



Kharazmi University

# Numerical solution for the transmission of some novel coronavirus (2019-nCov) models by the Newton-Taylor polynomial solutions

Bahman Babayar-Razlighi<sup>1</sup> 

1. Department of Mathematics, Qom University of Technology, Qom, Iran. ✉E-mail: [babayar@qut.ac.ir](mailto:babayar@qut.ac.ir)

---

---

**Article Info**

**Article type:**  
Research Article

**Article history:**

Received:  
5 May 2020  
Received in revised form:  
13 April 2021  
Accepted:  
21 April 2021  
Published online:  
31 December 2022

**Keywords:**

Novel coronavirus (2019-nCov), Newton-Taylor polynomial solutions, Infectious disease, Infectious classes, Nonlinear differential equations system.

---

---

**ABSTRACT**

**Introduction**

In this paper we consider two types of mathematical models for the novel coronavirus (2019-nCov), which are in the form of a nonlinear differential equations system. In the first model the contact rate,  $C$ , and transition rate of symptomatic infected individuals to the quarantined infected class,  $\delta_I$ , are constant. And in the second model these quantities are time dependent. These models are the SEIR one, where  $S, E, I, R$  are Susceptible, Exposed, Infected and Recovered classes of human population respectively. We establish the Newton-Taylor polynomial solutions for these systems, so that the nonlinear systems are solvable by an iterative and progressive process with a good accuracy. We completely describe the algorithm of such systems in another paper and here we express briefly. This algorithm action on the interval

$$[0, bN_i] = \bigcup_{k=0}^{N_i-1} [kb, (k+1)b], \text{ where } b > 0 \text{ is the length of partial}$$

intervals, and  $N_i$  is the number of intervals. In every partial interval, we linearize the problem by the Newton's method and then solve the sequence of linear problems by the Taylor polynomial solutions technique. We extensively investigate the numerical analysis of the method. Numerical examples show that the results are well-adjusted with the similar works that simulate the problem.

**Material and methods**

In this paper we solve two types of mathematical models of the novel corona virus. These models are in the nonlinear ordinary differential equations format. We introduce the Newton's method for numerical solution of the problem. Since biological problems are required on a long time interval, we consider the problem on union of many partial intervals. The initial guess of the Newton's method in the beginning of partial intervals is obtained from the lag interval and hence the initial guess is

---

near to the exact one. Thus the newton's method converges much more rapidly than a simple iterative method. This advantage causes that the problem is solvable on a long time interval.

### Results and discussion

In accordance with the Kantorovich theorem, the main criterion of the method is that the Frechet derivative of operator  $F$  in the operator equation  $F(U) = 0$  must be Lipschitz continuous with a Lipschitz constant  $l > 0$ . Whatever  $l$  is small, the accuracy of the method is better. As we see in the numerical examples this quantity is very small in presented models.

Not only for these models, but for more diseases models that the parameter  $l$  of Lipschitz continuity is small, the method is applicable and has a good accuracy on a long time interval.

### Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- When the Lipschitz continuity constant is very small we can let a large value for the length of the partial intervals and hence the total time interval is wide.
- Example 1 is an autonomous and Example 2 is a non autonomous system of ordinary differential equations, and the proposed method is applicable for all of such systems. This is an another advantage of the proposed method.
- Mathematical Programming of the method is straightforward and we can do this programming for other infectious diseases such as influenza models.

---

**How to cite:** Babayar-Razlighi, B. (2022). Numerical solution for the transmission of some novel coronavirus (2019-nCov) models by the Newton-Taylor polynomial solutions. *Mathematical Researches*, 8 (4), 1-18.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---



Kharazmi University

## حل عددی برخی مدل‌های حاکم بر انتقال بیماری کرونا ویروس جدید (nCov-۲۰۱۹) با استفاده از روش جواب‌های چند جمله‌ای نیوتن-تیلور

بهمن بابایار رازلیقی<sup>۱</sup> ✉

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران. رایانامه: [babayar@qut.ac.ir](mailto:babayar@qut.ac.ir)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

در این مقاله دو نوع از مدل‌های ریاضی بیماری عفونی کرونا ویروس جدید را که به شکل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی است در نظر می‌گیریم. در مدل اول، نرخ تماس  $C$  و نرخ انتقال افراد عفونی دارای علامت به رده‌ی قرنطینه شده‌ی عفونی،  $\delta_I$ ، را ثابت می‌گیریم و در مدل دوم این کمیت‌ها را وابسته زمانی در نظر خواهیم گرفت. این مدل‌ها از نوع مدل  $SEIR$  است، که در آن  $S, E, I, R$  به ترتیب تعداد افراد حساس ( $Susceptible$ )، در معرض عفونت ( $Exposed$ )، عفونی شده ( $Infected$ ) و افراد بهبود یافته ( $Recovered$ ) جمعیت انسانی هستند. روش جواب‌های چند جمله‌ای نیوتن-تیلور را برای حل این سیستم طوری طراحی خواهیم کرد که با یک فرایند تکرار و پیش‌رونده، سیستم غیر خطی با درجه دقت خوب قابل حل باشد. الگوریتم حل چنین سیستم‌هایی را در مقاله‌ی دیگر به طور کامل تشریح کرده‌ایم و در اینجا به طور خلاصه بیان می‌کنیم. این الگوریتم بر پایه‌ی 
$$[0, bN_i] = \bigcup_{k=0}^{N_i-1} [kb, (k+1)b]$$
 عمل می‌کند که در آن  $b > 0$  طول بازه‌های جزء و  $N_i$  تعداد بازه‌های جزء است. در هر بازه‌ی جزء، مساله را به روش نیوتن خطی سازی کرده و مساله خطی شده را به روش جواب‌های چند جمله‌ای تیلور حل عددی می‌کنیم. آنالیز همگرایی روش برای مدل به کاررفته را به طور مفصل بررسی می‌کنیم.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۱۶

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۲۴

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۰۱

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

### واژه‌های کلیدی:

کرونا ویروس جدید  
(nCov-۲۰۱۹)

روش جواب‌های چند جمله‌ای  
نیوتن-تیلور،

بیماری‌های عفونی،  
کلاس‌های عفونی،

دستگاه معادلات دیفرانسیل  
غیر خطی.

