Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Some results about unbounded convergences in Banach lattices

Omid Zabeti[1]

1. Department of mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.

E-mail: o.zabeti@gmail.com

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
9 May 2020
Revised form:
16 August 2020
Accepted:
3 August 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:

Unbounded absolute weak convergence;
unbounded norm convergence;
sublattice;
AM-space.

ABSTRACT

Introduction

Suppose E is a Banach lattice. A net (x_α) in E is said to be unbounded absolute weak convergent (uaw-convergent, for short) to $x \in E$ provided that the net $(|x_\alpha - x| \wedge u)$ convergences to zero, weakly, whenever $u \in E_+$. In this note, we further investigate unbounded absolute weak convergence in E. We show that this convergence is stable under passing to and from ideals and sublattices. Compatible with un-convergenc, we show that uaw-convergence is topological, which means that E with uaw-topology forms a topological vector space. We consider some closedness properties for this type of convergence. Some examples are given to make the context more understandable. Finally, we introduce the notion of strongly continuous operators between Banach lattices and investigate some properties about them. Specially, we characterize Banach lattices with a strong unit in tems of this type of operators.

Material and methods

In this paper, we combine the order structure and the norm structure in a Banach lattice to consider the unbounded convergences in the category of all Banach lattices.

Results and discussion

We shall show the following main results.

1. The uaw-convergence in a Banach lattice is topological.

2. In an order continuous Banach lattice, uaw-convergence is stable under passing to and from sublattices and ideals.

3. Introduce strongly continuous operators between Banach lattices and investigate some properties of them.

Conclusion

The following main conclusions were drawn from this research.

Theorem 2. Theorem 4. Proposition 10. Theorem 11.

Keywords: Unbounded absolute weak convergence, unbounded norm convergence, sublattice, AM-space.

How to cite: Zabeti, O., (2022) Some results about unbounded convergences in Banach lattices. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-9

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نتایجی در مورد همگرایی‌های بیکران در مشبکه‌های باناخ

امید ضابطی[۱]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران. پست الکترونیکی: o.zabeti@gmail.com

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۲۰
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۲۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:

همگرایی ضعیف مطلق غیرکراندار،
تابع تجزیه منظم،
ایده‌آل،
زیرمشبکه،
بسته بودن،
عملگر پیوسته قوی.

فرض کنید E یک مشبکه باناخ باشد. تور (x_α) در E، همگرای ضعیف مطلق غیرکراندار (uaw-همگرا) به $x\epsilon X$ گفته می شود در صورتی که برای هر عنصر مثبت u در E، تور $(|x_\alpha - x|\wedge u)$ همگرای ضعیف به صفر باشد. در این مقاله، همگرایی ضعیف مطلق غیرکراندار را در E مورد بررسی بیشتر قرار می‌دهیم. خواهیم دید که این همگرای تحت ایده‌آل‌ها و زیرمشبکه‌ها، پایا می‌باشد. متناسب با un-همگرایی، نشان می‌دهیم uaw-همگرایی، توپولوژی ایجاد می‌کند، بدین معنی که E همراه با uaw-توپولوژی، تشکیل یک فضای برداری توپولوژیک می‌دهد. همچنین، چند نکته در مورد uaw-بسته بودن مجموعه‌ها را بیان می‌نماییم. با چند مثال، مفاهیم را ملموس‌تر مورد توجه قرار می‌دهیم. در نهایت، عملگرهای پیوسته قوی را بین مشبکه‌های باناخ معرفی کرده و برخی از خواص آن را بررسی می‌نماییم. به ویژه، مشبکه‌های باناخ با یکه قوی را بر حسب این دسته از عملگرها رده‌بندی می‌نماییم.

استناد: ضابطی، امید؛ (۱۴۰۱). نتایجی در مورد همگرایی‌های بیکران در مشبکه‌های باناخ. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۹-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرض کنید E یک مشبکه باناخ باشد. در این صورت، مفاهیم زیر را داریم:

۱. تور (x_α) در E، همگرای ترتیبی غیرکراندار (uo- همگرا) به $x\epsilon X$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر عنصر مثبت u در E، تور $(|x_\alpha - x|\wedge u)$ همگرای ترتیبی به صفر باشد.

۲. تور (x_α) در E، همگرای نرمی غیرکراندار (un-همگرا) به $x\epsilon X$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر عنصر $u \in E_+$، $\||x_\alpha - x|\wedge u\| \to 0$.

۳. تور (x_α) در E، همگرای ضعیف مطلق غیرکراندار (uaw-همگرا) به $x\epsilon X$ گفته می‌شود در صورتی که برای هر عنصر مثبت u در E، تور $(|x_\alpha - x|\wedge u)$ همگرای ضعیف به صفر باشد.

به سادگی تحقیق می‌شود که هر تور همگرای ترتیبی، همگرای ترتیبی غیرکراندار، هر تور نرم همگرا، همگرای نرمی غیرکراندار، و هر تور همگرای ضعیف مطلق، همگرای ضعیف مطلق غیرکراندار است. همچنین، اگر تور مورد نظر کراندار ترتیبی باشد، آن‌گاه همگرایی‌های متناظر یکسان می‌باشند.

این همگرایی‌های غیرکراندار با هم معادل می‌باشند اگر و تنها اگر E پیوسته ترتیبی و اتمیک باشد. un-همگرایی و uaw-همگرایی توپولوژی تشکیل می‌دهند در حالی که uo-همگرایی، لزوما توپولوژی پدید نمی‌آورد. برای مرور خواص همگرایی‌های غیرکراندار و نتایج مرتبط به منابع [۴, ۳، ۲، ۱] مراجعه نمایید.

اکنون، برخی مفاهیم و تعاریف مقدماتی مورد استفاده در بحث را یادآوری می‌نماییم. برای جزییات بیشتر به منبع [۵] مراجعه کنید.

فرض کنید E یک مشبکه باناخ باشد. دو عنصر x و y را مجزا (در نماد $x\perp y$) می‌نامند هرگاه $|x|\wedge|y| = 0$. الحاق زیر مجموعهٔ A از E به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^d = \{x \in E, x\perp a, \forall a \in A\}.$$

زیرمجموعهٔ A از E، کراندار ترتیبی نامیده می‌شود هرگاه عناصر x و y در E موجود باشند به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم: $x \le a \le y$. همچنین، A را تقریباً کراندار ترتیبی نامیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$،

$u \in E_+$ موجود باشد به طوری که $A \subseteq [-u,u] + \varepsilon B_E$ که در آن B_E، معرف گوی بسته به مرکز مبدأ و شعاع یک است.

یادآوری می‌کنیم که یک مشبکهٔ باناخ پیوستهٔ ترتیبی است اگر هر دنبالهٔ مجزا و کراندار ترتیبی در آن، همگرا به صفر باشد.

یک زیرمشبکه، یک زیرفضای برداری است که تحت اعمال مشبکه‌ای فضای اصلی، بسته باشد.

زیرمشبکه I در E را یک ایده ال نامیم هرگاه برای هر $x \in E$ و هر $y \in I$ که $|x| \leq |y|$ داشته باشیم: $x \in I$. هر ایده‌آل به طور ترتیبی بسته یک نوار نامیده می‌شود.

نوار تولید شده توسط $x \in E$ که در واقع کوچکترین نوار شامل آن می‌باشد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B_x = \{y \in E, y \wedge nx \uparrow y\}.$$

عنصر a در E یک اتم نامیده می‌شود هرگاه نوار تولید شده توسط آن، یک بعدی باشد. E را اتمیک نامیم هرگاه نوار تولید شده توسط اتم‌های آن، تمام فضا را شامل شود.

به وضوح، همگرایی ضعیف مطلق، همگرایی ضعیف مطلق غیرکراندار را نتیجه می‌دهد. زمانی که تور مورد نظر کراندار ترتیبی باشد، این دو همگرایی با هم معادل هستند. به عنوان مثال، پایه استاندارد (e_i) در فضای l_1، همگرای ضعیف مطلق غیرکراندار می‌باشد اما به خاطر خاصیت شور، همگرای ضعیف مطلق نیست.

برای جزئیات بیشتر راجع به این همگرایی و دیگر مطالب مرتبط، به منبع [۴] رجوع کنید.

۲. نتایج

نکته. فرض کنید یک مشبکهٔ برداری، پیوسته ترتیبی و اتمیک باشد. در این صورت، با توجه به گزارهٔ ۲۳. ۵. ۲ در [۶]، عمل‌های مشبکه‌ای، به طور دنباله‌ای پیوسته ضعیف می‌باشند. لذا در این حالت، همگرایی ضعیف، uaw-همگرایی را نتیجه می دهد، برای مثال در l_p که در آن $(1 \leq p < \infty)$ یا c_0. زمانی که E پیوسته ترتیبی اما غیراتمیک است، نتیجهٔ ذکر شده، لزوماً برقرار نمی‌باشد، به عنوان مثال فضای $L^p[0,1]$، برای جزئیات بیشتر به بحث بعد از گزاره در کتاب مورد اشاره، رجوع کنید.

قضیه: فرض کنید E یک مشبکه باناخ پیوسته ترتیبی و I یک ایده‌آل از آن باشد. در این صورت، برای هر تور (x_α) در I داریم: $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ در I اگر و تنها اگر $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ در E.

برهان: فرض کنید برای یک تور (x_α) در E داریم: $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$. برای هر $f_0 \in I_+^*$، با استفاده از قضیهٔ هان-باناخ، تابعک پیوسته خطی f در E_+^* موجود است که $f_{|I} = f_0$. عنصر $u \in I_+$ را ثابت در نظر بگیرید. داریم:

$$f_0(|x_\alpha| \wedge u) = f(|x_\alpha| \wedge u) \rightarrow 0.$$

برعکس، فرض کنید تور (x_α) در I همگرا به صفر باشد. توجه کنید برای هر $v \in I^d$، $|x_\alpha| \wedge v = 0$. بنابراین، برای هر $u \in I + I^d$، داریم: $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{w} 0$. با در نظر گرفتن قضیهٔ ۱.۳۶ در [۵]، $I + I^d$ در E چگال ترتیبی می‌باشد. $w \in E_+$ و $f \in E_+^*$ را ثابت در نظر بگیرید. برای هر $u \in (I + I^d)_+$ که $u \leq w$، داریم: $w \wedge u \uparrow w$. لذا، $f(w \wedge u) \uparrow f(w)$، که در آن سوپریمم بر روی تمام مقادیر u گرفته شده است.

فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. $u \in (I + I^d)_+$ موجود است به طوری که

$f(w) - f(w \wedge u) < \frac{\varepsilon}{2}$. همچنین، اندیس α_0 وجود دارد به طوری که برای هر $\alpha \geq \alpha_0$، داریم:
$f(|x_\alpha| \wedge u \wedge w) < \frac{\varepsilon}{2}$. لذا، با استفاده از نامساوی بیرخف، رابطهٔ زیر را به دست می آوریم:

$$f(|x_\alpha| \wedge w) - f(|x_\alpha| \wedge u \wedge w) \leq f(w - u \wedge w) < \varepsilon.$$

که برهان را کامل می‌کند.

نتیجهٔ زیر به طور همزمان توسط نویسنده و برخی همکاران در کانادا به طور مستقل به دست آمده است. لازم به ذکر است که در برهان‌های دو نویسنده کاملاً از روش‌های متفاوت استفاده شده است.

نتیجه: فرض کنید E یک مشبکهٔ برداری پیوسته ترتیبی و F یک زیر مشبکه از E باشد. در این صورت، برای هر تور (x_α) در F، $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ در F اگر و تنها اگر $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ در E.

برهان. فرض کنید $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ در E. $u \in F_+$ را ثابت در نظر بگیرید. برای هر $f_0 \in F_+^*$، طبق قضیهٔ هان-باناخ، $f \in E_+^*$ موجود است به طوری که $f_0 = f_{|F}$. بنابراین

$$f_0(|x_\alpha| \wedge u) = f(|x_\alpha| \wedge u) \to 0.$$

حال فرض کنید برای یک تور (x_α) در F، داشته باشیم $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$. همچنین، فرض کنید I ایده‌آل تولید شده توسط F در E باشد. عناصر $f \in E_+^*$ و $u \in I_+$ را ثابت در نظر بگیرید. عنصر $v \in F_+$ وجود دارد به طوری که $u \leq v$. بنابراین،

$$f(|x_\alpha| \wedge u) \leq f(|x_\alpha| \wedge v) \to 0.$$

این نتیجه می‌دهد که $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ در I. حال با کمک قضیهٔ قبل، حکم به دست می‌آید.

در [۱] نشان داده شده است که un-همگرایی، توپولوژیکال است: یعنی توپولوژی ایجاد می‌کند. در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم uaw-همگرایی نیز، توپولوژی ایجاد می‌کند.

نکته. فرض کنید E یک مشبکهٔ باناخ باشد. در این صورت، uaw-همگرایی بر روی E، توپولوژی تشکیل می‌دهد. در واقع E با این توپولوژی، تشکیل یک فضای برداری توپولوژیک می‌دهد.

برهان. برای هر $u \in E_+$، برای هر $\varepsilon > 0$، و برای هر $f \in E_+^*$، قرار دهید:

$$V_{u,\varepsilon,f} = \{x \in E, f(|x| \wedge u) < \varepsilon\}.$$

فرض کنید $\aleph$ گردایه تمام عناصر به این شکل باشد. با روشی مشابه با آن‌چه که در قسمت ۷ از [۱] ثابت شد، نشان می‌دهیم که $\aleph$ یک توپولوژی هاسدورف بر روی E ایجاد می‌کند که همگرایی در آن توپولوژی، دقیقاً معادل با uaw-همگرایی می باشد.

به وضوح، هر عضو $\aleph$، صفر را شامل می شود. برای هر دو عضو $V_{u_1,\varepsilon_1,f_1}$ و $V_{u_2,\varepsilon_2,f_2}$ در $\aleph$، قرار دهید: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$، $u = u_1 \vee u_2$، و $f = f_1 + f_2$. به آسانی تحقیق می‌شود که $V_{u,\varepsilon,f} \subset V_{u_1,\varepsilon_1,f_1} \cap V_{u_2,\varepsilon_2,f_2}$.

همچنین به راحتی تحقیق می‌شود که

$V_{u,\varepsilon,f} + V_{u,\varepsilon,f} \subset V_{u,2\varepsilon,f}$. همچنین برای هر $U \in \aleph$، $\gamma U \subset U$ برای هر اسکالر γ با $|\gamma| \leq 1$.

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $U \in \aleph$ و برای هر $y \in U$، $V \in \aleph$ موجود است که $y + U \subset V$.

فرض کنید $y \in V_{u,\varepsilon,f}$. قرار دهید: $\delta = \varepsilon - f(|y| \wedge u)$. نشان می‌دهیم: $y + V_{u,\delta,f} \subset V_{u,\varepsilon,f}$.

فرض کنید $x \in V_{u,\delta,f}$. نشان می دهیم: $x + y \in V_{u,\varepsilon,f}$. داریم:

$$f(|x+y| \wedge u) \leq f(|x| \wedge u) + f(|y| \wedge u)$$

$$< f(|y| \wedge u) + \delta < \varepsilon.$$

آن‌چه که باقی می‌ماند آن است که نشان دهیم این توپولوژی هاسدورف است. کافی است نشان دهیم $\cap U = \{0\}$.
فرض کنید $x \in \cap U$. در این صورت، برای هر $u \in E_+$، برای هر $\varepsilon > 0$، و برای هر $f \in E_+^*$، داریم: $f(|x| \wedge u) < \varepsilon$.
با قرار دادن $u = |x|$، نتیجه می گیریم که $f(|x|) < \varepsilon$. با استفاده از قضیه هان-باناخ، خواهیم داشت $x = 0$.
بنابراین، حکم قضیه ثابت می شود.

قضیه: فرض کنید E یک مشبکهٔ برداری باشد که دوگان آن پیوسته است. در این صورت، هر زیرمجموعهٔ محدب و بسته در E، uaw-بسته است.

برهان: فرض کنید $x_\alpha \xrightarrow{uaw} x$ برای یک تور (x_α) در E و یک $x \in X$. چون (x_α) نرم کرانداراست و E دوگان پیوسته ترتیبی دارد، با استفاده از قضیهٔ ۷ در [۴] نتیجه می‌گیریم که $x_\alpha \xrightarrow{w} x$. چون C، محدب و بسته است، لذا، به طور ضعیف هم بسته است. بنابراین $x \in C$.

گزاره. فرض کنید E یک مشبکهٔ باناخ انعکاسی و C یک زیرمجموعهٔ محدب و بسته از آن باشد. در این صورت، C نسبت به uaw-توپولوژی، کامل است.

برهان: چون E انعکاسی است، بنا بر قضیهٔ ۴ در [۴] ، un-همگرایی و uaw-همگرایی در E منطبق می‌شوند. لذا حکم از نتیجهٔ ۷. ۶ در [۳] به دست می‌آید.

برهان. فرض کنید (x_α^*) یک تور کراندار و uaw-کوشی در E^* باشد. بنا بر گزارۀ ۵ در [۴]، این تور، w^*-کوشی است. اکنون، قضیۀ باناخ- آلاگلو نتیجۀ مورد نظر را به دست می‌دهد.

نکته. به وضوح، هر تور un-کوشی، uaw-کوشی است. حال، فرض کنید یک مشبکۀ باناخ پیوسته ترتیبی باشد. بنا بر قضیۀ ۴ در [۴]، تورهای un-کوشی و uaw-کوشی یکسان هستند. مثال زیر نشان می‌دهد در غیاب فرض پیوسته ترتیبی بودن، شرایط متفاوت است.

مثال. فرض کنید $E = C([0,1])$. برای هر $n \in N$، اسکالرهای حقیقی α و β را طوری اختیار کنید که $\frac{1}{n+1} < \alpha < \beta < \frac{1}{n}$. دنبالۀ (f_n) را در E به صورت $f_n(0) = f_n(1) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$، ثابت بین آنها و خطی در بقیه جاها، تعریف کنید.

چون (f_n)ها مجزا می‌باشند، بنا بر لم ۲ در [۴]، داریم $f_n \xrightarrow{uaw} 0$. از طرف دیگر، قرار دهید: $g \equiv 1$. به آسانی تحقیق می‌شود که $\||f_n - f_m| \wedge g\| \geq 1$. این نشان می‌دهد که دنبالۀ مورد نظر un-کوشی نمی‌باشد.

اکنون، گزارۀ ۷.۳ از منبع شمارۀ [۲] را برای uaw-همگرایی بیان می‌نماییم.

گزاره. فرض کنید (x_α) یک تور تقریباً کراندار ترتیبی در مشبکۀ باناخ E باشد. در این صورت، اگر $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$ آن‌گاه $x_\alpha \xrightarrow{w} 0$.

