Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Orbit space of cohomogeneity two actions on Riemannian manifolds of constant negative curvature

Reza Mirzaie[1], Majid Heidarpour[2]

1. Department of Pure Mathematics, Faculty of Science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.
   E-mail: r.mirzaei@sci.ikiu.ac.ir
2. Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Zanjan, Iran.
   E-mail: heydarpour@znu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
29 June 2020
Received in revised form:
26 April 2021
Accepted:
3 August 2021
Published online:
20 June 2023

Keywords:
Manifold,
Orbit space,
Lie group,
Cohomogeneity,
Curvature.

ABSTRACT

Introduction

Let G be a Lie group with a differentiable action on a differentiable manifold M. Consider the orbit space $\frac{M}{G}$ with the quotient topology. Dimension of $\frac{M}{G}$ is called the cohomogeneity of the action of G on M. Study of the orbit spaces has many important applications in invariant function theory and G-invariant variational problems associated to M. Many G-invariant objects associated to M can be related to similar objects associated to the orbit space. Therefore, if the dimension of the orbit space is small enough (the cohomgeneity of the action of G on M is small) we can effectively reduce many problems about G-invariant objects of M to generally easier problems on $\frac{M}{G}$. Because of this motivation, many mathematicians studied topological properties of the orbit spaces of Lie group actions on manifolds. A pioneer theorem in this area is a theorem proved by P. Mostert in 1957:

If M is a differentiable manifold which is of cohomogeneity one under the action of G a compact connected Lie group, then the orbit space is homeomorphic to one of the spaces [0,1], (0,1] , S^1 or R.

This theorem has been generalized to noncompact Lie groups with proper actions on manifolds. Moreover, If M is endowed with a Riemannian metric, and G is a closed and connected subgroup of the isometries of M, which acts by cohomogeneity one on M, there are more interesting results about the orbit space and orbits. It is proved that if M is a Riemannian manifold of negative curvature and G is a connected and closed subgroup of the isometries of M, acting on M with cohomogeneity one, then the orbit space is not homeomorphic to [0,1], so by (generalized) Mostert's

theorem, it would be homeomorphic to [0,1) or S^1 or R, and if in addition, M is simply connected then the orbit space is homeomorphic to [0,1) or R. This result, has been generalized to flat Riemannian manifolds, and recently it is proved for Riemannian manifolds of non-positive curvature. To extend Mostert's theorem, it is natural to ask, what may be the orbit space, when M is a cohomogeneity two G-manifold. There is no classification for orbit spaces of cohomogeneity two G-manifolds in general. Cohomogeneity two actions of compact Lie groups on Euclidean spaces are polar an all such actions are classified. It is clear in this case that the orbit space is homeomorphic to plane or half-plane. Also, It is proved that if G is a connected (compact or non-compact) group of the isometries which acts by cohomogeneity two on R^n, then the orbit space is homeomorphic to plane or half-plane. Classification of orbit spaces of cohomogeneity two actions on the standard sphere S^n has been described in a series of papers . Also, the orbit space of cohomogeneity two actions on simply connected spaces of constant curvature (hyperbolic spaces) has been classified before. To extend this classification to all Riemannian manifolds of constant positive curvature, we prove the following theorem:

Theorem. *If M is a coghomogeneity two Riemannian G-manifold of constant negative curvature, then the orbit space* $\frac{M}{G}$ *is homeomorphic to one of the following spaces:*

$$R \times S^1,\ R^2,\ R \times [0, \infty).$$

How to cite: Mirzaie, R., Heidarpour, M. (2023). Orbit space of cohomogeneity two actions on Riemannian manifolds of constant negative curvature. *Mathematical Researches*, 9 (1), 189-199.

 Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/
Kharazmi University

فضای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو روی خمینه‌های ریمانی با انحنای ثابت منفی

رضا میرزایی[1]✉، مجید حیدرپور[2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، قزوین، ایران. رایانامه: r.mirzaei@sci.ikiu.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: heydarpour@znu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۰۹
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۰۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

در این مقاله فضاهای مداری عمل‌های طولپای با نقص همگنی دو روی خمینه‌های ریمانی با انحنای ثابت منفی را رده‌بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی:
خمینه،
فضای مداری،
گروه لی،
نقص همگنی،
انحنا.

استناد: میرزایی، رضا؛ حیدرپور، مجید؛ (۱۴۰۲). فضای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو روی خمینه‌های ریمانی با انحنای ثابت منفی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۱)، ۱۹۹-۱۸۹.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

$G \times M \to M$، عمل هموار گروه لی G روی خمینه هموار M و M/G فضای مداری آن با توپولوژی خارج قسمتی را در نظر می‌گیریم. بعد M/G را نقص همگنی عمل G روی M می‌نامند.