استناد: بابایار رازلیقی، بهمین؛ (۱۴۰۱). حل عددی برخی مدل‌های حاکم بر انتقال بیماری کرونا ویروس جدید (nCov-۲۰۱۹) با استفاده از روش جواب‌های چند جمله‌ای نیوتن-تیلور. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۴)، ۱-۱۸.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱- مقدمه

هر چند داده‌های مورد استفاده در این مقاله مربوط به ووهان چین است ولی با مدل‌سازی جوامع دیگر که البته داده‌های اولیه و برخی پارامترها احتمالاً تغییر می‌کنند، می‌توان در هر لحظه جمعیت افراد حساس ( $S$ )، در معرض عفونت ( $E$ )، عفونی شده ( $I$ ) و افراد بهبود یافته ( $R$ ) را تخمین زد و برای تصمیم‌گیری و ایجاد پروتکل‌های سلامتی تدابیر لازم را اتخاذ کرد.

بنا بر شناخت سازمان بهداشت جهانی، مدل‌های ریاضی به خصوص آنهایی که با پارامترهای وابسته زمانی هستند، می‌توانند نقش کلیدی در تصمیم‌های بهداشتی و اتخاذ تدابیر تعیین‌کننده مبتنی بر مدرک را ارائه دهند. مدل‌ها در واقع به ما کمک می‌کنند تا موارد زیر را بهتر بفهمیم

- چطور بیماری قابل انتقال می‌شود.
- کی عفونت در طی جریان بیماری عفونی به حد اکثر می‌رسد.
- چطور بیماری ریشه‌کن می‌شود.
- تحلیل حساسیت روی مساله به چه صورت‌هایی می‌تواند طراحی گردد.
- چطور مداخلات موثر بایستی اعمال شود.

البته این‌که دقیقاً چطور در دنیا از این مدل‌ها برای دست یافتن به اهداف فوق استفاده می‌شود، امری قابل تامل و یک کار تیمی است. به نظر می‌رسد با توجه به وجود پتانسیل‌های بالا قوه در میهن اسلامی، این مهم می‌تواند بین وزارت بهداشت و وزارت عتف ایجاد شود. سازماندهی این مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲ پس از معرفی روند نیوتن برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل و تشکیل دنباله مسائل خطی، به نحوه حل این دنباله با روشی به نام روش جواب‌های چند جمله‌ای تیلور می‌پردازیم. در بخش ۳ مدل‌های کرونایی مورد بحث به همراه تعریف پارامترهای مربوطه تشریح می‌شود. در بخش ۴ به آنالیز همگرایی روش پیشنهاد شده برای مدل‌های موجود می‌پردازیم. در بخش ۵ نتایج عددی برای مدل‌های بخش ۳ ارائه می‌شود. نتایج به دست آمده تمام توابع مدل را به دست می‌دهد.

## ۲- روش جواب‌های چند جمله‌ای نیوتن-تیلور برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر

### خطی

در این بخش روش جواب‌های چند جمله‌ای نیوتن-تیلور برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی زیر تشریح می‌شود

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = f(t, U(t)), & t \in [0, N_i b], \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

که در آن  $U(t) = (u_1(t), \dots, u_d(t))^T$  تابع برداری مجهول مساله،  $\dot{U}(t)$  مشتق زمانی  $U(t)$  و  $f$  تابع برداری پیوسته معلوم به شکل  $f(t, U(t)) = (f_1(t, U(t)), \dots, f_d(t, U(t)))^T$  می‌باشد.  $d \in \mathbb{N}$  بُعد مساله،  $b > 0$  طول بازه‌های جزء در  $[0, bN_i] = \bigcup_{k=0}^{N_i-1} [kb, (k+1)b]$  و  $N_i$  تعداد بازه‌های جزء است. به عنوان نمونه در مثال ۱ بخش نتایج عددی  $b = 0.2, N_i = 500$  و لذا مساله در یک بازه‌ی زمانی نسبتاً طولانی [۱۰۰.۱]، صد روز، حل شده است. این روش به طور کامل در مقاله [۱] تشریح گردیده است و در اینجا به کلیات بحث و مطالبی راجع به همگرایی روش برای مدل‌های کرونایی خواهیم پرداخت. الگوریتم روش در [۱] اشاره شده است.

### ۲-۱- روش نیوتن

فرض کنید  $X, Y$  دو فضای باناخ بوده و  $F: X \rightarrow Y$  یک عملگر مشتق پذیر فرشه باشد. برای حل معادله  $F(U) = 0$  با برآورد اولیه  $U^{(0)} \in X$ ، دنباله مسائل خطی زیر را حل کرده

$$F'(U^{(n)})U^{(n+1)} = F'(U^{(n)})U^{(n)} - F(U^{(n)}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

و روند تکرار را تا جایی ادامه می‌دهیم که مثلاً به ازای  $\varepsilon > 0$  مفروض  $\|U^{(n+1)} - U^{(n)}\| \leq \varepsilon$ . قضیه زیر نحوه محاسبه عملگر  $F'$  را نشان می‌دهد.

**قضیه ۱:** فرض کنید  $X, Y$  دو فضای باناخ بوده و  $F: X^d \rightarrow Y^d$  یک عملگر مشتق پذیر فرشه در  $U^{(0)} = (u_1^{(0)}, \dots, u_d^{(0)})^T$  باشد که در آن  $d \in \mathbb{N}$  بُعد مساله است. در این صورت مشتقات جزئی فرشه  $F$  که با

$$D_i F(U^{(0)}) = \frac{\partial}{\partial u_i} (F(U)) \Big|_{U=U^{(0)}} = F_{u_i}(U^{(0)}), \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.3)$$

نمایش داده می‌شوند موجود بوده و

$$F'(U^{(0)})\Delta U = \sum_{i=1}^d F_{u_i}(U^{(0)})\Delta u_i, \quad \Delta U = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_d)^T. \quad (2.4)$$

برعکس اگر  $F_{u_i}(U^{(0)}), i = 1, \dots, d$  در یک همسایگی از  $U^{(0)}$  موجود و در  $U^{(0)}$  پیوسته باشند آن‌گاه  $F$  در  $U^{(0)}$  مشتق پذیر فرشه بوده و معادله (۲.۴) برقرار است. **برهان:** گزاره ۵.۳.۱۵ از [۲] را ملاحظه کنید.

<sup>۱</sup> Number of intervals

## ۲-۲- به کارگیری روند نیوتن برای مسأله (۲.۱)

از این جا به بعد و تا پایان مقاله فرض می‌کنیم  $k \in \{1, \dots, N_i\}$  و  $t \in I_k := [(k-1)b, kb]$ ، مگر این که خلاف آن را صراحتاً بیان کنیم. عملگر زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} F : (C^1(I_k))^d \rightarrow (C(I_k))^d \\ F(U)(t) := \dot{U}(t) - f(t, U(t)), \quad U \in (C^1(I_k))^d \end{cases} \quad (2.5)$$

که در آن منظور از  $F(U)(t) := \dot{U}(t) - f(t, U(t))$  یعنی این که کمیت  $F(U)(t)$  برابر با کمیت معلوم  $\dot{U}(t) - f(t, U(t))$  تعریف می‌شود. در این صورت روند نیوتن برای این عملگر به صورت زیر به دست می‌آید [۱].

$$(U^{(n+1)}(t))' - f'(t, U^{(n)}(t))U^{(n+1)}(t) = f(t, U^{(n)}(t)) - f'(t, U^{(n)}(t))U^{(n)}(t) \quad (2.6)$$

که در آن  $f'(t, U^{(n)}(t)) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(t, U(t)) \Big|_{U(t)=U^{(n)}(t)} \right]_{d \times d}$  ماتریس ژاکوبی یا ماتریس مشتق فرشه می‌باشد.

## ۲-۳- روش جواب‌های چند جمله‌ای تیلور برای گام‌های روند نیوتن

این روش در [۳] برای سیستم‌های خطی با ضرایب متغیر توضیح داده شده و در [۱] به طور کامل برای معادله (۲.۶) تشریح شده است. در این جا به طور خلاصه نحوه تشکیل سیستم خطی را توضیح می‌دهیم. معادله (۲.۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$P_0(t)y(t) + P_1(t)y'(t) = r(t), \quad (2.7)$$

که در آن  $P_1(t) = I_d$  (ماتریس همانی  $d \times d$ )،  $P_0(t) = -f'(t, U^{(n)}(t))$ ،  $y(t) = U^{(n+1)}(t)$  و  $r(t) = f(t, U^{(n)}(t)) - f'(t, U^{(n)}(t))U^{(n)}(t)$ . مؤلفه‌های بردار مجهول  $y(t)$  را در بازه جزء  $I_k$  با  $b(k-1) \leq t \leq bk$  (معمولاً  $c$  را وسط بازه می‌گیریم) به صورت زیر برآورد می‌کنیم

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^N \frac{y_i^{(j)}(c)}{j!} (t-c)^j, \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.8)$$

که در آن  $N \geq 1$  یک عدد طبیعی بوده و  $y_i^{(j)}(c)$  ها ضرایب تیلور هستند که بایستی تعیین شوند. با مشتق‌گیری از (۲.۸) به دست می‌آوریم

$$y_i'(t) = \sum_{j=1}^N \frac{y_i^{(j)}(c)}{(j-1)!} (t-c)^{j-1}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (2.9)$$

معادلات (۲.۸) و (۲.۹) را به صورت ماتریسی زیر می‌توانیم بنویسیم

$$y_i^{(m)}(t) = T(t)M_m A_i, \quad i = 1, \dots, d, m = 0, 1, \quad (2.10)$$

که در آن

$$T(t) = (1, (t-c), (t-c)^2, \dots, (t-c)^N), \quad A_i = (y_i(c), y_i'(c), \dots, y_i^{(N)}(c))^T,$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

بنا به معادله (۲.۱۰)

$$y^{(m)}(t) = T^*(t)M_m^*A, \quad m = 0, 1, \tag{۲.۱۱}$$

که در آن

$$T^*(t) = \begin{bmatrix} T(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T(t) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & T(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times (N+1)d}, \quad M_m^* = \begin{bmatrix} M_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_m & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)d \times (N+1)d},$$

ماتریس‌های بلوکی و

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)d \times 1},$$

یک بردار بلوکی با اندازه‌های داده شده است. با معرفی نقاط هم‌محلی تیلور به صورت زیر به محاسبه ضرایب تیلور می‌پردازیم

$$t_j = bk + \frac{b}{N}j, \quad j = 0, 1, \dots, N. \tag{۲.۱۲}$$

با جایگذاری نقاط هم‌محلی (۲.۱۲) در معادله ماتریسی (۲.۷) داریم

$$P_0 Y^{(0)} + P_1 Y^{(1)} = R, \tag{۲.۱۳}$$

که در آن

$$R = \begin{bmatrix} R(t_0) \\ R(t_1) \\ \vdots \\ R(t_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)d \times 1}, \quad P_m = \begin{bmatrix} P_m(t_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_m(t_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & P_m(t_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)d \times (N+1)d}, m = 0, 1,$$

$$Y^{(m)} = \begin{bmatrix} y^{(m)}(t_0) \\ y^{(m)}(t_1) \\ \vdots \\ y^{(m)}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^*(t_0)M_m^*A \\ T^*(t_1)M_m^*A \\ \vdots \\ T^*(t_N)M_m^*A \end{bmatrix} = TM_m^*A, \quad m = 0, 1, \quad (2.14)$$

که در آن

$$T = [T^*(t_0) \quad T^*(t_1) \quad \dots \quad T^*(t_N)] \in \mathbb{R}^{(N+1)d \times (N+1)d}.$$

جایگذاری معادله (۲.۱۴) در معادله (۲.۱۳) نتیجه می‌دهد

$$P_0TM_0^*A + P_1TM_1^*A = R. \quad (2.15)$$

با تعریف  $W = [w_{ij}]_{(N+1)d \times (N+1)d} := P_0TM_0^* + P_1TM_1^*$  بایستی دستگاه معادلات جبری خطی زیر را حل کنیم

$$WA = R. \quad (2.16)$$

با حل این دستگاه، جواب عمومی به دست می‌آید. برای به دست آوردن جواب خصوصی که شرط اولیه

$$y(\mathbf{bk}) = \lambda, \quad (2.17)$$

با بردار اولیه معلوم  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)^T$  در ابتدای بازه  $I_k$  را برآورده کند، عملیات زیر را انجام می‌دهیم.

بنا به (۲.۱۱) و (۲.۱۷) داریم

$$T^*(t)M_0^*A = \lambda. \quad (2.18)$$

با تعریف  $V := T^*(t)M_0^*$ ، شکل ماتریسی اساسی شرایط اولیه عبارت است از

$$V A = \lambda. \quad (2.19)$$

با جایگذاری سطرهای ماتریس‌های  $V$  و  $\lambda$  به ترتیب با آخرین سطرهای  $W$  و  $R$  داریم

$$\widetilde{W} A = \widetilde{R}, \quad (2.20)$$

که در آن



$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1,(N+1)d} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2,(N+1)d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_{Nd,1} & W_{Nd,2} & \cdots & W_{Nd,(N+1)d} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1,(N+1)d} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \cdots & \nu_{2,(N+1)d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \nu_{d,1} & \nu_{d,2} & \cdots & \nu_{d,(N+1)d} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} r(t_0) \\ r(t_1) \\ \vdots \\ r(t_{N-1}) \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix}.$$

جواب دستگاه (۲.۲۰)، جواب خصوصی معادله (۲.۷) با شرط اولیه (۲.۱۷) است.

### ۳- مدل‌های مورد بررسی

#### ۳-۱- مدل با ضرایب ثابت

در این بخش مدل‌هایی را بررسی می‌کنیم که قطعی هستند. این مدل‌ها از نوع حساس-در معرض-عفونی شده-بهبود یافته (*SEIR*) هستند که همانند یک قطار کوپه به کوپه می‌باشند. این مدل‌ها بر مبنای پیشرفت بیماری، وضعیت اپیدمیولوژیک<sup>۲</sup> (همه گیرانه) افراد و اندازه‌های نفوذ پایه ریزی شده‌اند. این مدل‌ها با استفاده از داده‌هایی که برای حالت‌های *2019-nCov* در چین تایید شده‌اند و برآورد عدد تولید مثل انتقال بیماری، پارامتری شده است [۴].

مدل با ضرایب ثابت، به شکل معادله (۲.۱) با  $d = 8$  است که در آن

$$U(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ E(t) \\ I(t) \\ A(t) \\ S_q(t) \\ E_q(t) \\ H(t) \\ R(t) \end{bmatrix}, \quad f(t, U(t)) = f(U(t)) = \begin{bmatrix} -(\beta c + c q(1 - \beta))S(I + \theta A) + \lambda S_q \\ \beta c(1 - q)S(I + \theta A) - \sigma E \\ \sigma \rho E - (\delta_I + \alpha + \gamma_I)I \\ \sigma(1 - \rho)E - \gamma_A A \\ c q(1 - \beta)S(I + \theta A) - \lambda S_q \\ \beta c q S(I + \theta A) - \delta_q E_q \\ \delta_I I + \delta_q E_q - (\alpha + \gamma_H)H \\ \delta_I I + \gamma_A A + \gamma_H H \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

در این جا جمعیت‌های طبقه‌بندی شده حساس (*S*)، در معرض عفونت (*E*)، عفونی شده با علامت (*I*)، عفونی شده بدون علامت (*A*)، جمعیت‌های در قرنطینه حساس (*S<sub>q</sub>*)، ایزوله شده در معرض عفونت (*E<sub>q</sub>*)، بیمارستانی (*H*) و بهبود یافته (*R*) بخش‌های مختلف این قطار جمعیتی است. پارامترهای موجود در (3.1) و شرط اولیه  $U(0) = U_0$  در جدول ۱ آمده است.

<sup>۲</sup> Epidemiological status

جدول شماره ۱. تخمین پارامترها و مقادیر اولیه برای مدل کرونا ویروس جدید در ووهان چین

پارامتر	تعاریف	برآورد مقدار میانگین	انحراف معیار
$c$	نرخ تماس	14.781	0.904
$\beta$	احتمال انتقال به ازای هر تماس	$2.1011 \times 10^{-8}$	$1.1886 \times 10^{-9}$
$q$	نرخ قرنطینه شدن افراد در معرض عفونت	$1.8887 \times 10^{-7}$	$6.3654 \times 10^{-8}$
$\sigma$	نرخ انتقال افراد در معرض عفونت به رده‌ی عفونی شده	$\frac{1}{7}$	-
$\lambda$	نرخ‌ی که تماس‌های عفونی نشده‌ی در قرنطینه به جامعه‌ی وسیعتر منتشر شده‌اند	$\frac{1}{14}$	-
$\rho$	احتمال داشتن علائم در میان افراد عفونی شده	0.86834	0.049227
$\delta_I$	نرخ انتقال افراد عفونی شده‌ی دارای علامت به رده‌ی عفونی در قرنطینه	13.266	0.021315
$\delta_q$	نرخ انتقال افراد در معرض قرنطینه شده به کلاس عفونی قرنطینه شده	0.1259	0.052032
$\gamma_I$	نرخ بهبود افراد عفونی شده‌ی علامت‌دار	0.33029	0.052135
$\gamma_A$	نرخ بهبود افراد عفونی شده‌ی بدون علامت	0.13978	0.034821
$\gamma_H$	نرخ بهبود افراد عفونی شده‌ی در قرنطینه	0.11624	0.038725
$\alpha$	نرخ مرگی که به علت بیماری رخ می‌دهد	$1.7826 \times 10^{-5}$	$6.8331 \times 10^{-6}$
مقادیر اولیه	تعاریف	برآورد مقدار میانگین	انحراف معیار
$S(0)$	جمعیت اولیه افراد حساس (به بیماری)	11081000	-
$E(0)$	جمعیت اولیه افراد در معرض (بیماری)	1051	35.465
$I(0)$	جمعیت اولیه عفونی شده‌های علامت‌دار	27.679	11.551
$A(0)$	جمعیت اولیه عفونی شده‌های بدون علامت	53.839	25.25
$S_q(0)$	جمعیت اولیه حساس‌های در قرنطینه	739	-
$E_q(0)$	جمعیت اولیه در معرض‌های قرنطینه شده	1.1642	0.20778
$H(0)$	جمعیت اولیه عفونی شده‌های در قرنطینه	1	-
$R(0)$	جمعیت اولیه بهبود یافته‌ها	2	-

### ۲-۳- مدل با ضرایب متغیر

این مدل با دو تعمیم در مدل ۱-۳ به دست می‌آید [۵].

۱. به جای مقدار  $c$  تابع  $c(t) = (c_0 + c_b)e^{-r_1 t} + c_b$  قرار می‌گیرد که در آن  $c_0, c_b, r_1$  و مقادیر برآورد شده‌ی آن‌ها در جدول ۲ آمده است.

۲. به جای  $\delta_I$  تابع  $\delta_I(t)$  از رابطه  $\frac{1}{\delta_I(t)} = \left( \frac{1}{\delta_{I_0}} - \frac{1}{\delta_{I_f}} \right) e^{-r_2 t} + \frac{1}{\delta_{I_f}}$  قرار می‌گیرد.

