



Kharazmi University

# Primary and maximal subautomata resulting from an active general fuzzy automaton

Mohammad Horry<sup>1</sup>  

1. Department of Mathematical Sciences, Faculty of Chamran, Kerman Branch, Technical and Vocational University (TVU), Kerman, Iran.

✉E-mail: [mhori@tvu.ac.ir](mailto:mhori@tvu.ac.ir)

---

---

## Article Info

## ABSTRACT

---

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:  
8 June 2020  
Revised form:  
21 December 2020  
Accepted:  
11 January 2020  
Published online:  
22 November 2022

### Keywords:

Fuzzy automaton;  
Generator;  
maximal;  
Subautomaton.

### Introduction

In computer science, the theory of automata or machine theory is the mathematical study of computing machines and their ability to solve problems. In 1967, the fuzzy automaton was introduced by Wee. In 2004, Doostfateme and Kremer developed the concept of fuzzy automaton and introduced the concept of general fuzzy automaton. In this paper, we are introduced the concepts primary and maximal subautomaton with threshold  $c$  and it is proved that any active general fuzzy automaton can be written socially under distinct primary and maximal subautomata with threshold  $c$ .

### Material and methods

In this scheme, first the active general fuzzy automaton is defined and then the primary and maximal subautomaton with threshold  $c$  is introduced, and then using the above definition, the subautomaton produced is introduced, then the conditions of the generated subautomata are stated.

### Results and discussion

Examples of active general fuzzy automata were given to show the efficiency of the new definitions. Also, the examples given show that the definitions given are accurate.

---

## Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The conditions of a produced automaton were expressed.
- Any active general fuzzy automaton can be written socially under distinct primary and maximal subautomata with threshold  $c$ .

---

**How to cite:** Horry, M., (2022) Primary and maximal subautomata resulting from an active general fuzzy automaton. *Mathematical Researches*, 8 (3), 68-79



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال حاصل از یک اتوماتای فازی عمومی فعال

محمد حری<sup>۱</sup> ✉

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده شهید چمران، دانشگاه فنی و حرفه ای استان کرمان، کرمان، ایران. پست الکترونیکی: [mhori@tvu.ac.ir](mailto:mhori@tvu.ac.ir)

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۱۹</p> <p>تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۰۱</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۲۲</p> <p>تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱</p> <p>واژه‌های کلیدی: اتوماتای فازی، مولد، زیر اتوماتا، ماکزیمال.</p>	<p>در این مقاله، زیر اتوماتاهای با آستانه C از یک اتوماتای فازی عمومی فعال و مولد از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف خواهد شد و ارتباطات بین آن‌ها بررسی می‌شود. در ادامه زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال با آستانه C از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف خواهند شد و علاوه بر این، ثابت می‌شود که هر اتوماتای فازی عمومی فعال را می‌توان به صورت اجتماعی از زیر اتوماتاهای متمایز اولیه و ماکزیمال با آستانه C نوشت.</p>

استناد: حری، محمد؛ (۱۴۰۱). زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال حاصل از یک اتوماتای فازی عمومی فعال. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۳)، ۶۸-۷۹.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## مقدمه

در علوم نظری رایانه، نظریه اتوماتا یا نظریه ماشین‌ها، بررسی ریاضی ماشین‌های محاسبه‌گر و توانایی‌های آنها برای حل مسائل می‌باشد. در سال ۱۹۶۷ اتوماتای فازی توسط وی معرفی شد [۱]. در سال ۲۰۰۴ دوست فاطمه و کرمر مفهوم اتوماتای فازی را توسعه دادند و مفهوم اتوماتای فازی عمومی را معرفی کردند [۲]. فرض کنید  $S$  یک مجموعه و  $|S|$  تعداد اعضای آن باشد و  $1 \leq |S| < \infty$ . در این صورت نیم‌گروه یک‌دار آزاد تولید شده توسط  $S$  با عمل کنار هم قراردادن را با علامت  $S^*$  نمایش می‌دهیم و هر عضو  $S^*$  را یک رشته می‌نامیم. عضو همانی  $S^*$  را با  $\Lambda$  نمایش می‌دهیم و رشته تهی نامیده می‌شود و داریم:

$$S^* = \{a_1 a_2 \dots a_n : a_i \in S\}$$

بنابراین یک رشته متعلق به  $S^*$ ، دنباله‌ای به صورت  $a_1 a_2 \dots a_n$  می‌باشد که در آن  $a_i \in S$ . یک زیرمجموعه از  $S^*$  را یک زبان صوری روی  $S$  گوئیم و در علوم نظری رایانه، زبان‌های منظم به زیرمجموعه‌ای خاص از زبان‌های صوری گفته می‌شود. اعضای یک زبان منظم، توسط ماشین‌های حالت متناهی معین پذیرش می‌شوند و از زبان‌های منظم در طراحی زبان‌های برنامه‌نویسی استفاده می‌شود. فرض کنید • یک عمل دوتایی باشد که برای هر دو عضو  $a_1 a_2 \dots a_n$  و  $b_1 b_2 \dots b_m$  از  $S^*$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a_1 a_2 \dots a_n) \bullet (b_1 b_2 \dots b_m) = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m,$$

$S^*$  شامل  $\Lambda$  نیز هست. اگر بخواهیم  $\Lambda$  در آن نباشد، از علامت  $S^+$  استفاده می‌شود. پس  $S^+ = S^* \setminus \{\Lambda\}$ . طول رشته  $x \in S^*$  را با  $\ell(x)$  نمایش می‌دهیم و برابر با تعداد حروف رشته  $x$  می‌باشد. بنابراین  $\ell(\Lambda) = 0$ . در این مقاله، با استفاده از [۳]، [۴]، [۵] و [۶]، زیر اتوماتاهای با آستانه  $c$  از یک اتوماتای فازی عمومی فعال و مولد از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف خواهند شد. سپس زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال با آستانه  $c$  از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف می‌شوند و ثابت می‌شود که هر اتوماتای فازی عمومی فعال را می‌توان به صورت اجتماعی از زیر اتوماتاهای متمایز اولیه و ماکزیمال با آستانه  $c$  نوشت.

**تعریف ۱:** [۵] شش‌تایی  $\tilde{F} = (Q, \Sigma, R, Z, \delta, \omega)$  را اتوماتای حالت متناهی فازی گوئیم، هرگاه  $Q$ ،  $\Sigma$  و  $Z$  مجموعه‌های غیرتهی متناهی باشند،  $\omega: Q \rightarrow Z$ ،  $R \subset Q$ ،  $\delta: Q \times \Sigma \times Q \rightarrow [0,1]$ ، اعضا  $Q$  را حالت‌ها، اعضا  $\Sigma$  را الفبای ورودی،  $R$  را حالت آغازین اتوماتا،  $Z$  مجموعه الفبای خروجی،  $\omega$  تابع غیرفازی خروجی و  $\delta$  را تابع انتقال فازی گوئیم و در این نوع اتوماتا، به هر انتقال مقدار عضویتی در فاصله  $[0,1]$  تعلق می‌گیرد و این مقدار عضویت را، مقدار انتقال گوئیم.

تعریف فوق در [۷]، [۸]، [۹] و [۱۰]، به عنوان تعریف اتوماتای حالت متناهی فازی در نظر گرفته شده است.

**تعریف ۲:** [۲] هشت‌تایی  $\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}, F_1, F_2)$  را اتوماتای فازی عمومی گوئیم، هرگاه  $Q$ ،  $\Sigma$  و  $Z$  مجموعه‌های غیرتهی متناهی،  $\tilde{R} \subset \tilde{P}(Q)$ ،  $\tilde{\delta}: (Q \times [0,1]) \times \Sigma \times Q \rightarrow [0,1]$ ،  $\omega: Q \rightarrow Z$ ،

حالت‌های آغازین فازی،  $Z$  مجموعه الفبای خروجی،  $\sigma$  تابع غیر فازی خروجی،  $\tilde{\delta}$  را تابع انتقال تقویت شده،  $F_1$  را تابع تعیین عضویت و  $F_2$  را تابع رفع چند عضویتی گوئیم. تابع  $F_1$  برای تعیین عضویت حالت‌های فعال به کار می‌رود و تابع تعیین عضویت  $F_1(\mu, \delta)$  توسط دو پارامتر  $\mu$  و  $\delta$  بدست می‌آید که در آن مقدار عضویت ما قبل بلا فصل و  $\delta$  مقدار انتقال است. در این تعریف، روندی که توسط انتقال از حالت  $q_i$  به حالت  $q_j$  روی مقدار  $a_k$  اتفاق می‌افتد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu^{t+1}(q_j) = \tilde{\delta}((q_i, \mu^t(q_i)), a_k, q_j) = F_1(\mu^t(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j)),$$

که مقدار عضویت حالت  $q_j$  در زمان  $t+1$  توسط تابع  $F_1$  و با استفاده از مقدار عضویت  $q_i$  در زمان  $t$  و مقدار انتقال محاسبه می‌شود.

فرض کنید  $Q_{act}(t_i)$  مجموعه همه حالت‌های فعال در زمان  $t_i$ ،  $i \geq 0$  باشد. آن‌گاه  $Q_{act}(t_0) = \tilde{R}$  و برای هر  $i \geq 1$ ،  $Q_{act}(t_i)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{act}(t_i) = \{(q, \mu^t(q)) : \exists q' \in Q_{act}(t_{i-1}), \exists a \in \Sigma, \delta(q', a, q) \in \Delta\}$$

که در آن  $\Delta$  مجموعه همه مقادیر انتقال اتوماتای  $\tilde{F}$  است.

با توجه به تعریف ارائه شده، مشخص است که  $Q_{act}(t_i)$  یک مجموعه فازی است. برای نشان دادن این که  $q$  متعلق به  $Q_{act}(t_i)$  است باید بنویسیم  $q$  متعلق به دامنه  $Q_{act}(t_i)$  و برای سهولت در نوشتن، به صورت  $q \in Q_{act}(t_i)$  نمایش می‌دهیم.

تابع رفع چند عضویتی  $F_2$ ، چند عضویتی حالت‌های فعالی مانند  $q_j$  را با استفاده از الگوریتم زیر برطرف می‌کند.

**الگوریتم ۳:** [۲] (روش رفع چند عضویتی)

اگر به طور هم‌زمان، چندین انتقال برای حالت فعال  $q_j$  در زمان  $t+1$  موجود باشد، الگوریتم فوق یک مقدار عضویت یکتا را برای آن تعیین خواهد کرد.

(۱) توسط تابع تعیین عضویت  $F_1$ ، با در نظر گرفتن مقدار انتقال  $\delta(q_i, a_k, q_j)$  همراه با مقدار عضویت ماقبل بلا فصل متناظر  $\mu^t(q_i)$ ، مقدار عضویتی تولید خواهد شد که  $v_i$  نامیده می‌شود.

$$v_i = \tilde{\delta}((q_i, \mu^t(q_i)), a_k, q_j) = F_1(\mu^t(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j)).$$

(۲) این مقادیر عضویت، ممکن است برابر نباشند. بنابراین برای رفع مشکل فوق، از تابع  $F_2$  استفاده می‌شود و نتیجه به دست آمده توسط  $F_2$  به صورت مقدار عضویت حالت فعال  $q_j$  تعیین خواهد شد. نحوه تعیین مقدار عضویت حالت فعال، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mu^{t+1}(q_j) = F_2[v_i] = F_2[F_1(\mu^t(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j))].$$

که در آن  $n$  تعداد انتقال های همزمان در حالت فعال  $q_j$  در زمان  $t+1$ ،  $\delta(q_i, a_k, q_j)$  مقدار انتقال از حالت  $q_i$  به حالت  $q_j$  تحت الفبای ورودی  $a_k$ ،  $\mu^t(q_i)$  مقدار عضویت  $q_i$  در زمان  $t$  و  $\mu^{t+1}(q_j)$  مقدار عضویت نهائی  $q_j$  در زمان  $t+1$  است.

**تعریف ۴:** [۶] فرض کنید  $\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی باشد.  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  را اتوماتای فازی عمومی ماکزیم-مینیم گوئیم که در آن  $\tilde{\delta}^* : Q_{act} \times \Sigma^* \times Q \rightarrow [0,1]$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^i(q)), \Lambda, p) = \begin{cases} 1 & , q = p \\ 0 & , \end{cases} \quad \text{اگر}$$

در غیر این صورت

$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^{i-1}(q)), u_i, p) = \tilde{\delta}((q, \mu^{i-1}(q)), u_i, p), \quad \forall i, \quad i \geq 0$$

و برای هر  $i \geq 1$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^{i-1}(q)), u_i u_{i+1}, p) = \bigvee_{q' \in Q_{act}(t_i)} (\tilde{\delta}((q, \mu^{i-1}(q)), u_i, q') \wedge \tilde{\delta}((q', \mu^i(q')), u_{i+1}, p)),$$

و برای هر رشته  $\omega = u_1 u_2 \dots u_n$ ، به طور باز گشتی و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}^*((q, \mu^0(q)), u_1 u_2 \dots u_n, p) \\ &= \bigvee \{ \tilde{\delta}((q, \mu^0(q)), u_1, p_1) \wedge \tilde{\delta}((p_1, \mu^1(p_1)), u_2, p_2) \wedge \dots \wedge \\ & \tilde{\delta}((p_{n-1}, \mu^{n-1}(p_{n-1})), u_n, p) : p_1 \in Q_{act}(t_1), p_2 \in Q_{act}(t_2) \\ & \dots, p_{n-1} \in Q_{act}(t_{n-1}) \}, \\ & \text{که در آن } Q_{act} = \{Q_{act}(t_0), Q_{act}(t_1), Q_{act}(t_2), \dots\}. \end{aligned}$$

### زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال حاصل از یک اتوماتای فازی عمومی فعال

در این بخش، مدلی برای ساختن زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال حاصل از یک اتوماتای فازی عمومی فعال بیان می شود.

**تعریف ۱:** فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیم-مینیم باشد.  $\tilde{F}^*$  را یک اتوماتای فازی عمومی فعال گوئیم، هرگاه

$$\forall q \in Q, \quad \exists i \in \{0, 1, 2, \dots\} : \quad q \in Q_{act}(t_i).$$

فرض کنید  $\tilde{F}^*$  یک اتوماتای فازی عمومی فعال،  $q \in Q$ ،  $x \in \Sigma^*$ ،  $0 \leq c < 1$ ،  $T \subseteq Q$ . در این صورت  $x_c(q)$ ،  $\Sigma_c(q)$  و  $\Sigma_c(T)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_c(q) = \{p \in Q : \tilde{\delta}^*((q, \mu^t(q)), x, p) > c\},$$

$$\Sigma_c(q) = \bigcup_{x \in \Sigma^*} x_c(q),$$

$$\Sigma_c(T) = \bigcup \{\Sigma_c(q) : q \in T\}.$$

قضیه ۲: فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم فعال باشد،

$$0 \leq c < 1 \text{ و } p, q, r \in Q$$

$$q \in \Sigma_c(q) \quad (\text{i})$$

$$\text{اگر } p \in \Sigma_c(r) \text{ و } q \in \Sigma_c(r) \text{ و } p \in \Sigma_c(q) \quad (\text{ii})$$

اثبات: (i) داریم:

$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^t(q)), \Lambda, q) = 1 > c \Rightarrow q \in \Lambda_c(q).$$

بنابراین  $q \in \Sigma_c(q)$

(ii) چون  $q \in \Sigma_c(r)$ ، بنابراین  $x \in \Sigma^*$  وجود دارد به طوری که  $q \in x_c(r)$

در نتیجه  $\tilde{\delta}^*((r, \mu^t(r)), x, q) > c$ . همچنین، چون  $p \in \Sigma_c(q)$ ، بنابراین  $y \in \Sigma^*$  وجود دارد به طوری که

$$p \in y_c(q) \text{ در نتیجه } \tilde{\delta}^*((q, \mu^{t_j}(q)), y, p) > c \text{ حال داریم:}$$

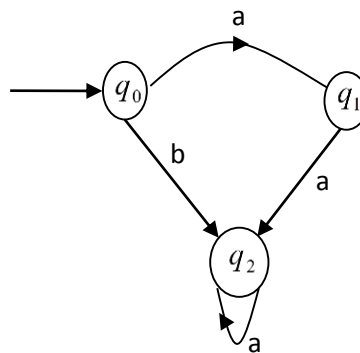
$$\tilde{\delta}^*((r, \mu^t(r)), xy, p) = \bigvee_{q' \in Q_{act}(t_j)} (\tilde{\delta}^*((r, \mu^t(r)), x, q') \wedge \tilde{\delta}^*((q', \mu^{t_j}(q')), y, p)) \geq$$

$$\tilde{\delta}^*((r, \mu^t(r)), x, q) \wedge \tilde{\delta}^*((q, \mu^{t_j}(q)), y, p) > c.$$

بنابراین  $p \in (xy)_c(r)$  در نتیجه  $p \in \Sigma_c(r)$

مثال ۳: فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم باشد که

در شکل ۱ نمایش داده شده و جدول انتقال آن در جدول ۱ نمایش داده شده که در آن  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$  مجموعه



شکل ۱

حالت‌ها،  $\Sigma = \{a, b\}$  مجموعه الفبای ورودی،  $Z = \phi$ ،  $\omega$  غیر قابل اجرا،  $\tilde{R} = \{(q_0, 1)\}$ ،  $\mathcal{Q}_{act}(t_0) = \tilde{R}$ ،  $F_1(\mu, \delta) = \text{Min}(\mu, \delta)$ ،  $c = 0.1$ ،  $\delta(q_0, a, q_1) = 0.4$ ،  $\delta(q_0, b, q_2) = 0.5$ ،  $\delta(q_1, a, q_2) = 0.3$ ،  $\delta(q_2, a, q_2) = 0.2$ .

جدول ۱

$Q \backslash \Sigma$	$a$	$b$
$q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\phi$
$q_2$	$\{q_2\}$	$\phi$

اگر ورودی را  $x = aa..a$  انتخاب کنیم، داریم:

$$\mathcal{Q}_{act}(t_1) = \{(q_1, \mu^{t_1}(q_1))\}, \mathcal{Q}_{act}(t_i) = \{(q_2, \mu^{t_i}(q_2))\}, \forall i \geq 2,$$

$$\mu^{t_1}(q_1) = \tilde{\delta}((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), a, q_1) = F_1(\mu^{t_0}(q_0), \delta(q_0, a, q_1)) = F_1(1, 0.4) = 0.4,$$

$$\mu^{t_2}(q_2) = \tilde{\delta}((q_1, \mu^{t_1}(q_1)), a, q_2) = F_1(\mu^{t_1}(q_1), \delta(q_1, a, q_2)) = F_1(0.4, 0.3) = 0.3,$$

$$\mu^{t_3}(q_2) = \tilde{\delta}((q_2, \mu^{t_2}(q_2)), a, q_2) = F_1(\mu^{t_2}(q_2), \delta(q_2, a, q_2)) = F_1(0.3, 0.2) = 0.2,$$

$$\mu^{t_4}(q_2) = \tilde{\delta}((q_2, \mu^{t_3}(q_2)), a, q_2) = F_1(\mu^{t_3}(q_2), \delta(q_2, a, q_2)) = F_1(0.2, 0.2) = 0.2,$$

$$\mu^{t_i}(q_2) = 0.2, \forall i \geq 5,$$

$$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), \Lambda, q_0) = 1 > c \Rightarrow q_0 \in \Lambda_c(q_0) \Rightarrow q_0 \in \Sigma_c(q_0),$$

$$\tilde{\delta}^*((q_1, \mu^{t_1}(q_1)), \Lambda, q_1) = 1 > c \Rightarrow q_1 \in \Lambda_c(q_1) \Rightarrow q_1 \in \Sigma_c(q_1),$$

$$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), a, q_1) = 0.4 > c \Rightarrow q_1 \in a_c(q_0) \Rightarrow q_1 \in \Sigma_c(q_0),$$

$$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), aa, q_2) = 0.4 \wedge 0.3 = 0.3 > c \Rightarrow q_2 \in (aa)_c(q_0) \Rightarrow q_2 \in \Sigma_c(q_0),$$

$$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), aaa, q_2) = 0.4 \wedge 0.3 \wedge 0.2 = 0.2 > c \Rightarrow q_2 \in \Sigma_c(q_0),$$

$$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), a^n, q_2) = 0.2 > c, \forall n \geq 4 \Rightarrow q_2 \in \Sigma_c(q_0),$$

$$\tilde{\delta}^*((q_1, \mu^{t_1}(q_1)), a, q_2) = 0.3 > c \Rightarrow q_2 \in \Sigma_c(q_1).$$

قضیه ۴: فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم فعال باشد،

$$0 \leq c < 1 \text{ و } T, T_1, T_2 \subseteq Q$$



$$T \subseteq \Sigma_c(T) \quad (i)$$

$$\Sigma_c(T_1) \subseteq \Sigma_c(T_2) \text{ اگر } T_1 \subseteq T_2, \text{ آنگاه} \quad (ii)$$

$$\Sigma_c(\Sigma_c(T)) = \Sigma_c(T) \quad (iii)$$

$$\Sigma_c(T_1 \cup T_2) = \Sigma_c(T_1) \cup \Sigma_c(T_2) \quad (iv)$$

$$\Sigma_c(T_1 \cap T_2) \subseteq \Sigma_c(T_1) \cap \Sigma_c(T_2) \quad (v)$$

اثبات: (i) فرض کنید  $q \in T$ . چون  $q \in \Sigma_c(q) \subseteq \Sigma_c(T)$ ، در نتیجه  $q \in \Sigma_c(T)$ . بنابراین  $T \subseteq \Sigma_c(T)$ .

(ii) فرض کنید  $p \in \Sigma_c(T_1)$ . بنابراین  $q \in T_1$  وجود دارد به طوری که  $p \in \Sigma_c(q)$ . چون  $T_1 \subseteq T_2$ ، بنابراین

$$q \in T_2 \text{ و } p \in \Sigma_c(q) \text{ در نتیجه } p \in \Sigma_c(T_2). \text{ بنابراین } \Sigma_c(T_1) \subseteq \Sigma_c(T_2)$$

(iii) طبق قسمت (i)، داریم  $\Sigma_c(T) \subseteq \Sigma_c(\Sigma_c(T))$ .

فرض کنید  $p \in \Sigma_c(\Sigma_c(T))$ . بنابراین  $q \in \Sigma_c(T)$  وجود دارد به طوری که  $p \in \Sigma_c(q)$ . در نتیجه  $r \in T$  وجود

دارد به طوری که  $q \in \Sigma_c(r)$ . حال چون  $p \in \Sigma_c(q)$  و  $q \in \Sigma_c(r)$ ، طبق قسمت (ii)، نتیجه می‌شود

$$p \in \Sigma_c(r) \text{ بنابراین } p \in \Sigma_c(T) \text{ و در نتیجه } \Sigma_c(\Sigma_c(T)) \subseteq \Sigma_c(T)$$

اثبات قسمت‌های (iv) و (v) به طور مشابه صورت می‌گیرند.

مثال بعد، نمونه‌ای است که نشان می‌دهد تساوی در قسمت (v) قضیه قبل برقرار نیست.

مثال ۵: فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم در مثال ۳ باشد،

$$T_1 = \{q_0\} \text{ و } T_2 = \{q_1\} \text{ حال داریم:}$$

$$\Sigma_c(T_1) = \{q_0, q_1, q_2\},$$

$$\Sigma_c(T_2) = \{q_1, q_2\},$$

$$\Sigma_c(T_1) \cap \Sigma_c(T_2) = \{q_1, q_2\},$$

$$\Sigma_c(T_1 \cap T_2) = \phi.$$

بنابراین در مثال فوق داریم  $\Sigma_c(T_1 \cap T_2) \not\subseteq \Sigma_c(T_1) \cap \Sigma_c(T_2)$ .

تعریف ۶: فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم فعال

باشد،  $0 \leq c < 1$ ،  $T \subseteq Q$  و  $\tilde{F}^* = (T, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  در این صورت  $\tilde{F}^*$  را یک زیر اتوماتا با آستانه

$c$  از  $\tilde{F}^*$  گوئیم هرگاه  $\Sigma_c(T) \subseteq T$  به طوری که  $\tilde{\delta}^*$  تحدید از  $\tilde{\delta}^*$  روی  $\tilde{F}^* \times \Sigma^* \times T$  می‌باشد.

مثال ۷: فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم فعال باشد،

$$0 \leq c < 1, T \subseteq Q$$

حال چون  $\Sigma_c(\Sigma_c(T)) = \Sigma_c(T)$ ، در نتیجه  $L = (\Sigma_c(T), \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}'^*, F_1, F_2)$  یک زیراتوماتا با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  می باشد به طوری که  $\tilde{\delta}'^*$  تحدید از  $\tilde{\delta}^*$  روی  $(Q_{act})_L \times \Sigma^* \times \Sigma_c(T)$  می باشد.

**قضیه ۸:** فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم فعال باشد،  $0 \leq c < 1$ ،  $\tilde{F}_i^* = (T_i, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}_i^*, F_1, F_2)$  خانواده‌ای از زیر اتوماتاهای با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  باشند به طوری

که  $\tilde{\delta}_i^*$  تحدید از  $\tilde{\delta}^*$  روی  $(Q_{act})_{\tilde{F}_i^*} \times \Sigma^* \times T_i$  است و  $T_i \subseteq Q$  برای هر  $i \in I$ . آن گاه

(i)  $\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i^* = (\bigcap_{i \in I} T_i, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \bigcap_{i \in I} \tilde{\delta}_i^*, F_1, F_2)$  یک زیر اتوماتا با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  است،

(ii)  $\bigcup_{i \in I} \tilde{F}_i^* = (\bigcup_{i \in I} T_i, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}_i^*, F_1, F_2)$  یک زیر اتوماتا با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  است به طوری که  $\tilde{\delta}'^*$  تحدید از

$\tilde{\delta}^*$  روی  $(Q_{act})_{\bigcup_{i \in I} \tilde{F}_i^*} \times \Sigma^* \times \bigcup_{i \in I} T_i$  می باشد.