بررسی چنین فضاهای مداری در نظریهٔ توابع ناوردا و مسائل متغیرهای $G-$ ناوردای مربوط به خمینه M کاربردهای مهم بسیار زیادی دارد. در واقع می‌توان عناصر زیادی از $G-$ ناورداهای مربوط به خمینه M را به عناصر مشابه آنها روی فضای مداری مرتبط نمود. پس، در صورتی که بعد فضای مداری به قدر کافی کوچک باشد (نقص همگنی عمل G روی M کوچک باشد)، می‌توان بسیاری از مسائل مربوط به عناصر $G-$ ناوردای خمینه M را به مسائل به طور معمول ساده‌تری روی M/G به طور مؤثری کاهش داد.

با همین انگیزه، بسیاری از ریاضیدانان، خواص توپولوژیکی فضاهای مداری عمل گروه‌های لی روی خمینه‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌اند. یکی از قضایای پیشرو در این زمینه قضیهٔ زیر از موستارت[1] در سال ۱۹۵۷ ([۱۴]) می‌باشد:

اگر M یک خمینه هموار بوده تحت عمل گروه لی فشرده و همبند G و از نقص همگنی یک باشد، آن‌گاه فضای مداری M/G با یکی از فضاهای زیر همسانریخت[2] است:

$$\mathbb{R}, [0,1], (0,1], S^1 .$$

این قضیهٔ به عمل گروه‌های لی غیر فشرده روی خمینه‌ها نیز تعمیم داده شده است. به علاوه، اگر M به یک متریک ریمانی مجهز شده باشد و G نیز زیر گروه بسته و همبند از گروه طولپاهای M باشد که با نقص همگنی یک روی M عمل می‌کند آن‌گاه نتایج جالب توجه بیشتری از فضای مداری و مدارها حاصل می‌شود ([۱۲]، [۱۴]، [۱۶] و [۱۷]).

در [۱۶] ثابت شده است که هرگاه M خمینه‌ای ریمانی با انحنای منفی و G یک زیرگروه بسته و همبند از گروه طولپاهای M باشد که با نقص همگنی یک روی M عمل می‌کند، آن‌گاه فضای مداری M/G با $[0,1]$ یا $\mathbb{R}$ همسان‌ریخت است. این نتیجه در [۱۲] به خمینه‌های ریمانی تخت تعمیم یافته و اخیراً نیز برای خمینه‌های ریمانی با انحنای نامثبت ثابت شده است.

برای تعمیم قضیهٔ موستارت یک سوال طبیعی این ست که اگر M یک $G-$ خمینه با نقص همگنی دو باشد، آن‌گاه در مورد فضای مداری M/G چه می‌توان گفت. در حالت کلی هیچ رده‌بندی برای فضای مداری $G-$ خمینه‌های با نقص همگنی دو وجود ندارد. البته می‌دانیم که عمل‌های با نقص همگنی دو توسط گروه‌های لی فشرده روی فضاهای اقلیدسی قطبی[3] می‌باشند و چنین عمل‌هایی رده‌بندی شده‌اند ([۱۵]) و واضح است که در این حالت فضای مداری با صفحه یا نیم‌صفحه همسان‌ریخت است.

[1] Mostert
[2] Homeomorphic
[3] Polar

همچنین در [۱۰] ثابت شده است که اگر G زیرگروهی همبند (فشرده یا غیر فشرده) از طولپاهای $\mathbb{R}^n$ باشد که با نقص همگنی دو روی $\mathbb{R}^n$ عمل می‌کند آن‌گاه فضای مداری $\mathbb{R}^n/G$ با صفحه یا نیم‌صفحه همسان‌ریخت است. فضاهای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو روی کره استاندارد S^n نیز در [۱۸] و [۱۹] توصیف شده اند. در [۱۳] فضاهای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو روی خمینه‌های تخت مشخص شده‌اند.

فضاهای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو روی فضاهای همبند ساده با انحنای ثابت (فضاهای هذلولوی) در [۱۱] رده‌بندی شده اند. در ادامه کارهای انجام شده، نتیجه اصلی مقاله حاضر (قضیهٔ ۷)، رده‌بندی فضاهای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو روی خمینه‌های ریمانی با انحنای ثابت منفی (همبند ساده و غیرهمبند ساده) را تکمیل می‌کند.

نتایج

در ادامه همواره M را خمینه ریمانی و G را نیز زیرگروه بسته و همبند از گروه طولپاهای M در نظر می‌گیریم. برای هرعضو M مانند x مجموعه

$$G(x) = \{ gx \mid g \in G\}.$$

را $G-$ مدار x می‌نامیم و مجموعه

$$\frac{M}{G} = \{G(x) \mid x \in M \}.$$

را به توپولوژی خارج قسمتی مجهز می‌کنیم به طوری که نگاشت خارج قسمتی $\pi: M \to M/G$ پیوسته و باز باشد. $dim M/G$ که مساوی نقص بعد مدارهای با بزرگترین بعد است را نقص همگنی عمل G روی M نامیده و با $Coh(M,G)$ نمایش می‌دهیم. اگر

$$M^G = \{x \in M \mid G(x) = \{x\} \}$$

مجموعه نقاط ثابت عمل G روی M، ناتهی باشد، آن‌گاه زیرخمینه‌ای کلاً ژئودزیک از M است. از حکم زیر در اثبات قضیهٔ اصلی استفاده خواهیم نمود.

