Mathematical Researches

Kharazmi University

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Optimization of Random Sample Size in Progressively Type II Censoring based on Cost Criterion

Elham Basiri[1]

1. Department of Mathematics and Applications, Kosar University of Bojnord, Bojnord, Iran.

E-mail: elham_basiri2000@yahoo.com

Article Info	ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
3 May 2020
Revised form:
19 August 2020
Accepted:
26 August 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:

Random sample size;
Optimization;
Cost function.

Introduction

Censored sample arises in a life-testing experiment whenever the experimenter does not observe the failure times of all units placed on a life-test. In medical or industrial studies, researchers have to treat the censored data because they usually do not have sufficient time to observe the lifetime of all subjects in the study. There are different types of censoring. The most common censoring schemes are type I and type II censoring schemes. Progressively type II censoring is also one of the most important methods of censoring.

One of the most common questions any statistician gets asked is "How large a sample size do I need?". Researchers are often surprised to find out that the answer depends on a number of factors and they have to give the statistician some information before they can get an answer. So far different answers have been given to respond this question by considering different criteria.

Cost criterion is one of the criteria that has always been of interest to researchers. So far, many researchers have used this criterion for determining the size of samples in different censoring methods.

In some applications, such as clinical trials and quality control, it is almost impossible to have a fixed sample size all the time because some observations may be missing for various reasons. In other words, the sample size is a random variable.

Material and methods

In this paper, a cost function is introduced. Then, assuming that the sample size of progressively type II censoring is a random variable from the truncated binomial distribution, the optimal parameter of sample size distribution in progressively type II censoring, is determined. This optimal parameter is determined so that the introduced cost function does not exceed a pre-

determined value, say c^*. In this article, the exponential distribution is considered for lifetimes of observations. A simulation study is also provided to evaluate the obtained results. Finally, the conclusion of the article is presented.

Results and discussion

We have computed the values of the expected cost function by considering three different censoring schemes. The results show that the expected cost function is an increasing function of m but a decreasing function of θ, when other components are fixed, as we expected. Also, we can find that considering type II censoring leads to better results than other censoring schemes. On the other hand, we can conclude that type II censoring provides the minimum cost among two other censoring schemes. In the sequel, by assuming an upper bound for the cost function, say c^*, the optimal parameter of sample size distribution is obtained.

Conclusion

Determining the optimal sample size is one of the issues that has been studied by many researchers. In some cases, it is not possible for the sample size to be a fixed and pre-determined value. In other words, the sample size is a random variable. In this paper, assuming that the sample size of progressively type II censoring is a random variable from the truncated binomial distribution, the optimal parameter of the sample size distribution is determined. The criterion used in this research is the cost criterion. Next, the optimal parameter of the sample size distribution is determined so that the value of the cost function is less than the specified and predetermined value, say c^*. The results of the paper show that the type II censoring provides less values for the cost function. For all three censorsing schemes, the cost function is an increasing function of m but a decreasing function of θ, when other components are fixed, as we expected. As a result, the best case scenario is taking into account the type II censoring scheme, selecting smaller values for m, larger values for θ, and smaller values for the parameter of sample size distribution.

How to cite: Basiri, E., (2022) Optimization of Random Sample Size in Progressively Type II Censoring based on Cost Criterion. *Mathematical Researches,* 8 (2), 1-16

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸
پژوهش‌های ریاضی
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

بهینه‌سازی اندازهٔ نمونهٔ تصادفی در سانسور فزاینده نوع دو برمبنای معیار هزینه

الهام بصیری[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضیات و کاربردها، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران. پست الکترونیکی: elham_basiri2000@yahoo.com

اطلاعات مقاله **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۱۴
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۲۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۰۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:

اندازهٔ نمونهٔ تصادفی،
بهینه‌سازی،
تابع هزینه.

نمونه‌های سانسور شده تاکنون توسط پژوهش‌گران زیادی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. یکی از مهم‌ترین روش‌های سانسور، سانسور فزایندهٔ نوع دو است. یکی از مسائلی که در بحث سانسورها مطرح است تعیین اندازهٔ نمونهٔ مناسب است. برای تعیین اندازهٔ نمونهٔ مناسب عوامل مختلفی تاثیرگذار هستند که از مهم‌ترین عوامل می‌توان به معیار هزینهٔ نمونه‌گیری اشاره کرد.دراین مقاله،با فرض اینکه اندازهٔ نمونه متغیری تصادفی از توزیع دوجمله‌ای باشد، به تعیین پارامتر بهینهٔ توزیع اندازهٔ نمونه در سانسور فزایندهٔ نوع دو پرداخته می‌شود. این پارامتر بهینه طوری تعیین می‌شود که مقدار هزینهٔ کل آزمایش از مقدار از قبل تعیین شده‌ای بیشتر نشود. در این مقاله توزیع نمایی برای توزیع مشاهدات درنظر گرفته شده است. برای ارزیابی نتایج به دست آمده مطالعه شبیه‌سازی نیز انجام شده است. در پایان نتیجه‌گیری از مقاله ارائه شده است.

استناد: بصیری، الهام؛ (۱۴۰۱). بهینه‌سازی اندازهٔ نمونهٔ تصادفی در سانسور فزاینده نوع دو برمبنای معیار هزینه آنها. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۶-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

توزیع نمایی یکی از مهم‌ترین توزیع‌های آماری است که در مدل‌سازی و تحلیل داده‌های طول عمر به کار می‌رود. از جمله دلایل مهم کاربرد فراوان توزیع نمایی در قابلیت اعتماد یکی فرم ساده محاسباتی این توزیع و دیگری خواص منحصر به فرد این مدل است [۱]. گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است هرگاه تابع چگالی احتمال و تابع توزیع آن به‌ترتیب به‌صورت زیر باشند.

$$f_\theta(x)=\theta e^{-\theta x},\quad F_\theta(x)=1-e^{-\theta x},\quad \theta>0, x>0. \qquad (1)$$

بسیاری از اوقات در مباحث قابلیت اعتماد، آزمون‌های طول عمر، تحقیقات زیست‌شناسی، تحلیل بقا و دیگر زمینه‌های کاربردی بنا به دلایلی از جمله زمان محدود، عدم دسترسی به همهٔ قطعات و یا گران بودن واحدهای تحت آزمایش، آزمایش‌گر نمی‌تواند زمان دقیق ازکارافتادگی واحدهای تحت آزمایش را مشاهده کند. به واحدهای تحت آزمایش که به هر دلیلی در نمونه مشاهده نمی‌شوند در اصطلاح گویند که سانسور شده‌اند.به‌طور معمول سانسورها به شیوه‌های مختلفی اعمال می‌شوند. بعضی از انواع سانسورها عبارتند از: سانسور نوع یک، سانسور نوع دو، سانسور تصادفی، سانسور فزاینده و سانسور هیبرید. برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر درباره سانسورها و کاربرد آن‌ها می‌توان به کتاب‌های [۲]-[۵] مراجعه نمود. در سانسور نوع دو از راست، این امکان وجود دارد که واحدها فقط در انتهای آزمایش حذف شوند. اما در تعمیمی از سانسور نوع دو از راست که سانسور فزایندهٔ نوع دو از راست نامیده می‌شود، این امکان وجود دارد که در هر مرحله از آزمایش به‌عنوان مثال در زمان از کارافتادگی هر واحد، می‌توان واحدهایی را از آزمایش کنار گذاشت. همچنین، با توجه به اینکه در سانسور فزایندهٔ نوع دو از راست، قطعات سانسور شده هنوز دچار شکست نشده‌اند می‌توان از آن‌ها به‌عنوان قطعات دست دوم در آزمایش‌های بعدی استفاده کرد، که از نظر اقتصادی حائز اهمیت است.

فرض کنید n واحد مستقل از هم با زمان‌های شکست متناظر با X_1، $\cdots$، X_n که دارای تابع توزیع مشترک $F(.)$ و تابع چگالی احتمال مشترک $f(.)$ هستند، مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. بلافاصله بعد از مشاهدهٔ اولین شکست، تعداد R_1 واحد از $(n-1)$ واحد باقیمانده به‌طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند، که در آن $R_1=0,\cdots,n-m$. بعد از مشاهدهٔ دومین شکست تعداد R_2 واحد از $(n-R_1-2)$ واحد باقیمانده به طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند، که در آن $R_2=0,\cdots,n-m-R_1$، و در نهایت در زمان مشاهدهٔ mامین شکست تعداد R_m واحد باقیمانده از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند، طوری‌که $R_m=n-m-\sum_{i=1}^{m-1}R_i$. در این روش از سانسور R_iها، $1\le i\le m$، مقادیری ثابت و از قبل تعیین‌شده هستند. علاوه بر این، زمان‌های شکست که متغیرهای تصادفی هستند و آماره‌های مرتب سانسور فزایندهٔ نوع دو از راست نامیده می‌شوند، با نماد $X_{1:m:n}^{\tilde{R}}$، $\cdots$، $X_{m:m:n}^{\tilde{R}}$ نشان داده می‌شوند. بنابراین، طرح سانسور فزایندهٔ نوع دو براساس m و بردار $\tilde{R}(m)=(R_1,\cdots,R_m)$ مشخص می‌شود. در ادامه برای سادگی از نماد $X_{i:m:n}$ به جای $X_{i:m:n}^{\tilde{R}}$، $1\le i\le m$، استفاده می‌شود. تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $X_{i:m:n}$، $1\le i\le m$، برابر است با

$$f_{X_{i:m:n;\theta}}(x)=c_{i-1;n}\sum_{t=1}^{i}a_{t,i;n}f_\theta(x)\left(\bar{F}_\theta(y)\right)^{\gamma_{t;n}-1}, \qquad (2)$$

که در آن

$$\gamma_{i:n} = n - i + 1 - \sum_{k=1}^{i-1} R_k, \quad c_{i-1:n} = \prod_{j=1}^{i} \gamma_{j:n}, \quad a_{t,i:n} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq t}}^{i} \frac{1}{\gamma_{l:n} - \gamma_{t:n}}, \quad 1 \le t \le i \le m.$$

برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر درمورد سانسور فزایندهٔ نوع دو و کاربردهای آن می‌توان به [۶]-[۹] ارجاع داد.

یکی از مسائلی که در سانسور فزایندهٔ نوع دو همواره مورد توجه بوده است مسألهٔ تعیین طرح بهینهٔ سانسور است. این مسأله در ابتدا در [۶] مورد بررسی قرار گرفت. بعد از آن پژوهش‌گران زیادی با درنظر گرفتن معیارهای مختلف به مطالعهٔ این مسأله پرداخته‌اند. برای مثال، در پژوهش‌هایی طرح بهینهٔ سانسور فزایندهٔ نوع دو از راست با مینیمم کردن واریانس بهترین برآوردگرهای خطی نااریب در خانوادهٔ توزیع‌های مکان-مقیاس تعیین شد [۱۰، ۱۱، ۱۲]. پژوهشی دیگر به تعیین طرح بهینهٔ سانسور براساس معیار اطلاع فیشر در توزیع بر[1] نوع ۱۲ پرداخت[۱۳]. با درنظر گرفتن معیار پیتمن نیز طرح بهینهٔ سانسور فزاینده در پژوهشی دیگربه‌دست آمد [۱۴]. در پژوهشی دیگر پژوهش‌گران بعد از به‌دست آوردن برآوردگر درستنمایی ماکزیمم برای پارامترهای توزیع بیرنبام-ساندرز براساس آماره‌های مرتب سانسور فزایندهٔ نوع دو، به مقایسهٔ دو طرح سانسور مختلف پرداختند و طرح بهینه را تعیین نمودند[۱۵]. با در نظر گرفتن تابع هزینه پژوهش‌گران دیگری به معرفی یک الگوریتم به منظور تعیین طرح بهینهٔ سانسور در خانواده توزیع‌های مکان-مقیاس پرداختند[۱۶]. طرح بهینهٔ سانسور فزایندهٔ نوع دو با درنظر گرفتن معیار آنتروپی نیز به‌دست آمده است [۱۷]. با درنظر گرفتن معیار واریانس برآوردگر درستنمایی ماکزیمم و بهترین برآوردگر خطی نااریب نیز طرح بهینهٔ سانسور فزایندهٔ نوع دواز توزیع نرمال تعیین شده است [۱۸].

یکی ازمتداول‌ترین سؤالاتی که در بحث سانسورها مطرح می‌شود این است که "به چه تعدادنمونه در ابتدای آزمایش نیاز داریم؟". پاسخ به این سؤال به عوامل مختلفی بستگی دارد. تاکنون بادرنظرگرفتن معیارهای مختلف پاسخ‌های متفاوتی به این سؤال داده شده است. یکی از معیارهایی که همواره مورد توجه پژوهش‌گران بوده است، معیار هزینه است. چرا که هزینه اغلب به عنوان یک عامل مهم در تصمیم‌گیری‌ها در نظر گرفته می‌شود. تاکنون پژوهش‌گران زیادی با در نظر گرفتن معیار هزینه به بهینه‌سازی در طرح‌های مختلف سانسور پرداخته‌اند. به عنوان مثال، با در نظر گرفتن یک تابع هزینه که تنها مبتنی بر زمان آزمایش و تعداد واحدهای تحت آزمایش بود، به تعیین تعداد نمونه بهینه در سانسور نوع دو پرداخته شده است [۱۹]. در مسأله پیش‌بینی بیزی و براساس دو معیار تابع هزینه و متوسط خطای پیش‌بین در داده‌های سانوسر فزاینده نوع دو با توزیع نمایی، تعداد نمونه بهینه به دست آمد [۲۰]. با تعریف یک تابع هزینهٔ جدید بعنوان تعمیمی از توابع هزینه تعریف شده در [۱۹] و [۲۱]، که علاوه بر مدت زمان آزمایش، قابلیت اعتماد آزمایش را هم در نظر می‌گیرد، تعداد نمونه بهینه در سانسور نوع دو در حالتی‌که $r = 2$ شکست مشاهده شود، مطالعه شد [۲۲]. تعداد شکست‌های بهینه در سانسور نوع دو از راست از توزیع رایلی نیز براساس معیار هزینه تعیین شد [۲۳]. مسأله

[1] Burr

طرح بهینهٔ سانسور فزایندهٔ نوع دو از توزیع پارتو براساس معیار اطلاع فیشر مورد مطالعه قرار گرفت[۲۴]. با در نظر گرفتن سانسور فزایندهٔ نوع دو از راست و معیار تابع هزینه و توزیع وایبل برای طول عمر داده‌های مورد بررسی، مقدار بهینه برای n مورد بررسی قرار گرفت [۲۵]. طرح بهینهٔ سانسور فزایندهٔ نوع دو با فرض اینکه طرح سانسور متغیری تصادفی از توزیع دوجمله‌ای باشد براساس دو معیار هزینه آزمایش و میانگین توان دوم خطای پیش‌بین در مسأله پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی، به دست آمد [۲۶].

در تمامی مقالات ذکر شده در بالا اندازهٔ نمونه مقداری ثابت درنظر گرفته شده است. اما در برخی مواقع مانند آزمایش‌های بالینی تعداد بیماران درحال تغییر است به عبارت دیگر اندازهٔ نمونه یک متغیر تصادفی است. با درنظر گرفتن اندازهٔ نمونه به عنوان یک متغیر تصادفی نیز تاکنون پژوهش‌های زیادی انجام شده است. به عنوان مثال می‌توان به کارهای [۲۷]-[۳۷] مراجعه نمود. اخیرا، در مسأله پیش‌بینی بیزی در یک نمونهٔ کامل از توزیع نمایی، اندازهٔ نمونه به عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفته شد و پارامتر بهینهٔ توزیع اندازهٔ نمونه بر اساس دو معیار هزینه و میانگین توان دوم خطای پیش‌بین تعیین شد [۳۸]. هدف این پژوهش تعیین اندازهٔ نمونه تصادفی بهینه در مدل سانسور فزایندهٔ نوع دو از راست است. برای این منظور با در نظر گرفتن معیار هزینه پارامتر بهینهٔ توزیع اندازهٔ نمونه را طوری می‌یابیم که مقدار هزینه آزمایش از مقدار از قبل تعیین‌شده‌ای مانند c^* بزرگتر نشود.

ساختار مقاله به شرح زیر می‌باشد: در ابتدا در بخش دوم به بیان نمادها و مقدمات مورد نیاز در مقاله پرداخته می‌شود. سپس تابع هزینه که نقش اساسی در مقاله دارد مورد معرفی قرار می‌گیرد. در ادامه با درنظر گرفتن معیار تابع هزینه، توزیع بهینه برای اندازهٔ نمونه تصادفی تعیین می‌شود. در بخش سوم با ارائهٔ یک الگوریتم به مطالعهٔ شبیه‌سازی پرداخته می‌شود. در انتها، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از مقاله بیان شده است.

۲. نتایج اصلی

در سرتاسر مقاله فرض کنید $X_{1:m:N}$، $\cdots$، $X_{m:m:N}$ آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال و تابع توزیع بهصورت رابطهٔ (۱) باشند. همچنین N یک متغیر تصادفی گسسته باشد. در این صورت، با توجه به[۳۶] و از روابط (۱) و (۲) می‌توان تابع چگالی احتمال $X_{i:m:N}$ را به صورت

$$\begin{aligned} f_{X_{i:m:N;\theta}}(x) &= \frac{1}{P(N\ge i)}\sum_{n=i}^{\infty}\sum_{t=1}^{i} c_{i-1;n}a_{t,i;n} f_\theta(x)\left(\bar{F}_\theta(y)\right)^{\gamma_{t;n}-1}P(N=n) \\ &= \frac{1}{P(N\ge i)}\sum_{n=i}^{\infty}\sum_{t=1}^{i} c_{i-1;n}a_{t,i;n}\theta e^{-\theta x\gamma_{t;n}}P(N=n), \end{aligned} \quad (۳)$$

بیان نمود. حال فرض کنید N یک متغیر تصادفی از توزیع دوجمله‌ای بریده شده از چپ در نقطه m که با نماد $Bin(M,p;m)$ نشان داده می‌شود، باشد که تابع احتمال

$$P(N=n)=\frac{1}{A(m,M,p)}\binom{M}{n}p^n(1-p)^{M-n}, \quad (۴)$$

باشد، هرگاه $A(m,M,p)=\sum_{n=m}^{M}\binom{M}{n}p^{n}(1-p)^{M-n}$.لازم به ذکر است که باتوجه به اینکه همواره داریم $N\geq m$، بنابراین در این‌جا توزیع دوجمله‌ای بریده شده از چپ در نقطه m برای توزیع Nدر نظر گرفته شده است.

در این‌صورت $P(N\geq i)=1$، به‌ازای $1\leq i\leq m$. بنابراین از روابط (۳) و (۴) می‌توان نوشت

$$f_{X_{m:m:N;\theta}}(x)=\frac{1}{A(m,M,p)}\sum_{n=m}^{M}\sum_{t=1}^{m}c_{m-1;n}a_{t,m;n}\theta e^{-\theta x\gamma_{t;n}}\binom{M}{n}p^{n}(1-p)^{M-n}.$$

معیار اصلی در این مقاله معیار هزینهٔ آزمایش است. در این مقاله تابع متوسط هزینه را به صورت

$$\begin{aligned}E(TC)=c_0+c_uE(N)-p_s\left(E(N)-m\right)+c_tE_N\left[E\left(X_{m:m:N}\mid N=n\right)\right]\\+c_v\,E_N\left[V\left(X_{m:m:N}\mid N=n\right)\right]+c_RF\left\{E_N\left[E\left(X_{m:m:N}\mid N=n\right)\right]\right\},\end{aligned}\qquad (5)$$

که در آن c_0، c_u، p_s، c_t، c_v و c_R به ترتیب عبارتند ازهزینه راه‌اندازی اولیهٔ آزمایش، هزینهٔ هر واحد تحت آزمایش، قیمت قطعات دست دوم، هزینهٔ زمان آزمایش، هزینهٔ واریانس زمان ختم آزمایش و هزینهٔ ریسک واحدهایی که قبل از زمان مورد انتظار از کار می‌افتند. لازم به ذکر است که این تابع هزینه تاکنون توسط چند پژوهش‌گر مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال می‌توان به کارهای [۲۲] و [۲۵] اشاره کرد.

از طرفی با فرض $N=n$ می‌توان نوشت (به عنوان مثال[۶] را ببینید)

$$E\left(X_{m:m:N}\mid N=n\right)=\frac{1}{\theta}g(m,N),\qquad V\left(X_{m:m:N}\mid N=n\right)=\frac{1}{\theta^{2}}h(m,N),\qquad (6)$$

هرگاه

$$g(m,N)=\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{N-\sum_{k=0}^{l-1}R_k-l+1},\qquad h(m,N)=\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\left(N-\sum_{k=0}^{l-1}R_k-l+1\right)^{2}}.$$

بنابراین از رابطهٔ (۶) به دست می‌آوریم

$$E_N\left[E\left(X_{m:m:N}\mid N=n\right)\right]=\frac{1}{\theta}B(m,M,p),\qquad (7)$$

و

$$E_N\left[V\left(X_{m:m:N}\mid N=n\right)\right]=\frac{1}{\theta^{2}}D(m,M,p),\qquad (8)$$

هرگاه

$$B(m,M,p)=\frac{1}{A(m,M,p)}\sum_{n=m}^{M}g(m,n)\binom{M}{n}p^{n}(1-p)^{M-n},$$

و

$$D(m,M,p)=\frac{1}{A(m,M,p)}\sum_{n=m}^{M}h(m,n)\binom{M}{n}p^{n}(1-p)^{M-n}.$$

همچنین از رابطهٔ (۴) داریم

$$\begin{aligned}
E(N) &= \frac{1}{A(m,M,p)}\sum_{n=m}^{M} n\binom{M}{n}p^{n}(1-p)^{M-n}\\
&= \frac{1}{A(m,M,p)}\sum_{n=m}^{M}\frac{M!}{(n-1)!(M-n)!}p^{n}(1-p)^{M-n}\\
&= \frac{Mp}{A(m,M,p)}\sum_{n=m}^{M}\frac{(M-1)!}{(n-1)!(M-n)!}p^{n-1}(1-p)^{M-n}\\
&= \frac{Mp}{A(m,M,p)}\sum_{n=m-1}^{M-1}\frac{(M-1)!}{n!(M-1-n)!}p^{n}(1-p)^{M-1-n}.
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد

$$E(N)=Mp\frac{A(m-1,M-1,p)}{A(m,M,p)}. \quad (9)$$

با جای‌گذاری (۷)، (۸) و (۹) در (۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
E(TC)=c_0+c_uMp\frac{A(m-1,M-1,p)}{A(m,M,p)}-p_s\left(Mp\frac{A(m-1,M-1,p)}{A(m,M,p)}-m\right)\\
+\frac{c_t}{\theta}B(m,M,p)+\frac{c_v}{\theta^2}D(m,M,p)+c_R\left\{1-\exp\left[-B(m,M,p)\right]\right\}.
\end{aligned} \quad (10)$$

در ادامه سه طرح سانسور را به صورت

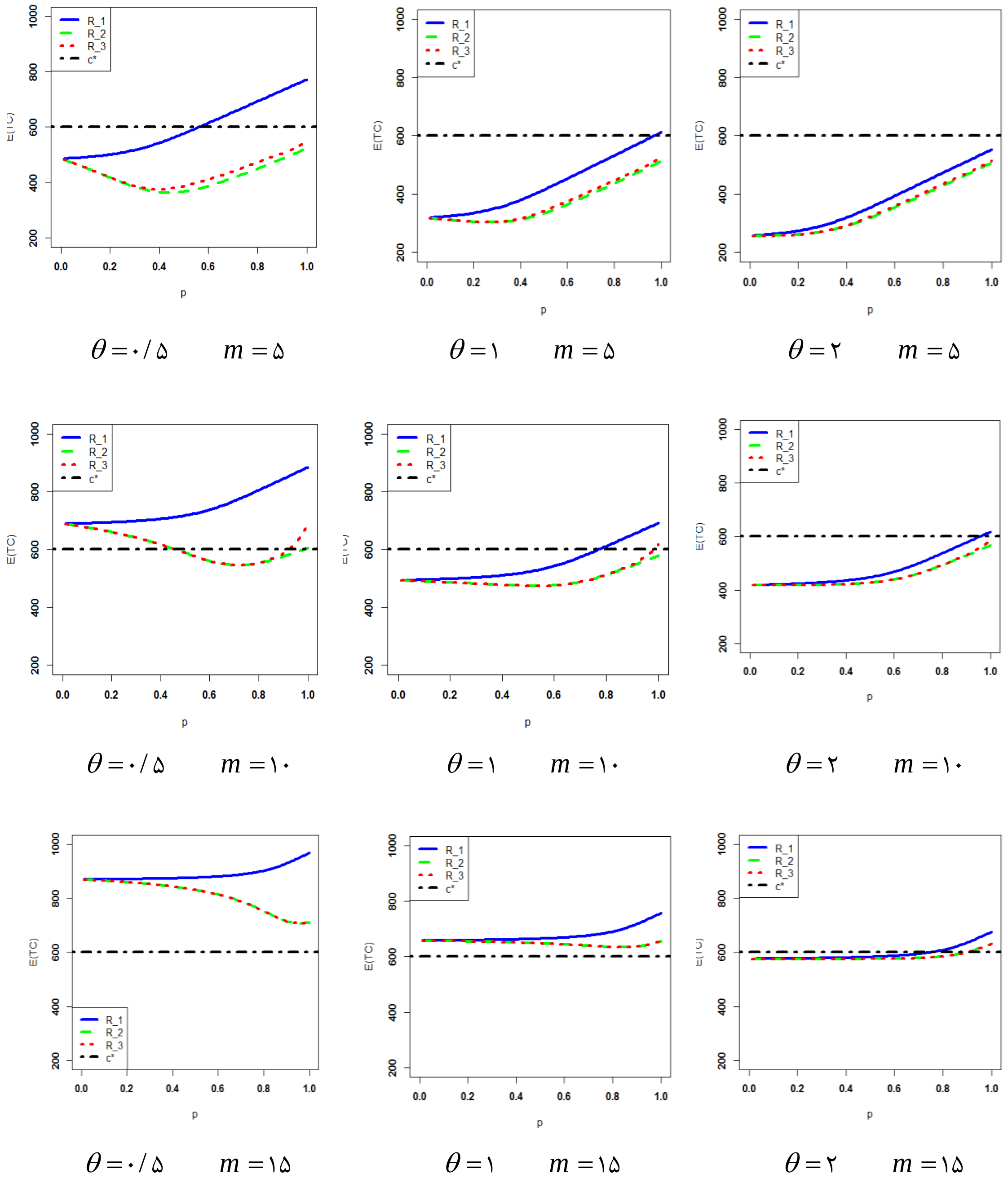
$\tilde{R}_1=(N-m,0,\dots,0)$، $\tilde{R}_2=(0,\dots,0,N-m)$ و $\tilde{R}_3=\left(\left\lfloor\frac{N}{m}-1\right\rfloor,\dots,\left\lfloor\frac{N}{m}-1\right\rfloor,N-m-(m-1)\left\lfloor\frac{N}{m}-1\right\rfloor\right)$، که $\lfloor\cdot\rfloor$ تابع جزء صحیح است، در نظر می‌گیریم. برای تعیین طرح بهینهٔ سانسور باید توزیع آن را مشخص نمود. به عبارت دیگر، باید مقدار بهینظ p یعنی p^{opt} را به‌دست آورد. برای این منظور p را طوری می‌یابیم که $E(TC)\le c^*$ هرگاه $E(TC)$ در (۱۰) تعریف شده است و c^* مقدار ثابت و از قبل تعیین‌شده است.

جدول ۱ مقادیر تابع هزینه را به‌ازای $c_0=50$، $c_u=30$، $p_s=10$، $c_t=35$، $c_R=10$، $c_v=20$، $M=20$ و همچنین مقادیر متفاوت θ، m، p و $\tilde{R}$ گزارش می‌دهد.شکل ۱ نیز نمودار تابع هزینه را با درنظر گرفتن $c_0=50$، $c_u=30$، $p_s=10$، $c_t=35$، $c_R=10$، $c_v=20$، $M=20$ و $c^*=600$ و همچنین مقادیر متفاوت θ، m، p و $\tilde{R}$ نشان می‌دهد. همان‌طور که از جدول ۱ و شکل ۱می‌توان مشاهده کرد با در نظر گرفتن $\tilde{R}_1$ به عنوان طرح سانسور، تابع هزینه یک تابع صعودی از p است. در حالی‌که برای $\tilde{R}_2$ و $\tilde{R}_3$ اینگونه نیست. با فرض $\tilde{R}_2$ و $\tilde{R}_3$ به عنوان طرح سانسور، تنها در حالت $\theta>1$ تابع هزینه تابعی صعودی برحسب p است. به‌ازای هر سه طرح سانسور، تابع هزینه تابعی صعودی از m و تابعی نزولی از θ است. همچنین، تابع هزینه به‌ازای طرح سانسور $\tilde{R}_2$ مقداری کمتر نسبت به

طرح‌های سانسور $\tilde{R}_۱$ و $\tilde{R}_۳$ دارد. در نتیجه بهترین حالت با در نظر گرفتن طرح سانسور $\tilde{R}_۲$، انتخاب مقادیر کوچکتر m ، مقادیر بزرگتر برای θ و مقادیر کوچک p اتفاق می‌افتد.

جدول ۱: مقادیر تابع هزینه به‌ازای $c_0 = ۵۰$، $c_u = ۳۰$، $p_s = ۱۰$ ، $c_t = ۳۵$، $c_R = ۱۰$، $c_v = ۲۰$، $M = ۲۰$ و مقادیر متفاوت θ، m، p و $\tilde{R}$

					$\tilde{R}_۱$					
θ	m/p	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
۰/۵	۵	۴۹۱/۴۲	۵۰۲/۱۲	۵۱۷/۸۲	۵۴۳/۷۷	۵۷۷/۶۲	۶۱۵/۳۰	۶۵۴/۱۲	۶۹۳/۳۱	۷۳۲/۷۱
	۱۰	۶۹۰/۵۴	۶۹۳/۵۳	۶۹۸/۰۶	۷۰۵/۳۱	۷۱۷/۴۳	۷۳۷/۶۳	۷۶۸/۰۳	۸۰۵/۴۹	۸۴۴/۸۱
	۱۵	۸۶۹/۰۴	۸۶۹/۹۴	۸۷۱/۱۵	۸۷۳/۸۶	۸۷۵/۴۰	۸۷۹/۴۸	۸۸۶/۷۱	۹۰۰/۸۶	۹۲۸/۴۳
۱	۵	۳۲۴/۲۷	۳۳۴/۷۹	۳۵۲/۶۲	۳۷۹/۸۷	۴۱۴/۹۱	۴۵۳/۴۸	۴۹۲/۹۰	۵۳۲/۵۱	۵۷۲/۲۳
	۱۰	۴۹۵/۰۹	۴۹۸/۱۴	۵۰۲/۷۶	۵۱۰/۱۴	۵۲۲/۴۷	۵۴۲/۹۸	۵۷۳/۷۸	۶۱۱/۶۳	۶۵۱/۲۶
	۱۵	۶۵۸/۰۸	۶۵۸/۹۹	۶۶۰/۲۱	۶۶۱/۹۳	۶۶۴/۵۰	۶۶۸/۶۱	۶۷۵/۹۰	۶۹۰/۱۷	۷۱۷/۹۳
۲	۵	۲۶۲/۵۹	۲۷۳/۴۵	۲۹۱/۷۴	۳۱۹/۵۴	۳۵۵/۰۹	۳۹۴/۰۳	۴۳۳/۷۲	۴۷۳/۵۳	۵۱۳/۳۹
	۱۰	۴۲۰/۶۰	۴۲۳/۶۸	۴۲۸/۳۴	۴۳۵/۷۸	۴۴۸/۲۰	۴۶۸/۸۵	۴۹۹/۸۳	۵۳۷/۸۶	۵۷۷/۶۴
	۱۵	۵۷۶/۳۱	۵۷۷/۲۲	۵۷۸/۴۵	۵۸۰/۱۸	۵۸۲/۷۵	۵۸۶/۸۸	۵۹۴/۲۰	۶۰۸/۵۱	۶۳۶/۳۷
					$\tilde{R}_۲$					
θ	m/p	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
۰/۵	۵	۴۵۴/۰۶	۴۱۸/۳۸	۳۸۴/۸۵	۳۶۴/۹۹	۳۶۷/۳۱	۳۸۷/۸۳	۴۱۷/۴۸	۴۵۱/۰۵	۴۸۶/۵۸
	۱۰	۶۷۵/۹۹	۶۶۰/۸۴	۶۴۱/۰۵	۶۱۶/۹۲	۵۸۸/۶۰	۵۶۰/۹۶	۵۴۶/۰۱	۵۵۳/۱۴	۵۷۵/۹۸
	۱۵	۸۶۳/۹۹	۸۵۸/۵۸	۸۵۱/۷۰	۸۴۲/۶۹	۸۳۰/۴۶	۸۱۳/۱۹	۷۸۷/۹۹	۷۵۳/۰۴	۷۱۴/۶۶
۱	۵	۳۱۰/۷۲	۳۰۴/۴۴	۳۰۳/۱۰	۳۱۲/۱۳	۳۳۳/۸۷	۳۶۴/۶۸	۳۹۹/۷۰	۴۳۶/۵۰	۴۷۴/۲۴
	۱۰	۴۸۹/۷۹	۴۸۶/۰۵	۴۸۱/۷۹	۴۷۷/۳۸	۴۷۴/۲۱	۴۷۵/۸۶	۴۸۷/۹۶	۵۱۲/۵۰	۵۴۴/۳۸
	۱۵	۶۵۶/۲۴	۶۵۴/۸۵	۶۵۳/۱۰	۶۵۰/۸۸	۶۴۷/۹۸	۶۴۴/۱۴	۶۹۳/۲۰	۶۳۴/۱۹	۶۳۵/۹۷
۲	۵	۲۵۷/۰۰	۲۶۰/۷۶	۲۷۰/۶۷	۲۹۰/۱۲	۳۱۹/۲۰	۳۵۴/۱۳	۳۹۱/۴۲	۴۲۹/۶۵	۴۶۸/۳۷
	۱۰	۴۱۸/۴۳	۴۱۸/۷۰	۴۱۹/۶۵	۴۲۲/۱۰	۴۲۷/۸۳	۴۴۰/۰۸	۴۶۲/۳۷	۴۹۳/۸۴	۵۲۹/۵۸
	۱۵	۵۷۵/۵۵	۵۷۵/۵۲	۵۷۵/۵۳	۵۷۵/۶۳	۵۷۵/۹۳	۵۷۶/۷۳	۵۷۸/۸۸	۵۸۴/۸۸	۶۰۱/۱۰
					$\tilde{R}_۳$					
θ	m/p	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
۰/۵	۵	۴۵۴/۰۷	۴۱۸/۷۴	۳۸۷/۸۵	۳۷۵/۸۵	۳۸۸/۰۲	۴۱۲/۱۵	۴۴۱/۱۸	۴۷۳/۹۶	۵۰۵/۵۳
	۱۰	۶۷۵/۹۹	۶۶۰/۴۸	۶۴۱/۰۵	۶۱۶/۹۲	۵۸۸/۶۰	۵۶۰/۹۶	۵۴۶/۰۸	۵۵۴/۱۳	۵۸۶/۴۹
	۱۵	۸۶۳/۹۹	۸۵۸/۵۸	۸۵۱/۷۰	۸۴۲/۶۹	۸۳۰/۴۶	۸۱۳/۱۹	۷۸۷/۹۹	۷۵۲/۰۴	۷۱۴/۶۶
۱	۵	۳۱۰/۷۲	۳۰۴/۵۹	۳۰۴/۳۶	۳۱۶/۷۷	۳۴۲/۹۵	۳۷۵/۶۴	۴۱۰/۷۰	۴۴۷/۳۶	۴۸۳/۴۳
	۱۰	۴۸۹/۷۹	۴۸۶/۰۵	۴۸۱/۷۹	۴۷۷/۳۸	۴۷۴/۲۱	۴۷۵/۸۶	۴۸۷/۹۹	۵۱۲/۹۳	۵۴۹/۰۱
	۱۵	۶۵۶/۲۴	۶۵۴/۸۵	۶۵۳/۱۰	۶۵۰/۸۸	۶۴۷/۹۸	۶۴۴/۱۴	۶۹۳/۲۰	۶۳۴/۱۹	۶۳۵/۹۷
۲	۵	۲۵۷/۰۰	۲۶۰/۸۳	۲۷۱/۲۷	۲۹۲/۳۷	۳۲۳/۷۳	۳۵۹/۷۵	۳۹۷/۲۱	۴۳۵/۴۷	۴۷۳/۳۹
	۱۰	۴۱۸/۴۳	۴۱۸/۷۰	۴۱۹/۶۵	۴۲۲/۱۰	۴۲۷/۸۳	۴۴۰/۰۹	۴۶۲/۳۸	۴۹۴/۰۵	۵۳۱/۹۰
	۱۵	۵۷۵/۵۵	۵۷۵/۵۲	۵۷۵/۵۳	۵۷۵/۶۳	۵۷۵/۹۳	۵۷۶/۷۳	۵۷۸/۸۸	۵۸۴/۸۸	۶۰۱/۱۰



شکل ۱: نمودارتابع هزینه با درنظر گرفتن $c_. = ۵۰$، $c_u = ۳۰$، $p_s = ۱۰$، $c_t = ۳۵$، $c_R = ۱۰$، $c_v = ۲۰$، $M = ۲۰$ **و** $c^* = ۶۰۰$ **و مقادیر متفاوت** θ، m، p **و** $\tilde{R}$

حال با درنظر گرفتن شرط $E(TC) \le c^*$ و با فرض $c_. = ۵۰$، $c_u = ۳۰$، $p_s = ۱۰$، $c_t = ۳۵$، $c_R = ۱۰$، $c_v = ۲۰$، $M = ۲۰$ و $c^* = ۶۰۰$ و همچنین مقادیر متفاوت θ، m و $\tilde{R}$ به محاسبه مقادیر p^{opt} می‌پردازیم. نتایج

در جدول ۲ گزارش شده است. در جدول ۲ حالاتی که مقداری برای p وجود ندارد که شرط $E\left(TC\right)\le c^{*}$ برقرار باشد با خط تیره (-) نشان داده شده‌اند.

جدول ۲: مقادیر p^{opt} به‌ازای $c_{\cdot}=۵۰$، $c_u=۳۰$، $p_s=۱۰$، $c_t=۳۵$، $c_R=۱۰$، $c_v=۲۰$، $M=۲۰$ و $c^{*}=۶۰۰$ و مقادیر متفاوت θ، m و $\tilde{R}$

θ	m	$\tilde{R}_۱$	$\tilde{R}_۲$	$\tilde{R}_۳$
۰/۵	۵	(۰,۰/۵۵)	(۰,۱)	(۰,۱)
	۱۰	-	(۰/۴۶,۰/۹۸)	(۰/۴۶,۰/۹۲)
	۱۵	-	-	-
۱	۵	(۰,۰/۹۶)	(۰,۱)	(۰,۱)
	۱۰	(۰,۰/۷۷)	(۰,۱)	(۰,۰/۹۸)
	۱۵	-	-	-
۲	۵	(۰,۱)	(۰,۱)	(۰,۱)
	۱۰	(۰,۰/۹۵)	(۰,۱)	(۰,۱)
	۱۵	(۰,۰/۷۴)	(۰,۰/۸۹)	(۰,۰/۸۹)

۳. مطالعهٔ شبیه‌سازی

دراین بخش،به منظورارزیابی عملکردنتایج بخش قبل،یک مطالعهٔ شبیه‌سازی انجام شده است. برای این منظور الگوریتم زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

الگوریتم ۱: فرض کنید θ، m، M، c^{*}، $c_{\cdot}$، c_u، p_s، c_t، c_v، c_R و $\tilde{R}$ همگی معلوم باشند. در این‌صورت:

۱) مقدار p^{opt} را از طوری بیابید که شرط $E\left(TC\right)\le c^{*}$ برقرار باشد.

۲) مقدار N را از توزیع $Bin(M\,,p^{opt};m)$ تولید کنید.

۳) تعداد m متغیر تصادفی مستقل $W_۱,\cdots,W_m$ را از توزیع یکنواخت پیوسته $U\left(۰,۱\right)$ تولید کنید.

۴) قرار دهید $V_i=W_i^{\overline{i+\sum_{k=m-i+۱}^{m}R_k}}$، $i=۱,\cdots,m$.

۵) قرار دهید $U_i=۱-\prod_{k=m-i+۱}^{m}V_k$، $i=۱,\cdots,m$.

۶) آماره‌های مرتب سانسور فزایندهٔ نوع دو را به‌صورت $X_{i:m:N}=F^{-۱}(U_i)$، $i=۱,\cdots,m$، به‌دست آورید، هرگاه $F^{-۱}$ تابع چندک توزیع نمایی با پارامتر θ است.

۷) مراحل ۲ تا ۶ را به تعداد $K=۱۰۰۰۰$ بار تکرار نمایید.

۸) فرض کنید که $N^{(l)}$ و $X_{i:m:N^{(l)}}\left(l\right)$ به‌ترتیب مقدار N و iامین آمارهٔ مرتب سانسور فزایندهٔ نوع دو در تکرار lام باشند ($l=۱,\cdots,K$).

۹) متوسط تابع هزینه را به صورت

$$EE(TC)=c_{\cdot}+c_u\frac{۱}{K}\sum_{l=۱}^{K}N^{(l)}-p_s\left(\frac{۱}{K}\sum_{l=۱}^{K}N^{(l)}-m\right)+\frac{c_tQ(m)}{\theta}+\frac{c_vP(m)}{\theta^{۲}}+c_R\left\{۱-\exp\left[-Q(m)\right]\right\},$$

به دست آورید، هرگاه

$$Q(m)=\frac{1}{K}\sum_{l=1}^{K}X_{m:m:N^{(l)}}\left(l\right),$$

$$Z(m)=\frac{1}{K}\sum_{l=1}^{K}X^{2}_{m:m:N^{(l)}}\left(l\right),$$

و

$$P(m)=Z(m)-\left(Q(m)\right)^{2}.$$

با به کارگیری الگوریتم ۱ و با فرض $c_{\cdot}=50$، $c_u=30$، $p_s=10$، $c_t=35$، $c_R=10$، $c_v=20$، $M=20$ و $c^*=600$ و مقادیر متفاوت θ، m و $\tilde{R}$ مقادیر $EE(TC)$ محاسبه و در جدول ۳ ارائه شده‌اند. در جدول ۳ مقادیر p^{opt} استفاده شده درواقع کران‌های بالای بازه‌ای هستند که به‌ازای کلیظ مقادیر آن بازه شرط $E\left(TC\right)\le c^*$ برقرار است. از جدول ۳ می‌توان مشاهده کرد که در اکثر حالات شرط $EECT\le c^*$ برقرار است.

جدول ۳: مقادیر $EE(TC)$ به‌ازای $c_{\cdot}=50$، $c_u=30$، $p_s=10$، $c_t=35$، $c_R=10$، $c_v=20$، $M=20$ و $c^*=600$ و مقادیر متفاوت θ، m و $\tilde{R}$

θ	m	$\tilde{R}_1$		$\tilde{R}_2$		$\tilde{R}_3$	
		p^{opt}	$EE(TC)$	p^{opt}	$EE(TC)$	p^{opt}	$EE(TC)$
۰/۵	۵	۰/۵۵	۱۰۶۷/۰۰	۱	۵۳۲/۱۴	۱	۵۶۲/۱۲
	۱۰	–	–	۰/۹۸	۶۵۳/۶۳	۰/۹۲	۶۶۹/۱۵
	۱۵	–	–	–	–	–	–
۱	۵	۰/۹۶	۵۷۲/۰۵	۱	۴۹۳/۳۲	۱	۴۸۳/۲۷
	۱۰	۰/۷۷	۵۷۳/۰۷	۱	۵۶۱/۸۴	۰/۹۸	۵۱۴/۴۵
	۱۵	–	–	–	–	–	–
۲	۵	۱	۵۰۶/۹۱	۱	۴۸۴/۰۲	۱	۴۶۶/۷۱
	۱۰	۰/۹۵	۵۴۵/۲۲	۱	۵۳۹/۶۵	۱	۵۲۱/۷۰
	۱۵	۰/۷۴	۵۴۶/۶۶	۰/۸۹	۵۵۶/۹۹	۰/۸۹	۵۵۷/۱۹

۴. نتیجه‌گیری

تعیین اندازهٔ نمونهٔ بهینه از جمله مسائلی است که تاکنون توسط پژوهش‌گران زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. در برخی موارد امکان این‌که اندازهٔ نمونه مقداری ثابت و از قبل تعیین‌شده باشد وجود ندارد. به عبارت دیگراندازهٔ نمونه متغیری تصادفی است. در این مقاله با فرض این‌که اندازهٔ نمونهٔ سانسور فزایندهٔ نوع دو متغیری تصادفی از توزیع دوجمله‌ای باشد به تعیین پارامتر بهینهٔ توزیع اندازهٔ نمونه پرداخته می‌شود. معیار مورد استفاده در این پژوهش معیار هزینه است. در ادامه پارامتر بهینهٔ توزیع اندازهٔ نمونه طوری تعیین می‌شود که مقدار تابع هزینه از مقدار مشخص و از

قبل تعیین‌شده‌ای کمتر باشد. نتایج مقاله نشان داد با در نظر گرفتن طرح سانسور $\tilde{R}_1$ تابع هزینه یک تابع صعودی از p است. بنابراین مقادیر کوچکتر p منجر به نتایج بهتری می‌شود. امابا فرض $\tilde{R}_2$ و $\tilde{R}_3$ به عنوان طرح سانسور، تنهادر حالت $\theta > 1$ تابع هزینه تابعی صعودی برحسب p است. به‌ازای هر سه طرح سانسور، تابع هزینه تابعی صعودی از m و تابعی نزولی از θ است. همچنین، تابع هزینه به‌ازای طرح سانسور $\tilde{R}_2$ مقداری کمتر نسبت به طرح‌های سانسور $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_3$ دارد. در نتیجه بهترین حالت با در نظر گرفتن طرح سانسور $\tilde{R}_2$، انتخاب مقادیر کوچکتر m، مقادیر بزرگتر برای θ و مقادیر کوچک p اتفاق می‌افتد.

سپاس‌گزاری

لازم است از سردبیر، هیأت تحریریه، داوران و ویراستار محترم مجله برای صرف وقت در مطالعه مقاله و ارائه پیشنهادهای سازنده‌شان در بهبود این مقاله، تشکر و قدردانی شود.

References

۱. اسدی، مجید (۱۳۹۳). آشنایی با نظریهٔ قابلیت اعتماد. مرکز نشر دانشگاهی.

2. Bain, L. J. and Engelhardt (1991). *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models*. Second Edition, Marcel Dekker, New York.

3. Cohen, A. C. (1991). *Truncated and Censored Samples- Theory and Applications*. Marcel Dekker, New York.

4. Lawless, J. L. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. Second Edition, John Wiley and Sons, New York.

5. Nelson, W. (2004). *Applied Life Data Analysis*. John Wiley and Sons, New York.

6. Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*.Birkhauser, Boston.

7. Balakrishnan, N. (2007). Progressive censoring methodology: an appraisal. *Test*. **16**, 211-259.

8. Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014). *The Art of Progressive Censoring*. Birkhauser, New York.

۹. بصیری، الهام (۱۳۸۹). طرح بهینه در سانسور فزایندهٔ نوع دو. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.

10. Burkschat, M., Cramer, E., and Kamps, U. (2006). On optimal schemes in progressive censoring. *Statistics and probability letters*, **76**(10), 1032-1036.

11. Burkschat, M., Cramer, E., and Kamps, U. (2007). Linear estimation of location and scale parameters based on generalized order statistics from generalized Pareto distributions. *Recent Developments in Ordered Random Variables*. 253-261.

12. Burkschat, M., Cramer, E., and Kamps, U. (2007). Optimality criteria and optimal schemes in progressive censoring. *Communications in Statistics—Theory and Methods*. **36**(7), 1419-1431.

۱۳. بصیری، الهام؛ احمدی، جعفر (۱۳۸۹). طرح بهینهٔ سانسور فزاینده در توزیع بر نوع ۱۲ بر اساس اطلاع فیشر. دهمین کنفرانس آمار ایران.

14. Volterman W., Davies F.K. and Balakrishnan N. (2012). Pitman closeness as a criterion for the determination of the optimal progressive censoring scheme. *Statistical Methodology*, **9**(6), 563-572.

15. Pradhan, B. and Kundu, D. (2013). Inference and optimal censoring schemes for progressively censored Birnbaum–Saunders distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, ***143***(6), 1098-1108.

16. Bhattacharya, R., Pradhan, B., and Dewanji, A. (2016). On optimum life-testing plans under Type-II progressive censoring scheme using variable neighborhood search algorithm. *Test*, **25**(2), 309-330.

17. Mishra, N. (2018). Optimal one-step censoring schemes under entropy criterion. *Communications in Statistics-Simulation and Computation.* 1-14.

18. Salemi, U. H., Rezaei, S., Si, Y., and Nadarajah, S. (2018). On Optimal Progressive Censoring Schemes for Normal Distribution. *Annals of Data Science*, ***5***(4), 637-658.

19. Pham, H. (1992), Optimal Design of Life Testing for ULSI Circuit Manufacturing, *IEEE transactions on semiconductor manufacturing*, **5**, 68-70.

20. Basiri, E., and MirMostafaee, S. M. T. K. (2017), Optimal Sample Size Based on Prediction Problem Under Progressively Type-II Censoring, *Reliability Theory and its Applications*, 68-72.

21. Pham, H., and Zhang, X. (1999), A Software Cost Model with Warranty and Risk Costs, *IEEE Transactions on Computers*, **48**, 71-75.

22. Cordeiro, J. B., and Pham, H. (2017), Optimal Design of Life Testing Cost Model for Type-II Censoring Weibull Distribution Lifetime Units with Respect to Unknown Parameters, *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, **8**, 28-32.

23. Basiri, E. (2017). Optimal Number of Failures in Type II Censoring for Rayleigh Distribution. *Journal of Applied Research on Industrial Engineering*, **4**(1), 67-74.

۲۴. بصیری، الهام(۱۳۹۸). اندازه نمونه و طرح بهینه در سانسور فزایندهٔ نوع دو براساس معیار اطلاع فیشر در توزیع پارتو. مجلهٔ اندیشظ آماری. سال ۲۴، شماره ۲، ۲۵-۳۵.

۲۵. بصیری، الهام؛ صالحی، سید مهدی (۱۳۹۹) اندازهٔ نمونهٔ بهینه براساس تابع هزینه در مدل سانسور فزایندهٔ نوع دو. علوم آماری, ۴۱-۵۴.

۲۶. بصیری، الهام؛ بیگی، سکینه (۱۳۹۹). طرح بهینه در سانسور فزایندهٔ نوع دو با برداشت های دوجمله ای از توزیع رایلی براساس پیش بینی دونمونه ای بیزی و تابع هزینه. مجله مدل سازی پیشرفته ریاضی. دوره ۱۰، شماره ۱، ۱۳۵-۱۵۷.

27. Raghunandanan, K. and Patil, S. A. (1972). On order statistics for random sample size. *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 366-381.

28. Buhrman, J. M. (1973). On order statistics when the sample size has a binomial distribution.*Statistica Neerlandica*, **27**, 125-126.

29. Consul, P. C. (1984). On the distribution of order statistics for a random sample size. *Statistica Neerlandica*, **38**, 249-256.

30. Gupta, D. and Gupta, R. C. (1984), On the distribution of order statistics for a random sample size. *Statistica Neerlanddica*, **38**, 13-19.

31. Lingappaiah, G. S. (1986), Bayes prediction in exponential life-testing when sample size is a random variable. *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 1732-1743.

32. Soliman, A. A. (2000), Bayes prediction in a Pareto lifetime model with random sample size. *Journal of the Royal Statistical Society*, *Series D, (The Statistician*), **49**, 51-62.

33. Abd Ellah, A. H. and Sultan, K. S. (2005), Exact Bayesian prediction of exponential lifetime based on fixed and random sample sizes. *Quality Technology andQuantitative Management*, **2**, 161-175.

34. Al-Hussaini, E. K. and Al-Awadhi, F. (2010), Bayes two-sample prediction of generalized order statistics with fixed and random sample size. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 13-28.

35. Barakat, H. M., El-Adll, M. E. and Aly, A. E. (2011), Exact prediction intervals for future exponential lifetime based on random generalized order statistics. *Computers and Mathematics with Applications*, **61**, 1366-1378.

36. Basiri, E., and Ahmadi, J. (2015). Prediction intervals for generalized-order statistics with random sample size. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. **85**(9), 1725-1741.

37. Basiri, E., and Pakzad, A. (2018). Optimal Non-Parametric Prediction Intervals for Order Statistics with Random Sample Size. *Iranian Journal of Management Studies*, **11**(2), 307-322.

38. Ahmadi, J., Basiri, E., and MirMostafaee, S. M. T. K. (2016), Optimal Random Sample Size Based on Bayesian Prediction of Exponential Lifetime and Application to Real Data, *Journal of the Korean Statistical Society*, **45**, 221-237.