**اثبات:** (i) چون  $\tilde{\delta}_i^*$  تحدید از  $\tilde{\delta}^*$  روی  $(Q_{act})_{\tilde{F}_i^*} \times \Sigma^* \times T_i$  می باشد، بنابراین داریم:

$$\left( \bigcap_{i \in I} \tilde{\delta}_i^* \right) ((q, \mu^t(q)), x, p) = \bigwedge_{i \in I} \tilde{\delta}_i^* ((q, \mu^t(q)), x, p) = \tilde{\delta}^* ((q, \mu^t(q)), x, p).$$

همچنین چون  $\Sigma_c(T_i) \subseteq T_i$  در نتیجه داریم:

$$\Sigma_c\left(\bigcap_{i \in I} T_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} \Sigma_c(T_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} T_i.$$

بنابراین  $\bigcap_{i \in I} \tilde{F}_i^*$  یک زیر اتوماتا با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  می باشد.

(ii) چون  $\Sigma_c(T_i) \subseteq T_i$  در نتیجه داریم:

$$\Sigma_c\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) = \bigcup_{i \in I} \Sigma_c(T_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i.$$

بنابراین  $\bigcup_{i \in I} \tilde{F}_i^*$  یک زیر اتوماتا با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  می باشد.

**تعریف ۹:** فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم فعال

باشد،  $0 \leq c < 1$ ،  $T \subseteq Q$  و  $\{L_i : i \in I\}$  خانواده‌ای از همه زیر اتوماتاهای با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  باشد که مجموعه حالت-

های آنها شامل  $T$  است. زیر اتوماتای تولید شده توسط  $T$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle T \rangle = \bigcap \{L_i : i \in I\}.$$

**قضیه ۱۰:** فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم فعال،

$0 \leq c < 1$ ،  $T \subseteq Q$  و  $L = (\Sigma_c(T), \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}'^*, F_1, F_2)$  به طوری که  $\tilde{\delta}'^*$  تحدید از  $\tilde{\delta}^*$  روی

$(Q_{act})_L \times \Sigma^* \times \Sigma_c(T)$  است. آن گاه  $\langle T \rangle = L$ .

**اثبات:** فرض کنید  $\{L_i : i \in I\}$  خانواده‌ای از همه زیر اتوماتاهای با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  باشد که مجموعه حالت‌های آنها

شامل  $T$  است که در آن  $L_i = (T_i, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}_i^*, F_1, F_2)$ . بنابراین داریم:

$$\langle T \rangle = \left( \bigcap_{i \in I} T_i, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \bigcap_{i \in I} \tilde{\delta}_i^*, F_1, F_2 \right).$$

کافی است نشان دهیم  $\Sigma_c(T) = \bigcap_{i \in I} T_i$ . چون  $L = (\Sigma_c(T), \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک زیر اتوماتا با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  می‌باشد که  $T \subseteq \Sigma_c(T)$ ، در نتیجه  $\Sigma_c(T) \supseteq \bigcap_{i \in I} T_i$ . فرض کنید  $p \in \Sigma_c(T)$ . بنابراین  $q \in T$  وجود دارد به طوری که  $p \in \Sigma_c(q)$ . حال چون  $T_i \supseteq T$  برای هر  $i \in I$  در نتیجه  $q \in \bigcap_{i \in I} T_i$ . حال چون  $\langle T \rangle$  یک زیر اتوماتای با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  می‌باشد، در نتیجه  $\Sigma_c(\bigcap_{i \in I} T_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} T_i$  بنابراین داریم:

$$p \in \Sigma_c(q) \subseteq \Sigma_c(\bigcap_{i \in I} T_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} T_i.$$

در نتیجه  $\Sigma_c(T) = \bigcap_{i \in I} T_i$ . بنابراین  $\Sigma_c(T) \subseteq \bigcap_{i \in I} T_i$ .  
**تعریف ۱۱:** فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم فعال باشد،  $0 \leq c < 1$  و  $L$  یک زیر اتوماتا با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  باشد.

(i)  $L = \langle q \rangle$  را یک زیر اتوماتای اولیه با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  گوئیم، هرگاه  $q \in Q$  موجود باشد به طوری که  $L = \langle q \rangle$ ،  
(ii) فرض کنید  $L$  یک زیر اتوماتای اولیه با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  باشد. گوئیم  $L$  یک زیر اتوماتای ماکزیمال با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  است، هرگاه  $L \neq \tilde{F}^*$  و  $L \subseteq \langle p \rangle$  برای هر  $p \in Q$  نتیجه دهد که  $L = \langle p \rangle$ .

