

## بررسی تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک در فضای فینسلری

سمانه سادات صابرعلی\*، بهمن رضایی  
دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم، گروه ریاضی

پذیرش: ۹۹/۰۴/۱۸

دریافت: ۹۹/۰۲/۰۳

### چکیده

مترهای راندرز یک رده مهم از مترهای فینسلری هستند که توسط یک متر ریمانی  $\alpha$  و  $1 - \beta$  فرمی  $\beta$  به صورت  $F = \alpha + \beta$  تعریف می‌شود. در این مقاله ویژگی‌های تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک در فضای راندرزی مطالعه شده است، همچنین اثبات می‌کنیم که یک تبدیل همدیس در یک فضای اینشتینی ضعیف یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک است. در ادامه نشان می‌دهیم که نتیجه مشابهی برای مترهای راندرز با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف و با انحنای بروالد ایزوتروپیک ضعیف برقرار است.

**واژه‌های کلیدی:** تبدیل حافظ دایره ژئودزیک، متر فینسلر، انحنای پرچمی ایزوتروپیک، انحنای بروالد میانگین

### مقدمه

در یک فضای اقلیدسی یک دایره ژئودزیک یک خط راست یا یک دایره با شعاع مثبت متناهی است و این مفهوم با استفاده از التصاق لوی چویتا به هندسه ریمانی توسعه داده می‌شود. در هندسه ریمان یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک تبدیلی است که دایره‌های ژئودزیک را حفظ می‌کند. وگل<sup>۱</sup> در هندسه ریمان اثبات کرد که هر دیفئومورفیسم حافظ دایره، همدیس است. منیفلدهای نیمه ریمانی  $(M, g)$  را در نظر گرفته، یک دیفئومورفیسم همدیس  $f: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$  به این معنی است که  $f^* \bar{g}$  یک ضرب اسکالر مثبتی از  $g$  است. اگر این ضرب اسکالر ثابت باشد آن‌گاه  $f$  متجانس است [۶]. در سال ۱۹۴۰ یانو تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک منیفلدهای ریمانی را معرفی کرد و نظریه هندسه تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک در یک سری از مقالات توسط یانو توسعه داده شد [۱]. یک دایره ژئودزیک در هندسه ریمان، مانند هندسه فینسلر، یک منحنی است که انحنای اول فرنه آن  $k_1$  ثابت و انحنای دوم آن  $k_2$  صفر است و به طور معادل منحنی است که انحنای آن ثابت و بدون تاب می‌باشد [۹]. شباهت‌های بین معنای هندسی و نتایج معروف روی تغییرات تصویری و تغییرات حافظ دایره ژئودزیک نقش مهمی در توسعه و پیشرفت هندسه ریمانی داشته است.

فرض کنیم  $V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  یک میدان برداری روی منیفلد فینسلری  $(M, g)$  و  $\hat{V} = v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \theta_j v^i \frac{\partial}{\partial y^i}$  یک ترفیع کاملروی  $TM$  باشد.  $V$  را یک میدان برداری همدیس یا تبدیل همدیس بی‌نهایت کوچک گوئیم اگر در رابطه  $\mathcal{L}_V g_{ij} = 2\rho(x)g_{ij}$  صدق کند که  $\rho(x)$  یک تابع حقیقی روی  $M$  است و آن را تابع مشخصه  $V$  می‌نامیم. اگر  $\rho(x)$  ثابت باشد یا صفر آن‌گاه  $V$

\*نویسنده مسئول s.saberli@urmia.ac.ir

<sup>1</sup> Vogel

را یک میدان برداری متجانس یا کیلینگ گوئیم. بعد از آن محققان دیگری کارهای بیشتری در زمینه تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک در هندسه ریمان انجام دادند. ایشیهارا اثبات کرد که یک میدان برداری حافظ دایره ژئودزیک روی منیفدهای ریمانی، یک میدان برداری همدیس است [۷]. این نتیجه از ایشیهارا توسط جوهری ناد به منیفدهای فینسلری تعمیم داده شد [۸]. فرض کنیم  $M$  یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد، یک دیفئومورفیسم موضعی منیفدهای فینسلری را حافظ دایره گوئیم اگر دایره را به دایره تصویر کند. مفهوم حافظ دایره ژئودزیک به طور مشابه توسط آگراوال<sup>۲</sup> و ایزومی<sup>۳</sup> در هندسه فینسلر توسعه پیدا کرده است به علاوه بیدآباد [۹] نشان داد که در تعریف تبدیل حافظ دایره ژئودزیک نیازی به فرض همدیس بودن نمی باشد، به عبارت دیگر اگر یک تبدیلی دایره های ژئودزیک را حفظ کند آن گاه آن تبدیل یک تبدیل همدیس است.

اگر دو ساختار فینسلری روی یک منیفلد، دایره های ژئودزیک یکسان به صورت مجموعه های نقاط داشته باشند، آن گاه این دو ساختار فینسلری را حافظ دایره ژئودزیک مرتبط گوئیم. تغییرات حافظ دایره ژئودزیک کلی تر از تغییرات تصویری است به عبارت دیگر تغییر متر است که ژئودزیکها را پایا نگه می دارد.

در سال ۲۰۱۴ پروفیسور شن<sup>۴</sup> و دکتر بیدآباد مفهوم یک دایره ژئودزیک در هندسه فینسلر را بیان کردند و تغییر مترهای حافظ دایره را مطالعه کردند [۹]. در یک فضای فینسلری، تغییر متری که دایره های ژئودزیک را حفظ می کند، همدیس است. به طور دقیق تر اثبات شده است که اگر یک تبدیلی دایره های ژئودزیک را حفظ کند، آن گاه همدیس است. کهنل و راداماخر<sup>۵</sup> منیفدهای نیمه ریمانی  $(M, g)$  را دسته بندی کردند. به عبارت دیگر یک تبدیل همدیس غیر ثابت  $\bar{g} = \varphi^{-2}g$  به طوری که تفاوت تانسورهای ریچی آن  $\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g$  یک مضرب ثابتی از متر  $g$  یا متر  $\bar{g}$  است. یک تبدیل  $g \rightarrow \bar{g}$  را تبدیل حافظ دایره ژئودزیک می نامیم اگر حافظ منحنی های با انحنا ژئودزیک ثابت و تاب ژئودزیک صفر باشد. (این منحنی ها به دایره های ژئودزیک معروف هستند.) در این حالت ژئودزیک های همدیس، دایره های ژئودزیک هستند. یک فضای  $(M, g)$  را اینشتینی گوئیم؛

$$[\text{Ric}_g] = [g]. \quad \text{هر گاه:}$$

یک تبدیل همدیس بین فضاهای اینشتینی یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک است.

$$[g] = [\bar{g}] = [\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g] \quad \text{هر گاه:}$$

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g = 0. \quad \text{اگر:}$$

<sup>2</sup> Agrawal

<sup>3</sup> Izumi

<sup>4</sup> Z. Shen

<sup>5</sup> W.Kühnel, H.-B. Rademacher

لم: مترهای هم‌ارز هم‌مدیس  $g, \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$  در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$[\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g] = [g] = [\bar{g}]$$

اگر و تنها اگر تابع  $\Phi$  در معادله زیر صدق کند:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\Delta \varphi}{n} g.$$

$\Phi$  یک تابع اسکالر دلخواه است.

یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک  $g \rightarrow \bar{g}$  در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g = \frac{1}{n} \left( \frac{\bar{S}}{\varphi^2} - S \right) g$$

که  $S, \bar{S}$  انحناهای اسکالر  $g, \bar{g}$  هستند.

لم: فرض کنید  $(M, F)$  یک منیفلد فینسلری باشد. شرط لازم و کافی برای این که یک تغییر هم‌مدیس  $\bar{g} = e^{2\sigma} g$  حافظ دایره ژئودزیک باشد این است که تابع  $\sigma$  یک جوابی از معادله دیفرانسیل جزئی زیر باشد [۱۰]:

$$\nabla_j \sigma_k - \sigma_j \sigma_k = \Phi g_{jk} \quad (2)$$

که  $\sigma_k = \frac{\partial \sigma}{\partial x^k}$ ,  $\nabla_k$  مشتق افقی کارتان و  $\Phi$  یک تابع اسکالر خاص است.

مثال: تغییرات حافظ دایره ژئودزیک در فیزیک به صورت جمع‌بندی هم‌مدیس ریچی شناخته شده می‌باشند و معادلات میدان ماکسول-اینشتین در رابطه با میدان‌های الکترومغناطیسی غیرتهی را تخمین می‌زنند.

لم: فرض کنید  $F$  و  $\bar{F}$  دو متریک فینسلر هم‌مدیس مرتبط روی منیفلد یکسان  $M$  با  $\bar{F} = u^{-1} F$  باشند (فاکتور هم‌مدیس  $u$  معادل با  $e^\sigma$  است)؛ آن‌گاه داریم [۱۱]:

$F$  و  $\bar{F}$  حافظ دایره ژئودزیک هستند؛ اگر و تنها اگر:

$$(u_i := u_{x^i}, u^i := g^{ir} u_r) u^r C_{ri}^k = 0, u_{ij} = \lambda g_{ij} \quad (3)$$

که  $\lambda = \lambda(x)$  یک تابع اسکالر روی  $M$  و  $|$  به معنای مشتق کوارینت افقی التصاق کارتان (چرن)  $F$  است.

(۲) اگر  $F$  و  $\bar{F}$  حافظ دایره ژئودزیک باشند، آن‌گاه  $F$  و  $\bar{F}$  حافظ انحنای پرچمی اسکالر (ایزوتروپیک) یا انحنای پرچمی ثابت در (بعدهای بزرگ‌تر یا مساوی ۳) یا یک متر اینشتینی می‌باشند.

قضیه ۱: فرض کنیم  $F, \bar{F}$  دو متریک راندرز هم‌مدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر  $F, \bar{F}$  هر دو مترهای اینشتینی ضعیف باشند، آن‌گاه تبدیل هم‌مدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک است.

نتیجه: فرض کنید  $F, \bar{F}$  دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر  $F, \bar{F}$  هر دو مترهای اینشتینی باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک است.

فرض کنید  $F$  و  $\bar{F}$  دو متریک فینسلر روی منیفلد دیفرانسیل پذیر  $M$  باشند.  $F$  و  $\bar{F}$  را هم‌ارز تصویری یا تصویری مرتبط گوئیم اگر ژئودزیک‌های  $(M, F)$  و  $(M, \bar{F})$  به صورت منحنی‌های جهت‌دار در جهت مشابهی یکسان باشند. از طرف دیگر اگر ضرایب ژئودزیک  $F$  و  $\bar{F}$  در رابطه زیر صدق کنند:

$$\bar{G}^i(x, y) = G^i(x, y) + P(x, y)y^i \quad (۴)$$

آن‌گاه  $F$  و  $\bar{F}$  هم‌ارز تصویری هستند. تغییر متریک‌های فینسلری که در رابطه (۴) صدق می‌کنند را تغییر تصویری می‌نامیم. تابع  $P(x, \lambda y) = \lambda P(x, y)$  که همگن مثبت از درجه یک می‌باشد را فاکتور تصویری گوئیم. اسپری‌های  $G$  و  $\bar{G}$  که در رابطه (۴) صدق می‌کنند را هم‌ارز تصویری می‌نامیم.

مسئله چهارم هیلبرت در حالت منظم مطالعه و بررسی مترهای فینسلری روی یک زیر مجموعه  $\mathbb{U} \subset R^n$  است که ژئودزیک‌های آن خطوط راست هستند. مترهای فینسلری با این ویژگی را متریک‌های مسطح تصویری می‌نامیم. یک متر فینسلر  $F(x, y)$  را روی یک زیر مجموعه  $\mathbb{U} \subset R^n$  مسطح تصویری می‌گوئیم اگر و تنها اگر ضرایب اسپری آن به صورت زیر باشند:

$$G^i(x, y) = P(x, y)y^i \quad (۵)$$

که  $P(x, y)$  یک تابع همگن مثبت از درجه یک در  $y$  است.

انحناها مهم‌ترین مفاهیم در هندسه هستند. مفهوم انحنا اولین بار توسط ریمان معرفی شد، انحنا ریمانی را مانند انحنا برشی می‌توان به متریک‌های فینسلری گسترش داد. کمیت زیر برای هر صفحه مماس  $P \subset T_x M$  و بردار غیر صفر  $y \in P$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$K(P, y) := \frac{g_y(u, R_y(u))}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)^2}$$

که  $u \in T_x M$  یک بردار دلخواهی است به طوری که  $P = span\{y, u\}$ . وقتی  $F$  ریمانی باشد،  $K(P, y) = K(P)$  مستقل از  $y \in P$  انحنا برشی  $P$  در هندسه ریمان است. بنابراین انحنا برشی مشابه انحنا برشی در هندسه ریمان می‌باشد.

یک متریک فینسلر را با انحنا برشی ایزوتروپیک ضعیف گوئیم اگر انحنا برشی آن یک تابع اسکالر روی  $T_x M$  به صورت زیر باشد

$$K = \frac{3\theta}{F} + \sigma$$

که  $\theta = t_i(x)y^i$  یک  $\theta$ -۱ فرمی و  $\sigma = \sigma(x)$  یک تابع اسکالر روی  $M$  است.

**قضیه ۲:** فرض کنید  $F, \bar{F}$  دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر  $F, \bar{F}$  هر دو با انحنا ی پرچی ایزوتروپیک ضعیف باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی است. انحنا ی بروالدکمیت غیرریمانی مهم دیگری است که وابسته به  $S$  انحنا است.

$$E_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} S_{y^i y^j}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} \left[ \frac{\partial G^m}{\partial y^m} \right](x, y)$$

$E := E_{ij} dx^i \otimes dx^j$  یک تانسور روی  $TM_0$  است که  $E$  تانسور نام دارد.  $E$  تانسور به صورت یک خانواده از فرم‌های متقارن  $E_y: T_x M \times T_x M \rightarrow R$  تعریف شده است.

$$E_y(u, v) = E_{ij}(x, y) u^i v^j,$$

که  $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$  و  $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} |_x$  متعلق به  $T_x M$  است. آن‌گاه  $E := \{E_y | y \in TM \setminus \{0\}\}$  انحنا ی بروالد میانگین یا  $E$ -انحنا می‌نامیم. یک متریک فینسلر را یک متریک بروالد ضعیف گوئیم اگر  $E = 0$ .

**قضیه ۳:** فرض کنید  $F, \bar{F}$  دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر  $F, \bar{F}$  هر دو با انحنا ی بروالد میانگین ضعیف باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی است.

### مقدمات

یک تابع  $F: TM \rightarrow [0, \infty)$  را یک ساختار فینسلری می‌نامیم؛ اگر در یک دستگاه مختصات موضعی  $(x^i, y^i)$ :

$$F(x, y) = F\left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x\right)$$

در روابط زیر صدق کنند:

$$(1) \quad F \text{ یک تابع همگن مثبت از درجه } \lambda \text{ نسبت به } y \text{ باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم: } F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y) \text{ و } \lambda \text{ مثبت باشد.}$$

$$(2) \quad F(x, y) \text{ تابعی } C^\infty \text{ روی } TM \setminus \{0\} \text{ باشد.}$$

$$(3) \quad \text{ماتریس هسیان } \frac{1}{2} [F^2_{y^i y^j}]^6 \text{ یک ماتریس مثبت معین باشد.}$$

یک منیفلد  $C^\infty$  فینسلری با ساختار فینسلری بالا را یک منیفلد فینسلری یا یک فضای فینسلری می‌گوئیم.

<sup>6</sup> Hessian Matrix

تعریف: فرض کنیم  $F : R^n \rightarrow [0, \infty]$  یک نگاشت با خواص زیر باشد:

۱.  $F$  روی  $R^n - \{0\}$  هموار باشد.

۲.  $F$  همگن مثبت از درجه یک باشد.

۳. ماتریس هسیان  $F$  معین مثبت باشد.

در این صورت  $F$  را یک نرم مینکوفسکی<sup>۷</sup> روی  $R^n$  می نامیم.

یک متریک فینسلر روی یک منیفلد، یک خانواده از نرم های مینکوفسکی روی فضاها می باشد. در واقع با توجه به تعریف فوق و تعریف ساختار فینسلری می توان گفت  $F$  یک ساختار فینسلری روی منیفلد  $M$  است هرگاه تحدید آن به هر  $TM$  در هر نقطه یک نرم مینکوفسکی باشد.

مثال: متریک ریمانی روی منیفلد  $M$  یک خانواده از ضرب های داخلی  $\{g_x\}_{x \in M}$  است که  $g_{ij}(x, y) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$  در مختصات موضعی هموار هستند.

مثال: روی  $R^n$ ، تابع  $F(x, y) := |y| + \langle x, y \rangle$  را در نظر می گیریم که در آن  $\|\cdot\|$  نرم استاندارد و  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ضرب داخلی اقلیدسی روی  $R^n$  است. در این صورت  $F$  یک متریک فینسلر روی  $R^n$  است.

یک اسپری<sup>۸</sup> روی منیفلد فینسلری  $M$  یک میدان برداری هموار  $G$  روی  $TM \setminus \{0\}$  می باشد که در یک دستگاه مختصات استاندارد موضعی به صورت زیر بیان می شود:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{۶}$$

که  $G^i(y)$  توابع موضعی روی  $TM$  می باشند:  $G^i(\lambda y) = \lambda^2 G^i(y)$ ,  $\lambda > 0$

یک منیفلد با یک اسپری را فضای اسپری می نامیم. ضرایب اسپری  $G^i$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il} \{ [F^2]_{x^m y^l} y^m - [F^2]_{x^l} \} \tag{۷}$$

که در آن  $g^{ij} := (g_{ij})^{-1}$ . [۱۲]

<sup>7</sup> Minkowski

<sup>8</sup> Spray

هر اسپری  $G$  به طور یکتا یک خانواده از تبدیلات  $T_x M \rightarrow T_x M$   $\frac{\partial}{\partial x^i} |_x: T_x M \rightarrow T_x M$   $Ry := R_k^i dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$  مشخص می‌کند که در آن  $R_k^i$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_k^i := 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^i} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k} \quad (۸)$$

$Ry$  انحناى ریمان<sup>۹</sup> اسپری  $G$  در جهت  $y$  می‌باشد.

اثر انحناى ریمان را انحناى ریچی<sup>۱۰</sup> نامیده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۹)

$$\text{Ric}(x,y) = R_m^m(x,y)$$

انحناى ریچی همگن مثبت از درجه ۲ می‌باشد.

یک متریک فینسلر روی منیفلد  $M$  را یک متریک اینشتینی ضعیف می‌نامیم، اگر:

(۱۰)

$$\text{Ric} = (n-1) \left( \frac{3\theta}{F} + \sigma \right) F^2$$

که  $\sigma = \sigma(x)$  یک تابع اسکالر و  $\theta = t_i(x)y^i$  یک  $-1$  فرمی روی  $M$  است.

یک متریک فینسلری را اینشتینی<sup>۱۱</sup> می‌نامیم؛ اگر در رابطه بالا  $\theta = 0$  باشد، به عبارت دیگر:

$$\text{Ric} = (n-1)\sigma F^2 \quad (۱۱)$$

فرض کنید  $F$  یک متریک فینسلر روی منیفلد  $-n$  بعدی  $M$  باشد، با انتخاب یک دستگاه مختصات موضعی استاندارد

$(x^i, y^i)$  فرض کنیم  $dv_F = \sigma_F(x) dx^1 \dots dx^n$  فرم حجمی متریک فینسلر  $F$  باشد که:

$$\sigma_F(x) = \frac{\text{Vol}(B^n(1))}{\text{Vol}\{y^i \in \mathbb{R}^n | F(x, y^i) \frac{\partial}{\partial x^i} |_x < 1\}}$$

برای یک بردار غیر صفر  $y \in T_x M$  انحراف معیار<sup>۱۲</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau(x,y) := \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x,y))}}{\sigma_F(x)}$$

<sup>9</sup> Riemann curvature

<sup>10</sup> Ricci curvature

<sup>11</sup> Einstein metric

<sup>12</sup> distortion

برای یک بردار  $y \in T_x M$  فرض کنید منحنی  $c(t)$  یک ژئودزیک با  $c(0) = x$  و  $\dot{c}(0) = y$  باشد، انحنای  $S$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(x,y) := \frac{d}{dt} [\tau(c(t), \dot{c}(t))] |_{t=0} \quad (12)$$

انحنای  $S(x, y)$  یک تابع همگن مثبت از درجه یک می باشد. بنا بر تعریف فوق انحنای  $S(x, y)$  در واقع مشتق هموردا افقی  $\tau$  در امتداد ژئودزیکها است. به عبارت دیگر داریم:

$$S(x, y) = \tau|_1(x, y)y^1$$

"|" که مشتق هموردا افقی  $F$  می باشد.

در مختصات موضعی داریم:

$$S(x,y) = y^i \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial y^i} G^i$$

با توجه به رابطه بالا به رابطه زیر برای انحنای  $S(x, y)$  می توان دست یافت:

$$S(x, y) = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m} (\ln \sigma_F(x))$$

متریک فینسلر  $F(x, y)$  را با انحنای ایزوتروپیک ضعیف  $S(x, y)$ <sup>۱۳</sup> گوئیم، اگر:

$$(13)$$

$$S(x, y) = (n + 1)cF(x, y) + \eta$$

که  $c = c(x)$  یک تابع اسکالر و  $\eta = \eta_i(x)y^i$  یک ۱-فرمی روی  $M$  می باشد.

متریک فینسلر  $F(x, y)$  را با انحنای تقریباً ایزوتروپیک<sup>۱۴</sup>  $S(x, y)$  گوئیم اگر در رابطه بالا  $d\eta = 0$ .

متریک فینسلر  $F(x, y)$  را با انحنای ایزوتروپیک  $S(x, y)$  گوئیم اگر در رابطه بالا  $\eta = 0$  باشد.

متریک فینسلر  $F(x, y)$  را با انحنای ثابت<sup>۱۵</sup>  $S(x, y)$  گوئیم اگر در رابطه بالا  $c$  ثابت و  $\eta = 0$  باشد.

<sup>13</sup> Weak isotropic curvature

<sup>14</sup> Almost isotropic curvature

<sup>15</sup> Constant curvatur



فرض کنید  $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$  یک متر ریمانی<sup>۱۶</sup> روی منیفلد دیفرانسیل پذیر  $M$  و  $\beta = b_i(x)y^i$  یک  $\alpha$ -فرمی روی  $M$  باشد. فرض کنیم:

$$\|\beta(x, y)\|_\alpha := \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)} < 1$$

که  $a^{ij}(x) = (a_{ij}(x))^{-1}$  تعریف می‌کنیم:  $F = \alpha + \beta$

$F$  یک متریک فینسلر می‌باشد،  $F$  را یک متریک راندرز<sup>۱۷</sup> می‌نامیم. تانسور اساسی متریک راندرز به صورت زیر می‌باشد:

(۱۴)

$$g_{ij}(x, y) = \frac{F}{\alpha} \left[ a_{ij} + \frac{\alpha}{F} \left( b_i + \frac{y_i}{\alpha} \right) \left( b_j + \frac{y_j}{\alpha} \right) - \frac{y_i y_j}{\alpha^2} \right].$$

وارون  $g_{ij}$ ،  $g^{ij}$  به صورت زیر می‌باشد:

(۱۵)

$$g^{ij}(x, y) = \frac{\alpha}{F} a^{ij} - \frac{\alpha}{F^2} (b^i y^j + b^j y^i) + \frac{b^2 \alpha + \beta}{F^3} y^i y^j.$$

تاب کارتان میانگین متر راندرز

$$I_i(y) = \frac{n+1}{2(\alpha + \beta)} \left( b_i - \frac{y_i \beta}{\alpha} \right) \quad (۱۶)$$

$F(x, y)$  را روی یک زیر مجموعه باز  $\mathbb{U} \subset R^n$  مسطح تصویری گوئیم اگر و تنها اگر ضرایب اسپری آن به صورت زیر باشند:

$$G^i(x, y) = P(x, y)y^i \quad (۱۷)$$

که  $P(x, y)$  یک تابع همگن مثبت از درجه یک در  $y$  است.

### اثبات قضایا

**اثبات قضیه ۱:** می‌دانیم که اگر  $F, \bar{F}$  دو متریک راندرز اینشتینی ضعیف باشند آنگاه با انحنا  $S, \bar{S}$  ایزوتروپیک می‌باشند بنابراین داریم:  $F S(x, y) = (n+1)k_1(x) \bar{F} S(x, y) = (n+1)k_2(x) \bar{S}(x, y)$  و به عبارت دیگر، اگر  $F$  با انحنا ایزوتروپیک باشد؛ آنگاه داریم  $S = (n+1)k_1(x)F$  و  $S = (n+1)k_1(x)F$  و  $\bar{S} = (n+1)k_2(x)\bar{F}$  با انحنا ایزوتروپیک باشد؛ آنگاه داریم  $\bar{S} = (n+1)k_2(x)\bar{F}$  و  $k_2(x)$  تابع اسکالر می‌باشد. با توجه به تبدیل همدیس مرتبط بودن بین  $F, \bar{F}$  رابطه زیر را برای تبدیل همدیس انحنا  $S, \bar{S}$  داریم:

(۱۸)

$$\bar{S}(x, y) = S(x, y) + F^2(x, y)\sigma^i I_i$$

<sup>16</sup> Riemannian metric

<sup>17</sup> Randers metric

با جایگذاری  $S, \bar{S}$  در رابطه بالا، به دست می‌آوریم:

$$(n + 1)k_2(x)e^{\sigma}F = (n + 1)k_1(x)F + F^2\sigma^i I_i$$

$$(n + 1)(k_2(x)e^{\sigma} - k_1(x)) - F\sigma^i I_i = 0$$

با جایگذاری  $F = \alpha + \beta$  و  $\bar{F} = \overline{\alpha + \beta}$  و همچنین از روابط بالا به دست می‌آوریم:

$$I_i \sigma^i = 0 \tag{۱۹}$$

$$(n + 1)(k_2(x)e^{\sigma} - k_1(x))\beta - \sigma^i I_i = 0$$

که  $\sigma^i = g^{ij} \sigma_j$  با جایگذاری در رابطه (۱۹) داریم:

$$I_i g^{ij} \sigma_j = 0 \tag{۲۰}$$

با جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۶) در رابطه (۲۰) به دست می‌آوریم:

$$\alpha\{\beta b^j \sigma_j - b^2 \sigma_0\} + \alpha^2 b^j \sigma_j - \beta \sigma_0 = 0 \tag{۲۱}$$

با توجه به رابطه (۲۱) داریم:

$$\alpha^2 b^j \sigma_j - \beta \sigma_0 = 0 \tag{۲۲}$$

با توجه به تحویل‌ناپذیری  $\alpha^2$  و  $\beta$  در رابطه (۲۲) به دست می‌آوریم  $\sigma_i = 0$ . پس  $\sigma$  ثابت و تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک می‌باشد.

**اثبات قضیه ۲:** اگر  $\bar{F}$  یک متر راندرز با انحنا پرچمی ایزوتروپیک ضعیف باشد، آن‌گاه  $\bar{F}$  با انحنا ایزوتروپیک  $\bar{S}$  است، همچنین  $F$  با انحنا ایزوتروپیک  $S$  می‌باشد. بنابراین مشابه اثبات قضیه ۱ تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیک می‌باشد.

**اثبات قضیه ۳:** اگر  $F$  یک متریک راندرز با انحنا بروال میانگین ضعیف باشد، آن‌گاه  $F$  در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\tag{۲۳}$$

$$E = (n + 1)c(x)F^{-1}h$$

$$\tag{۲۴}$$

$$e_{00} = 2c(\alpha^2 - \beta^2)$$

همچنین  $\bar{F}$  یک متریک راندرز با انحنای بروالد میانگین ضعیف باشد، آن‌گاه  $\bar{F}$  در رابطه بالا صدق می‌کند. با توجه به این‌که  $\bar{F}$  و  $F$  هر دو متریک راندرز همدیس مرتبط می‌باشند یعنی  $\bar{F} = e^\sigma F$ ، آن‌گاه داریم:

$$e_{00} = r_{00} + 2\beta s_0 \quad (25)$$

$$\bar{r}_{00} = e^\sigma (r_{00} - \beta \sigma_0 + \alpha^2 f) \quad (26)$$

$$(27)$$

$$(\bar{e}_{00} = e^\sigma (e_{00} + f(\alpha^2 - \beta^2) + \beta \sigma_0 (b^2 - 1))$$

$$\bar{e}_{00} = 2ce^{3\sigma}(\alpha^2 - \beta^2) \text{ داریم: (24)}$$

با جایگذاری در رابطه (۲۷) داریم:

$$(2ce^{2\sigma} - 2c - f)(\alpha^2 - \beta^2) - \beta \sigma_0 (b^2 - 1) = 0$$

با توجه به تحویل‌ناپذیری  $\alpha^2 - \beta^2$  و  $\beta$  داریم:  $\sigma_0 = 0$  پس  $\sigma$  ثابت و تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی می‌باشد.

## References

1. Yano, K., On circular geometry, I. Conircular transformations. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 195-200 (1940).
2. Yano, K., On circular geometry, II. Integrability conditions of  $\rho_{\mu\lambda} = \phi g_{\mu\lambda}$ . Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 505-511 (1940).
3. Yano, K., On circular geometry, III. Theory of curves. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 442-448 (1940).
4. Yano, K., On circular geometry, IV. Theory of subspace. Proc. Imp. Acad. Tokyo **18**, 505-511 (1940).
5. Yano, K., On circular geometry, V. Einstein spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo **18**, 446-451 (1942).
6. Vogel, W.O.K., Transformationen in Riemannschen Räumen, (German). Arch. Math. Soc. **117**, 251-275 (1965).

7. Ishihara, S., On infinitesimal concircular transformations. *Kodai Math. Sem. Rep.* **12**, 45-56 (1960).
8. P. Joharinad, P., Bidabad, B., Conformal vector field on Finsler spaces. *Differential geometry and applications* **31** (2013) 33-40
9. Ferrand, J., Concircular transformations of Riemannian manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. M.* **10**, 163-171 (1985).
10. Bidabad B., Shen Z., Circle-preserving transformations in Finsler spaces. *Publ. Math. Debr.* **81**, 435-445 (2012).
11. Bidabad, B., A classification of complete Finsler manifolds through the conformal theory of curves. *Differential geometry and its applications* **35**, 350-360 (2014).
12. Shen Z., Yang G., On concircular transformations in Finsler geometry. *Results Math.* **74**:162 (2019).
13. Bao D., Chern S.S., Shen Z. *Riemann-Finsler geometry*, Springer-Verlag, (2000).