvement", Turk. J. Math. 42(2018) 2546- 2562.