**قضیه ۱۲:** فرض کنید  $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$  یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم فعال باشد،  $0 \leq c < 1$  و  $\tau = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  مجموعه تمام زیر اتوماتاهای متمایز اولیه و ماکزیمال با آستانه  $c$  از  $\tilde{F}^*$  باشد. آن‌گاه

$$\tilde{F}^* = \bigcup_{i=1}^n L_i \quad (i)$$

$$\tilde{F}^* \neq \bigcup_{i=1, i \neq j}^n L_i \quad \text{برای هر } j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (ii)$$

**اثبات:** (i) فرض کنید  $q_0 \in Q$ . چون  $Q$  متناهی می‌باشد، در نتیجه یا  $\langle q_0 \rangle \in \tau$  یا عدد صحیح  $k$  موجود است به طوری که  $\langle q_0 \rangle \subset \langle q_k \rangle$  و  $\langle q_k \rangle \in \tau$ . بنابراین  $Q = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_c(p_i)$  که در آن  $L_i = \langle p_i \rangle$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$  در نتیجه  $\tilde{F}^* = \bigcup_{i=1}^n L_i$ .

(ii) فرض کنید  $M = \bigcup_{i=1, i \neq j}^n L_i$  و  $L_j = \langle p_j \rangle$ . اگر  $p_j \in \bigcup_{i=1, i \neq j}^n \Sigma_c(p_i)$ ، آنگاه  $p_j \in \Sigma_c(p_i)$  برای  $i \neq j$ . در نتیجه  $L_j = \langle p_j \rangle \subset L_i = \langle p_i \rangle$  و  $L_j \neq L_i$  که با ماکزیمال بودن  $L_j$  در تناقض است. در نتیجه  $p_j \notin \bigcup_{i=1, i \neq j}^n \Sigma_c(p_i)$ . بنابراین  $\tilde{F}^* \neq M$ .

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدلی برای ساختن زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال با آستانه  $c$  از یک اتوماتای فازی عمومی فعال بیان شد. در ابتدا زیر اتوماتاهای با آستانه  $c$  از یک اتوماتای فازی عمومی فعال و مولد از یک اتوماتای فازی عمومی فعال

تعریف شد و ارتباطات بین آنها بررسی شد و در ادامه زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال با آستانه C از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف شد و ثابت شد که هر اتوماتای فازی عمومی فعال را می توان به صورت اجتماعی از زیر اتوماتاهای متمایز اولیه و ماکزیمال با آستانه C نوشت.

## References

1. Wee, W.G., "On generalization of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification", Ph.D. dissertation Purdue University, IN (1967).
2. Doostfateme, M., Kremer, S.C., "New directions in fuzzy automata", International Journal of Approximate Reasoning, 38 (2005) 175-214.
3. Horry, M., Zahedi, M.M., "Fuzzy subautomata of an invertible general fuzzy automaton", Annals of fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy systems, 2 (2013) 29-47.
4. Jine, J., Li, Q., Li, Y., "Algebraic properties of L-fuzzy finite automata", Information Sciences, 234 (2013) 191-208.
5. Mordeson, J.N., Malik, D.S., "Fuzzy automata and languages, theory and applications", London: Chapman and Hall (2002).
6. Zahedi, M.M., Horry M. and Abolpor, KH., "Bifuzzy (General) topology on max-min general fuzzy automata", Advanced in Fuzzy Mathematics, 3 (2008) 51-68.
7. Omlin, W., Giles, K. K., Thornber, K. K., "Equivalence in knowledge representation: automata, rnns, and dynamic fuzzy systems", Proc. IEEE, 87(9) (1999) 1623-1640.
8. Omlin, W., Giles, K. K., Thornber, K. K., "Fuzzy finite-state automata can be deterministically encoded into recurrent neural networks", IEEE Trans. Fuzzy Syst. 5(1)(1998) 76-89.
9. Malik, D. S., Mordeson, J. N., Sen, M. K., "On subsystems of fuzzy finite state machines", Fuzzy Sets and Systems, 68 (1994), 83-92.
10. Mizumoto, M., Tanaka, J., Tanaka, K., "Some consideration on fuzzy automata", J. Compute. Systems Sci. 3 (1969) 409-422.