لم ۱ ([۹]): *اگر G یک زیرگروه بسته و همبند از گروه طولپاهای خمینه ریمانی M باشد، آن‌گاه داریم*

$$dim M^G < Coh(M,G).$$

تبصرهٔ ۲ ([۲]): فرض کنید $\widetilde{M}$ خمینه ریمانی پوشش عام خمینه ریمانی M و $\mathcal{K}: \widetilde{M} \to M$ نگاشت پوششی با گروه تبدیلات پوششی Δ باشد. در این صورت گروه لی پوششی همبند مانند $\tilde{G}$ برای G وجود دارد به طوری‌که $\tilde{G}$ روی $\widetilde{M}$ به طور طولپایی عمل می‌کند و

$$Coh(\widetilde{M},\tilde{G}) = Coh(M,G).$$

اعضای Δ با اعضای $\tilde{G}$ جابه‌جا می‌شوند. بنابراین $\mathcal{K}$هر $\tilde{G}$–مدار را بروی $\tilde{G}$– مدار می‌نگارد و داریم

$$\mathcal{K}^{-1}(M^G) = \widetilde{M}^{\tilde{G}}.$$

تبصرهٔ ۳ ([۳]): فرض کنید در تبصرهٔ ۲، $\widetilde{M}^{\tilde{G}} \neq \emptyset$ و $dim\widetilde{M}^{\tilde{G}} = 0$. چون $\tilde{G}$ همبند است پس $\widetilde{M}^{\tilde{G}}$ باید مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد. حال، از این حقیقت که اعضای گروه تبدیلات پوششی $\mathcal{K}: \widetilde{M} \to M$ نقاط ثابت $\tilde{G}$ را به نقاط ثابت می‌نگارند، نتیجه می‌گیریم که گروه تبدیلات پوششی بدیهی بوده و M همبند ساده است.

برای تعاریف و جزئیات دربارهٔ نقاط بی نهایت M یعنی $M(\infty)$ برای یک خمینه ریمانی همبند ساده با انحنای منفی، ابرکره‌ها[4]و کلاس‌های مجانبی ژئودزیک و انواع ژئودزیک (محوری، سهموی و هذلولوی) به [۱] و [۷] ارجاع می‌دهیم. همچنین فضای هذلولوی n بعدی را نیز با H^n یا به طور ساده با H نمایش خواهیم داد.

قضیهٔ ۴([۴]): اگر G زیرگروهی بسته و همبند از گروه طولپاهای H^n باشد، آن‌گاه یکی از گزاره‌های زیر درست است

الف) $H^G \neq \emptyset$.

ب) مداری یکتا و نابدیهی وجود دارد که کلاً ژئودزیک است.

پ) تمام مدارها مشمول در ابرکره‌هایی با مرکز مشترک در بی‌نهایت‌اند.

تبصرهٔ ۵: اگر M یک G- خمینه ریمانی جهت‌پذیر تخت و با نقص همگنی یک باشد، آن‌گاه M/G با یکی از فضاهای زیرهمسانریخت است

$$\mathbb{R}, [0,\infty), S^1.$$

قضیهٔ ۶([۱۱]): اگر G زیرگروهی بسته و همبند از گروه طولپاهای H^n باشد که $n \geq 3$ و $Coh(M,G) = 2$، آن‌گاه H^n/G با $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ یا $\mathbb{R}^2$ همسان‌ریخت است.

قضیهٔ ۷: فرض کنید $n \geq 3$ و M^n یک G- خمینه ریمانی با انحنای ثابت منفی و نقص همگنی دو باشد. در این صورت فضای مداری M/G با یکی از فضاهای زیرهمسان‌ریخت است

$$\mathbb{R} \times [0,\infty)\,, \mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^2.$$

اثبات: از علامت (=) علاوه بر تساوی، برای نشان دادن همسان‌ریختی فضاهای توپولوژیک نیز استفاده می‌کنیم. بدون کاستن از کلیت، انحنای M را منفی یک و خمینه پوششی عام آن را نیز H^n فرض می‌کنیم. همچنین با به کارگیری نمادهای تبصره ۲، $\tilde{G}$ را گروه پوششی G در نظر می‌گیریم که با نقص همگنی دو روی H^n عمل می کند و حالات (الف)، (ب) و (پ) در قضیهٔ ۴، را برای عمل $\tilde{G}$ روی H^n مورد توجه قرار می‌دهیم.

---

[4] Horosphere

الف) چون $H^{\tilde{G}} \neq \emptyset$، بنا به لم ۱، 1 یا $dimH^{\tilde{G}} = 0$. در وضعیت $dimH^{\tilde{G}} = 0$، بنا به تبصرهٔ ