خوش‌وضعی قوی برای رده‌ای از نامساوی‌های تغییراتی دوبخشی با نگاشت‌های مجموعه‌مقدار

مهناز شمس، مرتضی اویسی‌ها*
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی محض

دریافت ۹۹/۰۳/۰۳ پذیرش ۹۹/۱۰/۱۵

چکیده

در این مقاله گسترشی از خوش‌وضعی را برای سیستمی از نامساوی‌های تغییراتی چند مقداری دوبخشی که توابع درگیر نگاشت‌های مجموعه‌مقدار هستند، ارائه داده و مشخص‌سازی متریکی برای آنها به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین نشان می‌دهیم که خوش‌وضعی قوی در این حالت معادل با وجود و یکتایی جواب برای این نامساوی‌های تغییراتی چندمقداری دوبخشی است.

واژه‌های کلیدی: دنباله تقریب زننده، خوش‌وضعی، نامساوی تغییراتی، زیردیفرانسیل قائم.

مقدمه

مفهوم خوش‌وضعی برای اولین بار به‌وسیلهٔ تیخونوف[۱] [۱۱]، برای یک مسئله کمینه‌سازی معرفی شد و در ادامه در مورد نامساوی‌های تغییراتی، مسائل تعادل، مسائل نقطه ثابت و غیره بررسی شد [۳]، [۶]، [۹]، [۱۲]، [۱۳]. خوش‌وضعی تیخونوف برای یک مسئله بهینه‌سازی درگیر وجود و یکتایی جواب آن مسئله بهینه‌سازی است. هم‌چنین دنباله‌های تقریب زننده باید که به آن جواب یکتا همگرا باشند. بعد از این مفهوم از خوش‌وضعی تعمیم‌های مختلفی از خوش‌وضعی از جمله خوش‌وضعی لوتین-پولیاک[۲]، خوش‌وضعی پارامتری و α-خوش‌وضعی ارائه شدند. به‌واسطه ارتباط نزدیک مسائل بهینه‌سازی و نامساوی‌های تغییراتی، لوچتی[۳] و پاترونه[۴] (۱۹۸۱) [۷]، مفهوم خوش‌وضعی را برای نامساوی‌های تغییراتی ارائه دادند. در ادامه تحقیقات انجام شده در این زمینه، شیائو[۵] و همکارانش [۱۳] با در نظر گرفتن نامساوی‌های نیمه تغییراتی دو دسته از شرایط را ارائه دادند که تحت آنها خوش‌وضعی قوی و ضعیف از نامساوی‌های نیمه تغییراتی معادل با وجود و یکتایی جواب برای این‌گونه مسائل است.

نامساوی‌های تغییراتی دوبخشی اولین بار به‌وسیلهٔ سنسور[۶] و همکارانش [۲] معرفی شدند. این نامساوی‌های تغییراتی به‌صورت دو نامساوی تغییراتی هستند که به‌وسیله تابعی به‌هم وابسته می‌شوند. بنابراین مفاهیم مختلف خوش‌وضعی که در بالا به آن اشاره شد را می‌توان برای این‌گونه از نامساوی‌های تغییراتی دوبخشی به‌کار برد [۴]،

*نویسنده مسئول oveisiha@sci.ikiu.ac.ir

1.Tykhonov
2. Levitin-Polyak
3. Lucchetti
4. Patrone
5. Xiao
6. Censor

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.317]

[۱۰]. در سال ۲۰۱۹ هو[1] و همکارانش [۵]،این مفهوم را برای نامساوی‌های تغییراتی-نیمه تغییراتی دوبخشی در فضاهای باناخ انعکاسی به‌کار بردند و شرایط معادل برای خوش‌وضعی قوی و ضعیف از این‌گونه نامساوی‌ها ارائه دادند.

با الهام از نتایج [۵]، [۶]، [۱۰]، در این مقاله مفهوم خوش‌وضعی را به یک سیستم از نامساوی‌های تغییراتی دوبخشی گسترش می‌دهیم که توابع درگیر، توابعی مجموعه‌مقدار هستند. هم‌چنین با استفاده از مفهوم زیردیفرانسیل قائم برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار نتایجی معادل برای خوش‌وضعی قوی از نامساوی‌های تغییراتی چند مقداری دوبخشی ارائه می‌دهیم. ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش دوم به‌طور خلاصه مفاهیم مقدماتی و برخی نتایج که در ادامه به آنها نیاز داریم ارائه می‌شود. در بخش سوم مشخص سازی متریکی از خوش‌وضعی قوی برای این نامساوی‌های تغییراتی آورده می‌شود. هم‌چنین شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن خوش‌وضعی قوی از نامساوی‌های تغییراتی چند مقداری دوبخشی معادل با وجود و یکتایی جواب برای آن باشد.