جدول شماره ۲. تخمین پارامترهای مدل ۲-۳ برای مدل کرونا و بروس جدید در ووهان چین

پارامتر	تعاریف	برآورد مقدار میانگین	انحراف معیار
$c_0$	نرخ تماس در لحظه‌ی اولیه	14.781	0.904
$c_b$	حد اقل نرخ تماس تحت استراحت‌های کنترل جاری	2.9253	0.5235
$r_1$	نرخ نزولی نمایی برای نرخ تماس	1.3768	0.283
$\delta_{I_0}$	نرخ انتقال اولیه افراد عفونی شده‌ی علامت‌دار به کلاس عفونی شده‌ی در قرنطینه	0.13266	0.021315
$\frac{1}{\delta_{I_f}}$	کوتاهترین مدت تشخیص بیماری	0.3654	0.1431
$r_2$	نرخ نزولی نمایی برای نرخ تشخیص	0.3283	0.0225

#### ۴- آنالیز همگرایی

با توجه به اینکه همگرایی روش جواب‌های چند جمله‌ای‌های تیلور در [۳,۶] و رفرنس‌های این دو منبع آمده است،

لذا به آنالیز همگرایی روند نیوتن برای این مساله می‌پردازیم. برای این منظور نشان می‌دهیم عملگر  $F : X \rightarrow Y$  موجود در رابطه‌ی (۲.۵) با فضاها  $X := (C^1(I_k))^d$  و  $Y := (C(I_k))^d$  در شرایط قضیه‌ی زیر صادق است. این قضیه شرایط کافی برای همگرایی را فراهم آورده است.

**قضیه ۲ (کانترویچ):** فرض کنید  $X, Y$  دو فضای باناخ بوده و

$$1. \quad F : D(F) \subseteq X \rightarrow Y \quad \text{یک عملگر مشتق‌پذیر فرشه روی مجموعه‌ی باز محدب } D(F) \text{ بوده و عملگر}$$

مشتق، پیوسته‌ی لیپ‌شیتس باشد. یعنی عدد  $l > 0$  باشد به طوری که

$$\|F'(U) - F'(V)\| \leq l \|U - V\|, \quad \forall U, V \in D(F). \quad (۴.۱)$$

۲. به ازای  $U^{(0)} \in D(F)$  عملگر  $[F'(U^{(0)})]^{-1}$  موجود و یک عملگر پیوسته‌ی خطی از  $Y$  به  $X$  چنان

باشد که به ازای  $\alpha \geq \|[F'(U^{(0)})]^{-1}\|$  و  $\beta \geq \|[F'(U^{(0)})]^{-1} F(U^{(0)})\|$  داشته باشیم

$$h := \alpha\beta l \leq \frac{1}{2} \quad \text{قرار می‌دهیم. } t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{\alpha l}, t^{**} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{\alpha l}$$

۳.  $U^{(1)}$  را چنان اختیار می‌کنیم که  $\bar{B}(U^{(1)}, r) \subseteq D(F)$  که در آن  $r = t^* - \beta$ . در این صورت معادله

$F(U) = 0$  دارای جوابی به صورت  $U^* \in \bar{B}(U^{(1)}, r)$  بوده و این جواب در  $\bar{B}(U^{(0)}, t^{**}) \cap D(F)$

یکتاست. دنباله  $\{U^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  تولید شده توسط روند نیوتن به  $U^*$  همگراست و برآورد خطای آن عبارت است

از

$$\|U^{(n)} - U^*\| \leq \frac{(1 - \sqrt{1 - 2h})^{2^n}}{2^n \alpha l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

برهان: قضیه ۵.۴.۲ از [۲] را ملاحظه کنید.

سمت چپ معادله (۲.۶) عملگر  $F'(U^{(n)})U^{(n+1)}$  را تعریف می‌کند و لذا به ازای  $U, W \in X$  داریم

$$F'(U)W = W' - A(U)W, \quad (4.3)$$

که در آن

$$A(U(t)) := f'(t, U(t)) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(t, U(t)) \right]_{d \times d}. \quad (4.4)$$

ماتریس مشتق فرشه یا همان ماتریس ژاکوبی است. در مساله ما  $D(F) = X = (C^1(I_k))^d$  یک فضای باناخ بوده و شرط ۳ به طور خودکار برقرار است. در زیر بخش‌های باقی‌مانده نشان می‌دهیم شرط‌های ۱ و ۲ قضیه ۲ برای مساله ما درست است.

۴-۱- عملگر  $F'$  پیوسته‌ی لیپ‌شیتس است

نشان می‌دهیم  $b > 0$  و  $l > 0$  هست به طوری که روی  $I_k = [bk, b(k+1)]$  و به ازای هر  $V, U \in X$

$$\|F'(V) - F'(U)\| \leq l \|V - U\| \quad \text{یا}$$

$$\|A(V) - A(U)\| \leq l \|V - U\|. \quad (4.5)$$

برای این منظور ابتدا به چند تعریف می‌پردازیم

**تعریف ۱:** فرض کنید  $X, Y$  دو فضای برداری نرم‌دار باشند. در این صورت مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار از

$X$  به  $Y$  را با  $\mathbb{L}(X, Y)$  نشان می‌دهیم.  $\mathbb{L}(X, Y)$  خود یک فضای برداری است.

**تعریف ۲:** فرض کنید  $X, Y$  دو فضای برداری نرم‌دار باشند. در این صورت مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار از

$X$  به  $\mathbb{L}(X, Y)$  را با  $\mathbb{L}(X, \mathbb{L}(X, Y)) := \mathbb{L}(X^2, Y)$  نشان می‌دهیم.  $\mathbb{L}(X^2, Y)$  خود یک فضای برداری است.

هر عضو  $\mathbb{L}(X^2, Y)$  یک عملگر دو خطی نامیده می‌شود.

به ازای  $\mathbb{L}(X, Y)$ ،  $X = Y = \mathbb{R}^d$ ، مجموعه تمام ماتریسهای  $d \times d$  می‌باشد. عملگرهای دوخطی عملگرهایی هستند که بردارها را به ماتریس‌ها می‌نگارند. این‌ها می‌توانند با آرایه‌های  $d \times d \times d$  نمایش داده شوند. بنابراین اگر  $B$  عملگر دوخطی با عناصر  $b_{ijk}$ ،  $i, j, k = 1, \dots, d$  باشد آن‌گاه

$$(BU)_{ij} = \sum_{k=1}^d b_{ijk} u_k, \quad U = (u_1, \dots, u_d)^T, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (4.6)$$

در لم زیر به یکی از این عملگرهای دوخطی می‌پردازیم

لم ۱: به ازای عملگر  $f$  موجود در (۲.۱) مشتق فرشی دوم این عملگر، عملگر دوخطی  $A'$  است. به ازای  $W \in \mathbb{R}^d$ ، عملگر  $B = A'W$  یک عملگر دوخطی به صورت زیر است.

$$(BZ)_{ij} = (A'W Z)_{ij} = \sum_{k=1}^d b_{ijk} z_k, \quad Z = (z_1, \dots, z_d)^T, \quad b_{ijk} = \left. \frac{\partial^2 f_i(U)}{\partial u_j \partial u_k} \right|_{U=W}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

که در آن  $A$  با (۴.۴) داده می‌شود. آرایه  $A'W$ ،  $W = (w_1, \dots, w_d)^T$  یک آرایه  $d \times d \times d$  با عناصر

$$b_{ijk} = \left. \frac{\partial^2 f_i(U)}{\partial u_j \partial u_k} \right|_{U=W}, \quad i, j, k = 1, \dots, d.$$

برهان: مثال ۵.۱۱ از [۷] را ملاحظه کنید.

این آرایه توسط دستور  $D$  در نرم افزار *Mathematica* قابل حصول است و در بخش نتایج عددی برای محاسبه ضریب لیپ‌شیتس هم از این دستور و هم از دستورات دیگر، استفاده کرده‌ایم.

قضیه ۳ (تیلور تعمیم یافته): فرض کنید  $A: X \rightarrow Y$  عملگری بین دو فضای برداری باناخ باشد به طوری که  $A$ ،  $n$  بار به طور پیوسته مشتق پذیر فرشه در یک همسایگی از  $V$  مانند  $V = \{U: \|U - V\| \leq r\}$  با  $r > 0$ ، باشد. در این صورت به ازای هر  $U$  از درون این همسایگی داریم

$$\left\| A(V) - A(U) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} A^{(i)}(V)(V - U)^i \right\| \leq \sup_{W \in I(V, U)} \|A^{(n)}(W)\| \frac{\|V - U\|^n}{n!},$$

که در آن  $I(V, U)$  پاره خط واصل بین  $V$  و  $U$  بوده و به ازای  $n = 1$  سیگمای موجود در سمت چپ، عملگر  $0$  است.

برهان: قضیه ۵.۸ از [۷] را ملاحظه کنید.

به ازای  $A$  تعریف شده با (۲.۴) و به ازای  $n = 1$ ، بنا به قضیه فوق

$$\|A(V) - A(U)\| \leq \sup_{W \in l(V, U)} \|A'(W)\| \|V - U\|.$$

ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر  $W \in l(V, W)$  و به ازای نرم بی‌نهایت

$$\begin{aligned} \|A'(W)\|_{\infty} &= \sup_{\|Z\|_{\infty}=1} \|A'WZ\|_{\infty} = \sup_{\|Z\|_{\infty}=1} \text{Max}_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d |(A'WZ)_{ij}| \\ &= \sup_{\|Z\|_{\infty}=1} \text{Max}_{1 \leq i \leq d} \left| \sum_{j=1}^d b_{ijk} z_k \right| \leq \text{Max}_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |b_{ijk}| =: l \end{aligned} \quad (۴.۷)$$

در رابطه فوق منظور از  $l = \text{Max}_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |b_{ijk}|$  یعنی کمیت  $l$  را مطابق کمیت معلوم سمت چپ  $\text{Max}_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |b_{ijk}|$

تعریف می‌کنیم. پس به ازای  $l$  موجود در (۴.۷) عملگر  $F'$  پیوسته لیپ‌شیتس است. در مثال‌های کرونایی بخش نتایج عددی ملاحظه خواهیم کرد که مقدار  $l$  خیلی کوچک و ایده‌آل است.

۲-۴-۲  $b > 0$  وجود دارد به طوری که در بازه‌ی جزء  $I = [p, p + b]$ ، شرط ۲ از قضیه ۲ برقرار است

فرض می‌کنیم به ازای مقدار  $p \geq 0$ ، جواب در  $[0, p]$  به دست آمده است و نشان می‌دهیم وجود دارد  $b > 0$  به طوری که در بازه‌ی جزء  $I = [p, p + b]$ ، شرط ۲ از قضیه ۲ برقرار است. برای این منظور ابتدا قضیه‌ای را می‌آوریم.

قضیه ۴: فرض کنید  $X, Y$  دو فضای برداری نرم‌دار باشند که حداقل یکی از آن‌ها کامل است. فرض می‌کنیم  $L \in \mathbb{L}(X, Y)$  دارای عملگر معکوس کران‌دار  $L^{-1}: Y \rightarrow X$  است. به علاوه فرض می‌کنیم  $M \in \mathbb{L}(X, Y)$

$$\text{شرط } \|M-L\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|} \text{ صدق کند. در این صورت } M: X \rightarrow Y \text{ یک دوسویی است و } \|M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}\| \|M-L\|}$$

برهان: قضیه ۲.۳.۵ از [۲] را ملاحظه کنید.

فرض می‌کنیم  $U^{(0)} = U(p)$  (این مقدار در گام قبلی برآورد شده است و لذا معلوم می‌باشد).  $F(U^{(0)})(p) = 0$  پس بنا به پیوستگی  $F$  به ازای  $\varepsilon > 0$  مفروض، عدد  $b > 0$  هست به طوری که  $\|F(U^{(0)})\|_{[p, p+b]} < \varepsilon$  در

قضیه ۴ به ازای  $X = (C^1(I))^d$ ،  $Y = (C(I))^d$  و  $L(V) = V'$  داریم  $L(V) = V'$  و  $Y = (C(I))^d$ ،  $X = (C^1(I))^d$  با توجه به اینکه در فضای  $\mathbb{R}^d$  تمام نرم‌ها معادلند برای سادگی بحث از این‌جا به بعد، نرم‌ها را همان نرم بی‌نهایت می‌گیریم. بنابراین با توجه به فضای شدنی بیماری کرونا و ویروس جدید یعنی  $U \geq 0$  و بنا به تعریف نرم در فضاهای برداری خطی

$$\begin{aligned} \|L^{-1}\|_{\infty} &= \sup_{\|V\|_{\infty}=1} \|L^{-1}(V)\|_{\infty} = \sup_{\|V\|_{\infty}=1} \text{Max}_{1 \leq i \leq d} \text{Max}_{t \in I} \left( \int_p^t V(\tau) d\tau + V(p) \right)_i \\ &\leq \text{Max}_{t \in I} \int_p^t d\tau + 1 = b + 1. \end{aligned} \quad (۴.۸)$$

حال با انتخاب  $V^* = (1, \dots, 1)^T$  ملاحظه می‌کنیم  $\|L^{-1}(V^*)\|_\infty = b+1$ . پس بنا به رابطه اخیر و (۴.۸)،  $\|L^{-1}\|_\infty = 1+b$ . با تعریف  $M(V) = F'(U^{(0)})V$  بنا به معادله (2.1)،  $\|L\|_\infty = \|f\|_\infty$ . بنا به (۴.۳)،  $(M-L)V = F'(U^{(0)})V - V' = -A(U^{(0)})V$  پس  $\|M-L\|_\infty = \|A(U^{(0)})\|_\infty$ . که مقداری معلوم است (بر حسب  $f$ ). اگر

$$\|A(U^{(0)})\|_\infty < \frac{1}{\|L^{-1}\|_\infty} = \frac{1}{b+1}, \quad (4.9)$$

در این صورت بنا به قضیه ۴،  $M$  یک عملگر دوسویی است و  $M^{-1} \in \mathbb{L}(Y, X)$ . این شرط برای مسأله کرونا و ویروس جدید برقرار است. به علاوه

$$\|M^{-1}\|_\infty = \left\| [F'(U^{(0)})]^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{b+1}{1-(b+1)\|A\|_\infty} =: \alpha.$$

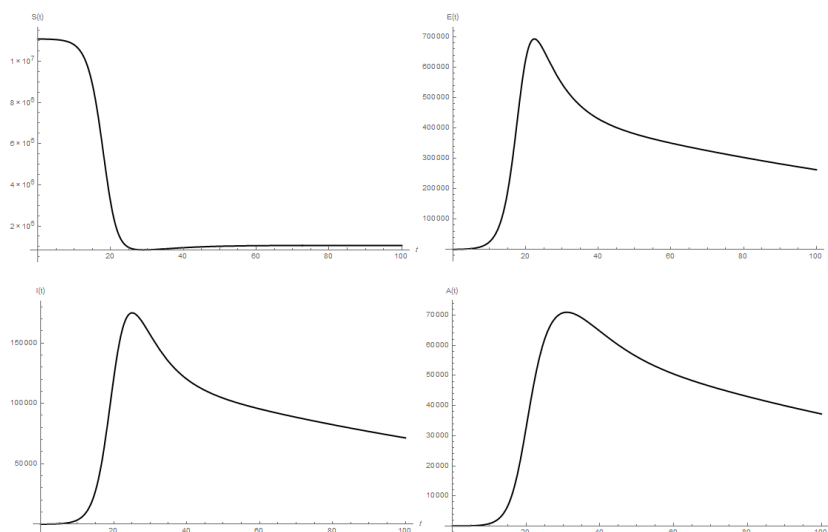
از طرفی

$$\left\| [F'(U^{(0)})]^{-1} F(U^{(0)}) \right\|_\infty = \|M^{-1} F(U^{(0)})\|_\infty \leq \|M^{-1}\|_\infty \|F(U^{(0)})\|_\infty \leq \varepsilon \|M^{-1}\|_\infty \leq \varepsilon \alpha =: \beta.$$

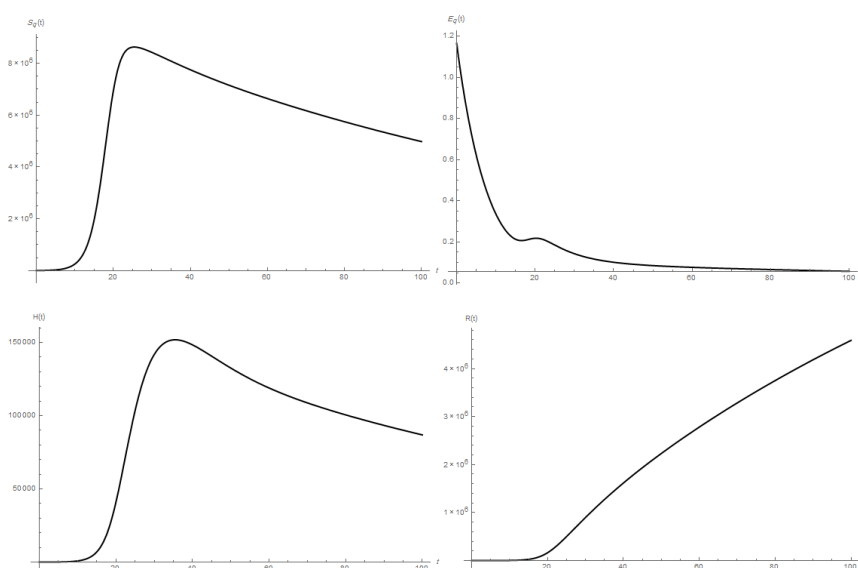
بنابراین  $\varepsilon > 0$  و متناظراً  $b > 0$  را می‌توان چنان انتخاب کرد که  $h := \alpha \beta l = \alpha^2 l \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ ، که در آن بنا به رابطه (۴.۷) عملگر  $A$  و به تبع آن عملگر  $F'$  پیوسته لیپشیتس با ضریب لیپشیتس  $l$  است. و این یعنی شرط ۲ از قضیه ۲، برای مسأله کرونا و ویروس جدید برقرار است. برای مسأله کرونا و ویروس جدید،  $l$  خیلی ناچیز است و لذا مقدار  $\varepsilon > 0$  و  $b > 0$  متناظر، چندان کوچک هم نیست و در عمل مقادیر آنها به قدری هست که خطای گرد کردن ایجاد نکند.

## ۵- نتایج عددی

**مثال ۱:** با داده‌های جدول ۱ برای مدل با ضرایب ثابت، نمودارهای مربوط به توابع  $S(t), E(t), I(t), A(t), S_q(t), E_q(t), H(t), R(t)$  در شکل‌های ۱ و ۲ نمایش داده شده است. در این مثال  $l$  موجود در رابطه‌ی (۴.۷) عبارت است از  $l = 1.2409 \times 10^{-5}$  که برای اهداف محاسباتی، عالی است. در این مثال  $b = 0.2$  و لذا برای به دست آوردن جواب در ۱۰۰ روز، قرار داده‌ایم  $N_i = 500$ . در مرجع [۴] نمودار  $I(t)$  مورد بررسی و تحلیل حساسیت با مقادیر مختلف پارامترهای  $c, q$  قرار گرفته است که با نمودار  $I(t)$  ما سازگاری دارد. در تحقیقات بعدی می‌توان تمام نمودارها را با تغییر پارامترهای مختلف مورد بررسی قرار داد. آنچه مهم است این است که با هر داده‌ای نمودارهای متناظر قابل حصول است و ما با داده‌های جدول ۱ این کار را انجام داده‌ایم.



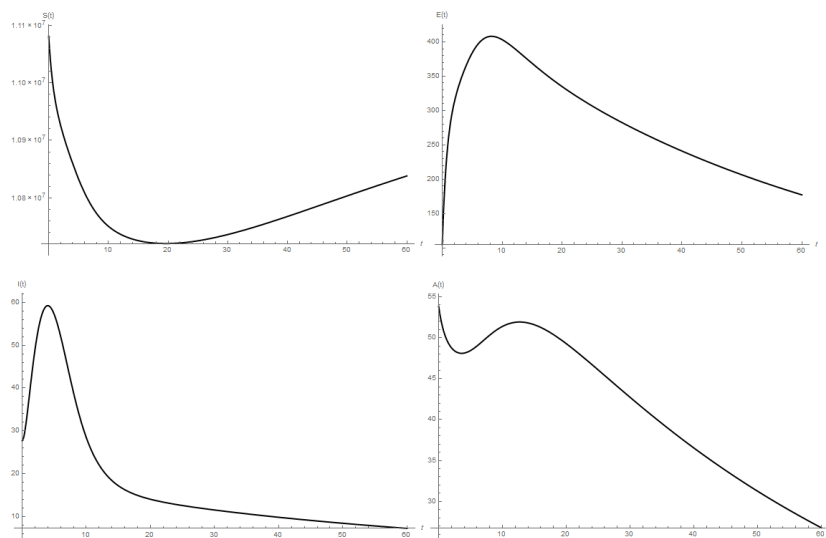
شکل ۱. توابع  $S(t), E(t), I(t), A(t)$  با داده‌های جدول ۱ برای مدل با ضرایب ثابت برای ۱۰۰ روز



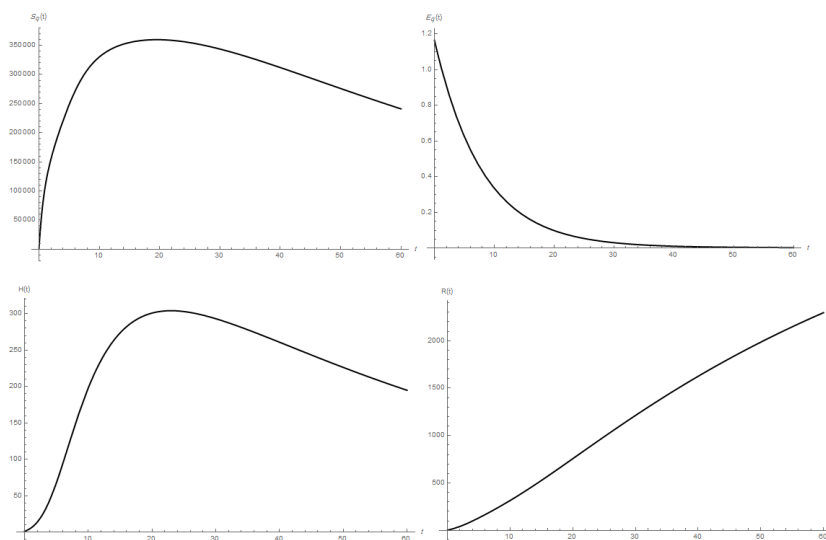
شکل ۲. توابع  $S_q(t), E_q(t), H(t), R(t)$  با داده‌های جدول ۱ برای مدل با ضرایب ثابت برای ۱۰۰ روز

مثال ۲: با داده‌های جداول ۱ و ۲ برای مدل با ضرایب متغیر، نمودارهای مربوط به توابع  $S(t), E(t), I(t), A(t), S_q(t), E_q(t), H(t), R(t)$  در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده است. در این مثال  $l$  موجود در رابطه (۴.۷) عبارت است از  $l = 0.0007615$  که برای اهداف محاسباتی، عالی است. در این مثال  $b = 0.5$  و لذا برای به دست آوردن جواب در ۶۰ روز بایستی قرار بدهیم  $N_i = 120$ .





شکل ۳. توابع  $S(t), E(t), I(t), A(t)$  با داده‌های جداول ۱ و ۲ برای مدل با ضرایب متغیر برای ۶۰ روز



شکل ۴. توابع  $S_q(t), E_q(t), H(t), R(t)$  با داده‌های جداول ۱ و ۲ برای مدل با ضرایب متغیر برای ۶۰ روز

## References

1. Babayar-Razlighi B., “Newton-Taylor polynomial solutions of systems of nonlinear differential equations with variable coefficients”, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, vol. 12, no 2 (2021) 237-248.
2. Atkinson K., Han W., “Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework”, Third Edition, Springer, Science+Business Media, LLC 2009.
3. Sezer M., Karamete A., Gulsu M., “Taylor polynomial solutions of systems of linear differential equations with variable coefficients”, *Int. J. Comput. Math.*, vol. 82, no 6 (2005) 755-764.
4. Biao Tang, Xia Wang, Qian Li, Nicola Luigi Bragazzi, Sanyi Tang, Yanni Xiao, Jianhong Wu, “Estimation of the Transmission Risk of the 2019-nCov and its Implication for Public Health Interventions”, *J. Clin. Med.*, vol. 9, no 2; doi:10.3390/jcm9020462 (2020) 1-13.
5. Biao Tang, Nicola Luigi Bragazzi, Qian Li, Sanyi Tang, Yanni Xiao, Jianhong Wu, “An updated Estimation of the risk of Transmission of the novel coronavirus (2019-nCov)”, *Infectious Disease Modelling*, vol. 5 (2020) 248-255.
6. Sezer M., Gökmen E., “Taylor collocation method for system of high order linear differential-difference equations with variable coefficients”, *Engineering Physics and Mathematics*, vol. 4, (2013) 117-125.
7. Linz P., “Theoretical Numerical Analysis”, John Wiley and sons Inc., 1979.