برهان. $\varepsilon > 0$ را به دلخواه اختیار کنید. طبق فرض، $u \in E_+$ موجود است که $\left\| |x_\alpha| - |x_\alpha| \wedge u \right\| < \varepsilon$، برای هر α. بنابراین، برای هر $f \in E_+^*$ داریم: $f(|x_\alpha| - |x_\alpha| \wedge u) < \varepsilon$. چون $x_\alpha \xrightarrow{uaw} 0$، برای مقادیر به اندازۀ کافی بزرگ α، $f(|x_\alpha| \wedge u) < \varepsilon$. لذا $f(|x_\alpha|) < \varepsilon$ و بنابراین $f(x_\alpha) < \varepsilon$. این حکم را ثابت می‌کند.

فرض کنید E یک مشبکۀ باناخ و f یک تابعک خطی پیوسته بر روی E باشد. در این صورت، f را uaw-پیوسته می‌نامیم هرگاه برای هر تور کراندار و uaw-پوچ، داشته باشیم: $f(x_\alpha) \to 0$. مجموعۀ چنین تابعک‌هایی را uaw-دوگان E می‌نامیم و با E_{uaw}^* نمایش می‌دهیم. به وضوح $E_{uaw}^* \subseteq E^*$. در قضیۀ ۲.۱۳ از [۷] نشان داده شده است که برای مشبکۀ باناخ E، E^* پیوسته ترتیبی است اگر و تنها اگر $E_{uaw}^* = E^*$.

فرض کنید E یک مشبکۀ باناخ و X یک فضای باناخ باشد. عملگر T از E به X را پیوسته قوی نامیم هرگاه برای هر تور $(x_\alpha) \subseteq E$، $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ نتیجه دهد $Tx_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. به راحتی تحقیق می‌شود که هر عملگر پیوستۀ قوی، پیوسته است ولی عکس آن برقرار نمی‌باشد. به عنوان مثال عملگر همانی I بر روی فضای l_1، پیوسته است ولی پیوسته قوی نمی‌باشد زیرا پایه استاندارد (e_n) در آن un-همگرا به صفر است ولی به وضوح در نرم همگرا نمی‌باشد.

می توان فضاهای با یکه قوی را بر حسب عملگرهای پیوسته قوی با کمک قضیۀ زیر رده‌بندی کرد. یادآوری می‌کنیم که مشبکۀ باناخ E دارای یکه قوی e می‌باشد هرگاه برای هر $x \in E$، اسکالر مثبت α موجود باشد که $|x| \leq \alpha e$.

قضیه: فرض کنید E یک مشبکۀ باناخ باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر با هم معادل هستند.

۱. E دارای یکه قوی است.

۲. برای هر فضای باناخ X، هر عملگر پیوسته $T: E \to X$ پیوسته قوی است.

برهان: اگر E دارای یکه قوی باشد، آن‌گاه با توجه به قضیهٔ ۲.۳ در[۳]، un-همگرایی و نرم همگرایی در E منطبق می‌شوند و لذا مفاهیم پیوسته قوی و پیوسته بودن با هم منطبق می‌شوند. برعکس، فرض کنید شرط (۲) برقرار باشد. لذا عملگر همانی I بر روی E نیز پیوسته قوی می‌باشد. بنابراین، بنا بر قضیهٔ ۲،۳ در[۳]، E دارای یکه قوی است.

References

1. Y. Deng, M. O'Brien, and V. G. Troitsky, Unbounded norm convergence in Banach lattices, Positivity, 21(3) (2017), pp. 963-974.

2. N. Gao and F. Xanthos, Unbounded order convergence and application to martingales without probability, J. Math. Anal. Appl., 415 (2014), pp. 931-947.

3. M. Kandic, M. A. A. Marabeh, and V. G. Troitsky, Unbounded norm topology in Banach lattices, J. Math. Anal. Appl., 451 (2017), no. 1, pp. 259-279.

4. O. Zabeti, Unbounded absolute weak convergence in Banach lattices, Positivity, 22(1) (2018), pp. 501-505.

5. C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, Positive operators, Springer, 2006.

6. P. Nieberg, Banach lattices, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

7. Z. Wang, Z. Chen, and J. Chen, Continuous functionals for unbounded convergence in Banach lattices, arXiv number: 2003.06610v1 [math.FA].