مفاهیم اولیه

دراین مقاله X را فضایی باناخ درنظرمی‌گیریم و منظور از B_X و S_X به‌ترتیب گوی واحد بسته وکره واحد در X است. نگاشت مجموعهٔ مقدار $F: X \rightrightarrows Y$ بین دو فضای باناخ را درنظر بگیرید. در این‌صورت دامنه و نمودار F به‌ترتیب بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{dom}F = \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\},$$
$$\mathrm{gr}F = \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x)\}.$$

حال به بیان مفاهیمی از زیردیفرانسیل و هم‌مشتق می‌پردازیم که دربخش بعدی به آن نیاز داریم.

تعریف ۱. [۸]، فرض کنید $\Omega \subset X$ مجموعه‌ای غیرتهی باشد و$x \in \Omega$ و $\varepsilon \geq 0$. مجموعه ε- قائم به Ω درنقطه x بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\widehat{N}_\varepsilon(\bar{x}; \Omega) := \{x^* \in X | \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{< x^*, u - x >}{||u - x\ ||} \leq \varepsilon\}.$$

در حالتی که $\varepsilon = 0$ باشد مجموعه بالارا مخروط قائم منظم به Ω در x می‌گوییم و با نماد $\widehat{N}(x; \Omega)$ نمایش می‌دهیم. برای $\bar{x} \in \Omega$، مخروط قائم اساسی به Ω در $\bar{x}$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$N(\bar{x}; \Omega) := \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} \bar{x}, \varepsilon \downarrow 0} \widehat{N}_\varepsilon(x; \Omega).$$

فرض کنید فضای Y به‌کمک مخروط غیرتهی، محدب و بسته K مرتب جزئی شده باشد. رابطهٔ ترتیب جزئی در Y را با " " نمایش داده و بدین‌صورت درنظرمی‌گیریم:

$$y_1 \quad y_2 \iff y_2 - y_1 \in K.$$

حال با استفاده از ترتیب جزئی القاء شده به‌وسیلهٔ مخروط K بر Y بالا نمودار نگاشت $F: X \rightrightarrows Y$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{epi}F = \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x) + K\}.$$

درادامه مفاهیم هم‌مشتق و زیردیفرانسیل را برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار بیان می‌کنیم.

تعریف ۲. [۸]، نگاشت مجموعه‌مقدار $F: X \rightrightarrows Y$ را درنظر گرفته و فرض کنید $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gr}F$. دراین‌صورت هم‌مشتق قائم F در $(\bar{x}, \bar{y})$را نگاشت مجموعه‌مقدار $D_N^* F(\bar{x}, \bar{y}): Y^* \rightrightarrows X^*$ درنظر می‌گیریم که بدین‌صورت تعریف می‌شود:

1. Hu

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.317]

$$D_N^*F(\bar{x},\bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* | (x^*, -y^*) \in N((\bar{x},\bar{y}); \mathrm{gr}F)\}.$$

تعریف ۳. [۸]، نگاشت مجموعه‌مقدار $F: X \rightrightarrows Y$ را درنظربگیرید. در این‌صورت نگاشت زبرنموداری $\mathcal{E}_F: X \rightrightarrows Y$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{E}_F(x) := \{y \in Y | y \in F(x) + K\}.$$

حال با استفاده از نگاشت زبرنموداری تعریف شده در بالا زیردیفرانسیل قائم F در نقطه $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{epi}F$ و در جهت $y^* \in Y^*$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\partial F(\bar{x},\bar{y})(y^*) := D_N^*\mathcal{E}_F(\bar{x},\bar{y})(y^*).$$

تعریف ۴. [۸]، نگاشت $F: \Omega \subset X \rightrightarrows Y$ را در نظر گرفته و فرض کنید $\mathrm{dom}F \neq \emptyset$.

۱. F را در نقطه $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{gr}F$ لیپ‌شیتس‌گون گوییم، اگر همسایگی‌های U از $\bar{x}$ و V از $\bar{y}$ و ثابت $l \geq 0$ موجود باشد به‌قسمی‌که

$$F(x) \cap V \subset F(u) + l\,\|x-u\|\mathbf{B}_Y, \quad \forall x, u \in \Omega \cap U.$$

۲. F را در نقطه $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{gr}F$ زبرلیپ‌شیتس‌گون گوییم اگر $\mathcal{E}_F$ در این نقطه لیپ‌شیتس‌گون باشد.

تعریف ۵. نگاشت $F: X \rightrightarrows Y$ را درنظربگیرید. نگاشت مجموعه‌مقدار $\partial F: X \times Y \times Y^* \rightrightarrows X^*$ را یکنوای آسوده گوییم اگر ثابت α موجود باشد به‌قسمی‌که برای هر $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ و $x_i \in X$، عناصر $y_i \in F(x_i)$ به‌قسمی موجود باشند که برای هر $\xi_i \in \partial F(x_i,y_i)(y^*)$، $(i=1,2)$ داشته باشیم

$$< \xi_2 - \xi_1, x_2 - x_1 > \geq \alpha \| x_2 - x_1\|^2.$$

اگر $T: X \to X^*$ عملگری تک‌مقداری باشد مفهوم یکنوای آسوده برای T به‌صورت زیر تغییر می‌کند که ثابت α موجود باشد به‌قسمی که برای هر $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم

$$< T(x_2) - \mathrm{T}(x_1), x_2 - x_1 > \geq \alpha \| x_2 - x_1\|^2.$$

ملاحظه ۶: درحالتی که $\alpha = 0$، تعریف مذکور به تعریف عملگرهای یکنوا تقلیل می‌یابد.

تعریف ۷. [۱۴]، نگاشت $T: X \longrightarrow X^*$ را نیمه‌پیوسته گوییم، اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ تابع $t \longmapsto < T(x_1 + tx_2), x_2 >$ از $[0,1]$ به $]-\infty, +\infty[$ در 0 از راست پیوسته باشد.

در ادامه به بیان نامساوی تغییراتی دوبخشی می‌پردازیم. فرض کنید $T: X \to X$، $g_i \in X^*$، $A_i: X \to X^*$ و $F_i: X \rightrightarrows Y$ نگاشت‌هایی داده شده باشند. نامساوی تغییراتی دوبخشی وابسته به (A_i, g_i, F_i, T) را بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$SVI(A_i, g_i, F_i, T)$: یافتن $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \times X$ به‌قسمی که برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$، عناصر $\bar{y}_i \in F_i(\bar{x}_i)$ و $\xi_i \in \partial \mathrm{F}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$، $i = 1,2$، موجود باشند که

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = T\bar{x}_1, \\ < A_1\bar{x}_1 - g_1 + \xi_1, x_1 - \bar{x}_1 > \geq 0, \\ < A_2\bar{x}_2 - g_2 + \xi_2, x_2 - \bar{x}_2 > \geq 0. \end{cases}$$

تعریف ۸. دنبالهٔ $\{(x_1^n, x_2^n)\} \subseteq X \times X$ را یک دنباله تقریب زننده برای (SVI) گوییم، اگردنباله نامنفی $\{\varepsilon_n\}$ با $\varepsilon_n \downarrow 0$ به‌قسمی موجود باشد که برای هر $x = (x_1, x_2) \in X \times X$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ دنباله‌های $y_i^n \in F_i(x_i^n)$ و $\xi_i^n \in \partial F(x_i^n, y_i^n)(y^*)$، برای $i = 1,2$ چنان موجود باشند که

$$\begin{cases} \|x_2^n - Tx_1^n\| \leq \varepsilon_n, \\ < A_1x_1^n - g_1 + \xi_1^n, x_1 - x_1^n > \geq -\varepsilon_n\|x_1 - x_1^n\|, \\ < A_2x_2^n - g_2 + \xi_2^n, x_2 - x_2^n > \geq -\varepsilon_n\|x_2 - x_2^n\|. \end{cases}$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.317]

تعریف ۹. نامساوی تغییراتی دوبخشی $SVI(A_i, g_i, F_i, T)$ را به‌طورقوی خوش‌وضع گوییم اگر آن دارای جواب یکتا بوده است و هر دنباله تقریب زننده نیز به آن جواب یکتا همگرا باشد.

نتایج اصلی

هدف اصلی این بخش بیان شرایطی است که نامساوی تغییراتی دوبخشی SVI به‌طور قوی خوش‌وضع باشد. به‌ویژه، شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن خوش‌وضعی قوی نامساوی تغییراتی دوبخشی SVI معادل با وجود و یکتایی جواب برای آن باشد.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنید $A_i: X \to X^*$ عملگری نیمه‌پیوسته و یکنوای آسوده باضریب c_i بوده و $F_i: X \rightrightarrows Y$ نگاشتی زبرلیپ‌شیتس‌گون باشد به‌طوری‌که زیردیفرانسیل قائم آن ∂F_i یکنوای آسوده با ضریب α_i باشد که $i = 1,2$. گزاره‌های زیر را درنظربگیرید:

i. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از نامساوی تغییراتی دوبخشی $SVI(A_i, g_i, F_i, T)$ است.

ii. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از نامساوی تغییراتی دوبخشی تعریف شده درزیر است:

$ASVI(A_i, g_i, F_i, T)$: یافتن $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ به‌قسمی که برای هر $x = (x_1, x_2) \in X \times X$ و عناصر $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ و $y_i \in F_i(x_i)$ و $x_i^* \in \partial F_i(x_i, y_i)(y^*)$، $i = 1,2$، موجودند به‌قسمی که

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = T\bar{x}_1, \\ < A_1x_1 - g_1 + x_1^*, x_1 - \bar{x}_1 > \geq 0, \\ < A_2x_2 - g_2 + x_2^*, x_2 - \bar{x}_2 > \geq 0. \end{cases}$$

در این‌صورت $(ii) \Longleftarrow (i)$ و اگر $c_i + \alpha_i \geq 0$ برای $i = 1,2$، آن‌گاه $(i) \Longleftarrow (ii)$.

اثبات. $(i) \Longleftarrow (ii)$: فرض کنید $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از SVI باشد. بنابراین برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$، عناصر $\bar{y}_i \in F_i(\bar{x}_i)$ و $\xi_i \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$، $i = 1,2$، موجودند به‌قسمی که

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = T\bar{x}_1, \\ < A_1x_1 - g_1 + \xi_1, x_1 - \bar{x}_1 > \geq 0, \\ < A_2x_2 - g_2 + \xi_2, x_2 - \bar{x}_2 > \geq 0. \end{cases} \tag{۱}$$

با استفاده از یکنوایی آسوده ∂F_i، برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$، عناصر $y_i \in F_i(x_i)$ موجود است به‌قسمی که برای هر $x_i^* \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$ $(i = 1,2)$ داریم:

$$\begin{cases} < x_1^* - \xi_1, x_1 - \bar{x}_1 > \geq \alpha_1 \parallel x_1 - \bar{x}_1 \|^2, \\ < x_2^* - \xi_2, x_2 - \bar{x}_2 > \geq \alpha_2 \parallel x_2 - \bar{x}_2 \|^2. \end{cases} \tag{۲}$$

حال با استفاده از یکنوایی آسوده عملگر A_i و روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} < A_1x_1 - g_1 + x_1^*, x_1 - \bar{x}_1 > &\geq < A_1x_1 + x_1^*, x_1 - \bar{x}_1 > - < A_1\bar{x}_1 + \xi_1, x_1 - \bar{x}_1 > \\ &= < A_1x_1 - A_1\bar{x}_1, x_1 - \bar{x}_1 > + < x_1^* - \xi_1, x_1 - \bar{x}_1 > \\ &\geq (c_1 + \alpha_1) \parallel x_1 - \bar{x}_1 \|^2, \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه

$$< A_2x_2 - g_2 + x_2^*, x_2 - \bar{x}_2 > \geq (c_2 + \alpha_2) \parallel x_2 - \bar{x}_2 \|^2,$$

که نشان می‌دهد $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از $ASVI$ است.

$(ii) \Longleftarrow (i)$: برعکس اگر $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از $ASVI$ باشد، برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$، عناصر $y_i \in F_i(x_i)$ و $x_i^* \in \partial F_i(x_i, y_i)(y^*)$، $i = 1,2$، موجودند به‌قسمی که

$$< A_ix_i - g_i + x_i^*, x_i - \bar{x}_i > \geq 0, \qquad i = 1,2. \tag{۳}$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.317]

برای هر $z = (z_1, z_2) \in X \times X$ و $t \in [0,1]$ قرار دهید

$$x_1(t) = \bar{x}_1 + t(z_1 - \bar{x}_1), \qquad x_2(t) = \bar{x}_2 + t(z_2 - \bar{x}_2).$$

باقرار دادن $x_i(t)$ در رابطهٔ (۳) به‌جای x_i داریم

$$< A_i(\bar{x}_i + t(z_i - \bar{x})) - g_i + x_{t_i}^*, z_i - \bar{x}_i > \geq 0, \quad i = 1,2,$$

که $x_{t_i}^* \in \partial F_i(x_i(t), y_i(t))(y^*)$ و $y_i(t) \in F_i(x_i(t))$ برای $i = 1,2$. حال چون F_i، نگاشتی زبرلیپ‌شیتس‌گون بوده و $x_i(t) \to \bar{x}_i$ ،$i = 1,2$، هنگامی که $t \to 0$بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $x_{t_i}^* \to x_i^*$ درتوپولوژی ضعیف ستاره که $x_i^* \in \partial \mathrm{F}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$ با $\bar{y}_i \in \mathrm{F}_i(\bar{x}_i)$، $i = 1,2$. حال از نیم‌هپیوستگی عملگر A_i بر داریم که

$$< A_i\bar{x}_i - g_i + x_i^*, z_i - \bar{x}_i > \geq 0, \quad i = 1,2.$$

بنابراین دلخواه بودن $z = (z_1, z_2) \in X \times X$ نتیجه می‌دهد که $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از SVI می‌باشد.

اینک برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه $\Omega(\varepsilon)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Omega(\varepsilon) := \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X^2 | \; \| \bar{x}_2 - T\bar{x}_1 \| \leq \varepsilon, \forall x_i \in X, y^* \in K^+ \cap S_{Y^*} \; \exists \; \bar{y}_i \in \mathrm{F}_i(\bar{x}_i), \; x_i^* \in \partial \mathrm{F}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*) \; s.t. \; < A_i\bar{x}_i - g_i + x_i^*, x_i - \bar{x}_i > \geq \; -\varepsilon \|x_i - \bar{x}_i\|, i = 1,2\}$$

لم ۱۱. فرض کنید $A_i: X \to X^*$ ،$i = 1,2$، توابعی نیم‌هپیوسته باشند. اگر $T: X \to X$ عملگری پیوسته باشد، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\Omega(\varepsilon)$ مجموعه‌ای بسته قوی است.

اثبات: فرض کنید $\{x^n = (x_1^n, x_2^n)\} \subset \Omega(\varepsilon)$ دنباله‌ای همگرا به $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ باشد. بنابراین برای هر $x_i \in X$، $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر $y_i^n \in \mathrm{F}_i(x_i^n)$ و $\xi_i^n \in \partial \mathrm{F}_i(x_i^n, y_i^n)(y^*)$، $i = 1,2$، موجودند به‌قسمی که

$$\begin{cases} \|x_2^n - Tx_1^n\| \leq \varepsilon, \\ < A_1x_1^n - g_1 + \xi_1^n, x_1 - x_1^n > \geq -\varepsilon\|x_1 - x_1^n\|, \\ < A_2x_2^n - g_2 + \xi_2^n, x_2 - x_2^n > \geq -\varepsilon\|x_2 - x_2^n\|. \end{cases} \tag{۴}$$

حال چون F_1 و F_2 توابعی زبرلیپ‌شیتس‌گون هستند، زیردنباله‌هایی از ξ_1^n و ξ_2^n موجودندکه در توپولوژی ضعیف ستاره به عناصری چون $\bar{\xi}_1$ و $\bar{\xi}_2$ به‌ترتیب در $\partial \mathrm{F}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)(y^*)$ و $\partial \mathrm{F}(\bar{x}_2, \bar{y}_2)(y^*)$ همگرایند که $\bar{y}_1 \in \; \mathrm{F}(\bar{x}_1)$ و $\bar{y}_2 \in \; \mathrm{F}(\bar{x}_2)$.

با در نظر گرفتن (۴) با این زیردنباله‌های همگرا و اعمال حد بر دو طرف روابط و دانستن این موضوع که A_iها نگاشت‌هایی نیم‌هپیوسته‌اند، داریم

$$\begin{cases} \|\bar{x}_2 - T\bar{x}_1\| \leq \varepsilon, \\ < A_1\bar{x}_1 - g_1 + \bar{\xi}_1, x_1 - \bar{x}_1 > \geq -\varepsilon\|x_1 - \bar{x}_1\|, \\ < A_2\bar{x}_2 - g_2 + \bar{\xi}_2, x_2 - \bar{x}_2 > \geq -\varepsilon\|x_2 - \bar{x}_2\|, \end{cases}$$

یعنی $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega(\varepsilon)$. بنابراین $\Omega(\varepsilon)$ مجموعه‌ای بسته است.

قضیهٔ ۱۲. فرض کنید T عملگری پیوسته،$F_i: X \rightrightarrows Y$ نگاشت‌هایی زبرلیپ‌شیتس‌گون و$A_i: X \to X^*$،$i = 1,2$، توابعی نیم‌هپیوسته و یکنوا باشند.در این‌صورت SVI به‌طور قوی خوش‌وضع است اگر و تنها اگر

$$\Omega(\varepsilon) \neq 0, \;\; \forall \varepsilon > 0, \;\; \mathrm{diam}\left(\Omega(\varepsilon)\right) \to 0 \text{ هنگامی که } \varepsilon \to 0 \, .$$

اثبات: لزوم: واضح است که اگر SVI دارای جواب یکتا باشد آن‌گاه این جواب برای هر $\varepsilon > 0$ به مجموعه $\Omega(\varepsilon)$ متعلق است. حال با استفاده از برهان خلف فرض کنید، هنگامی که ε به صفر میل کند $\Omega(\varepsilon)$ به صفر همگرا نباشد.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.317]

بنابراین $\delta > 0$ و دنباله‌های $\varepsilon_k \downarrow 0^+$، $x^k = (x_1^k, x_2^k) \in \Omega(\varepsilon_k)$ و $z^k = (z_1^k, z_2^k) \in \Omega(\varepsilon_k)$ موجودند به‌قسمی که

$$\|x^k - z^k\| = \|(x_1^k, x_2^k) - (z_1^k, z_2^k)\| \geq \delta, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{۵}$$

حال چون $(x_1^k, x_2^k), (z_1^k, z_2^k)$ هر دو برای هر k به مجموعه $\Omega(\varepsilon_k)$ متعلق هستند، پس هر دو دنباله تقریب زننده‌ای از SVI هستند و با توجه به خوش‌وضع بودن قوی SVI، پس هر دو به جواب یکتای آن همگرا هستند که در تناقض با (۵) است. بنابراین اگر $\varepsilon \to 0$ دراین‌صورت $\operatorname{diam}\left(\Omega(\varepsilon)\right) \to 0$.

کفایت: فرض کنید $\{x^n = (x_1^n, x_2^n)\}$ دنباله‌ای تقریب زننده برای SVI باشد. بنابراین دنباله اعداد حقیقی مثبت $\varepsilon_n \to 0$ موجود است به‌قسمی که برای هر $(x_1, x_2) \in X \times X$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ دنباله‌های $(y_1^n, y_2^n) \in F(x_1^n) \times F(x_2^n)$ و $(\xi_1^n, \xi_2^n) \in \partial F_1(x_1^n, y_1^n)(y^*) \times \partial F_2(x_2^n, y_2^n)(y^*)$ موجودند که

$$\begin{cases} \|x_2^n - Tx_1^n\| \leq \varepsilon, \\ < A_1 x_1^n - g_1 + \xi_1^n, x_1 - x_1^n > \geq -\varepsilon_n \|x_1 - x_1^n\|, \\ < A_2 x_2^n - g_2 + \xi_2^n, x_2 - x_2^n > \geq -\varepsilon_n \|x_2 - x_2^n\|. \end{cases} \tag{۶}$$

بنابراین از بالا نتیجه می‌گیریم که $x^n = (x_1^n, x_2^n) \in \Omega(\varepsilon_n)$. حال چون $\operatorname{diam}\left(\Omega(\varepsilon)\right) \to 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\{x^n = (x_1^n, x_2^n)\}$ دنباله‌ای کوشی است که به نقطه‌ای چون $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \times X$ همگرا است. $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ را ثابت در نظر بگیرید. چون F_1 و F_2 نگاشت‌هایی زبرلیپ‌شیتس‌گون هستند، زیردنباله‌هایی از ξ_1^n و ξ_2^n همگرا به عناصری مانند $\xi_1 \in \partial F(\bar{x}_1, \bar{y}_1)(y^*)$ و $\xi_2 \in \partial F(\bar{x}_2, \bar{y}_2)(y^*)$ در توپولوژی ضعیف‌ستاره موجودند که $y_1 \in F(x_1)$ و $y_2 \in F(x_2)$. با اعمال حد بر دو طرف رابطه (۶) و درنظر گرفتن این واقعیت که A_1 و A_2 عملگرهایی یکنوا هستند، داریم

$$\begin{aligned} < A_1 x_1 - g_1 + \xi_1, x_1 - \bar{x}_1 > &= \lim_{i\to\infty} < A_1 x_1 - g_1 + \xi_1^{n_i}, x_1 - x_1^n > \\ &\geq \lim_{i\to\infty} < A_1 x_1^{n_i} - g_1 + \xi_1^{n_i}, x_1 - x_1^{n_i} > \ \geq \lim_{i\to\infty} -\varepsilon_{n_i} \|x_1 - x_1^{n_i}\| = 0. \end{aligned}$$

به‌طورمشابه می‌توان نتیجه گرفت که

$$< A_2 x_2 - g_2 + \xi_2, x_2 - \bar{x}_2 > \geq 0.$$

از طرفی با استفاده ازپیوستگی عملگر T داریم $T(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$. حال با استفاده از قضیهٔ۱ نتیجه می‌گیریم که $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ جوابی از SVI است و چون $\operatorname{diam}\left(\Omega(\varepsilon)\right) \to 0$ هنگامی که $\varepsilon \to 0$ می‌توان نتیجه گرفت که جواب SVI یکتا است. بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

حال شرایطی را بیان می‌کنیم که وجود و یکتایی جواب از SVI معادل خوش‌وضعی قوی آن باشد. بدین منظور ابتدا حکم زیر را بیان می‌کنیم.

حکم ۱۳. [۶]، فرض کنید $C^* \subset X^*$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی، محدب، بسته و کراندار و $\varphi: X \to \mathbb{R}$ تابعی نیم‌پیوسته پایینی، محدب و سره باشد و $y \in X$ دل‌خواه. فرض کنید برای هر $x \in X$، $x^*(x) \in C^*$ موجود باشد به‌قسمی که

$$< x^*(x), x - y > \geq \varphi(y) - \varphi(x).$$

در این‌صورت $y^* \in C^*$ موجود است به‌قسمی که

$$< y^*, x - y > \geq \ \varphi(y) - \varphi(x), \qquad \forall x \in X.$$

قضیهٔ ۱۴. فرض کنید $A_i: X \to X^*$ توابعی یکنوای آسوده با ثابت c_i، $i = 1,2$ و $\mathrm{F}_i: X \rightrightarrows Y$ نگاشت‌هایی زبرلیپ‌شیتس‌گون باشند که زیردیفرانسیل قائم آنها یکنوای آسوده با ثابت α_i، $i = 1,2$ هستند. اگر برای $i = 1,2$، $\alpha_i + c_i > 0$، دراین‌صورت SVI به‌طور قوی خوش‌وضع است اگر و تنها اگر آن دارای جواب یکتا باشد.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.317]

اثبات: لزوم حکم به‌راحتی از تعریف خوش‌وضعی قوی نتیجه می‌شود. برای کفایت فرض کنید نامساوی تغییراتی دوبخشی SVI دارای جواب یکتای $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ باشد. دراین‌صورت برای هر (x_1, x_2) و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر $\bar{y}_i \in F_i(\bar{x}_i)$ و $x_i^* \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y^*)$، $i = 1,2$ موجودند به‌قسمی که

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = T\bar{x}_1, \\ < A_1\bar{x}_1 - g_1 + x_1^*, x_1 - \bar{x}_1 > \geq 0, \\ < A_2\bar{x}_2 - g_2 + x_2^*, x_2 - \bar{x}_2 > \geq 0. \end{cases} \tag{۷}$$

حال فرض کنید $\{x^n = (x_1^n, x_2^n)\}$ دنباله‌ای تقریب زننده برای نامساوی تغییراتی دوبخشی SVI باشد. درنتیجه دنباله $\varepsilon_n \downarrow 0$ موجود است که برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}$ عناصر $y_i^n \in F_i(x_i^n)$ و $\xi_i^n(x_i, y^*) \in \partial F_i(x_i^n, y_i^n)(y^*)$، $i = 1,2$ موجودند که

$$\begin{cases} \|Tx_1^n - x_2^n\| \leq \varepsilon_n, \\ < A_1x_1^n - g_1 + \xi_1^n(x_1, y^*), x_1 - x_1^n > \geq -\varepsilon_n\|x_1 - x_1^n\|, \\ < A_2x_2^n - g_2 + \xi_2^n(x_2, y^*), x_2 - x_2^n > \geq -\varepsilon_n\|x_2 - x_2^n\|. \end{cases}$$

حال مجموعه‌های کراندار، محدب و غیرتهی

$$\begin{aligned} &\mathrm{co}\{A_ix_i^n - g_i + \xi_i^n(x_i, y^*) | y^* \in K^+ \cap S_{Y^*}, y_i^n \in F_i(x_i^n), \xi_i^n(x_i, y^*) \\ &\quad \in \partial F_i(x_i^n, y_i^n)(y^*)\}, i = 1,2, \end{aligned}$$

را درنظربگیرید. دراین‌صورت با استفاده از حکم بالا با توابع $\varphi_i(x) = \varepsilon_n\|x_i - x_i^n\|$ عناصر ξ_i^n که مستقل از x_i و y^* هستند موجودند به‌قسمی که

$$< A_ix_i^n - g_i + \xi_i^n, x_i - x_i^n > \geq -\varepsilon_n\|x_i - x_i^n\|, \quad \forall x_i \in X, \ \ i = 1,2.$$

توجه کنید که عناصر ξ_i^n را می‌توان به‌صورت $\xi_i^n = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}\, \xi_{ij}^n$ انتخاب کرد که $m_i \in \mathbb{N}$، $\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} = 1$ و $\xi_{ij}^n \in \partial F_i(x_i^n, y_{ij}^n)(y_j^*)$ که $i = 1,2$. بنابراین

$$\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} < A_ix_i^n - g_i + \xi_{ij}^n, x_i - x_i^n > \geq \ -\varepsilon_n\|x_i - x_i^n\|, \quad \forall x_i \in X, \ \ i = 1,2.$$

حال با قراردادن $x_i = \bar{x}_i$ در نامساوی بالا داریم

$$\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} < A_ix_i^n - g_i + \xi_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n > \geq \ -\varepsilon_n\|\bar{x}_i - x_i^n\|.$$

از یکنوایی آسوده عملگرهای A_i و ∂F_i، $i = 1,2$ درنامساوی بالا داریم

$$\begin{aligned} -\varepsilon_n \parallel \bar{x}_i - x_i^n \parallel &\leq \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} < A_ix_i^n - g_i + \xi_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n > \\ &\leq \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} \left[< A_ix_i^n + \xi_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n > - < A_i\bar{x}_i + \varsigma_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n >\right] \\ &= \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij} \left[< A_ix_i^n - A_i\bar{x}_i + \xi_{ij}^n - \varsigma_{ij}^n, \bar{x}_i - x_i^n >\right] \leq -(c_i + \alpha_i)\, \|\bar{x}_i - x_i^n\|, \\ &i = 1,2, \end{aligned}$$

که $\varsigma_{ij}^n \in \partial F_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)(y_j^*)$ و $\bar{y}_i \in F(\bar{x}_i)$ از رابطهٔ (۷) با قرار دادن $x_i = x_i^n$، $i = 1,2$ به‌دست می‌آیند.

حال چون $c_i + \alpha_i > 0$ برای $i = 1,2$ داریم

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.317]

$$\|\bar{x}_i - x_i^n\| \leq \frac{\varepsilon_n}{c_i + \alpha_i}\ , \qquad i = 1,2,$$

که با گرفتن حد از دو طرف رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که x_i^n به $\bar{x}_i$ برای $i = 1,2$ همگراست.

ملاحظهٔ ۱۵. قضیهٔ ۱۴، قضیهٔ ۱.۴ [۱۳] را از نامساوی‌های نیمه‌تغییراتی و قضیهٔ ۲.۴ [۵] را از نامساوی‌های تغییراتی-نیمه‌تغییراتی دوبخشی تعریف شده به‌وسیله زیردیفرانسیل کلارک که همواره محدب است، به نامساوی‌های تغییراتی چندمقداری دوبخشی که توابع درگیر نگاشت‌های مجموعه مقدار هستند، با استفاده زیردیفرانسیل قائم که لزوماً محدب نیست، تعمیم و گسترش می‌دهد.

منابع

1. Bao T. Q., Mordukhovich B. S., "Variational principles for set-valued mappings with applications to multiobjective optimization", Control Cyber, 36 (2007) 531-562.
2. Censor Y., Gibali A., Reich S., "Algorithms for the split variational inequality problem", Numer. Algorithms. 59 (2012) 301-323.
3. Fang Y. P., Hu R., "Parametric well-posedness for variational inequalities defined by bifunctions", Comput. Math. Appl, 53 (2007) 1306-1316.
4. Hu R., Fang Y. P., "Characterization of Levitin-Polyak well-posedness by perturbation for the split variational inequality problem", Optimization, 65 (2016) 1717-1732.
5. Hu H., Xiao Y. B., Huang N. J., Wang X., "Equivalence results of well-posedness for split variational-hemivariational inequalities", J. Nonlinear Convex Anal., 20 (2019) 447-459.
6. Khakrah E., Razani A., Mirzaei R., Oveisiha M., "Some metric characterizations of well-posedness for hemivariational-like inequalities", J. Nonlinear Funct. Anal., (2017) Article ID 44.
7. Lucchetti R., Patrone F., "A characterization of Tykhonov well-posedness for minimum problems with applications to variational inequalities", Numr. Funct. Anal. Optim, 3 (1981) 461-476.
8. Mordukhovich B. S., "Variational Analysis and Generalized Diffierential I", Basic theory, 1st ed., ser. Grundlehren. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, Vol. 330 (2006).
9. Reich S., Zaslavski A. J., "Generic well-posedness of fixed point problems", Vietnam J. Math., 46 (2017) 1-9.
10. Shu Q., Hu Y, R., Xiao Y. B., "Metric characterizations for well-posedness of split hemivariational inequalities", J. Ineq. Appl., 190 (2018) 1-17.
11. Tykhonov A. N., "On the stability of the functional optimization problem", USSR Comput. Math. Math. Phys., 6 (1966) 28-33.
12. Xiao Y., Huang N., "Well-posedness for a class of variational-hemivariational inqualities with perturbations", J. Optim. Theory Appl., 151 (2011) 33-51.
13. Xiao Y. B., Yang X., Huang N. J., "Some equivalence results for well-posedness of hemivariational inequalities", J. Global Optim., 61 (2015) 789-802.
14. Zeidler E., "Nonlinear Functional Analysis and its Applications", Springer, Berlin Heidelberg, Vol. II (1990).

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.317]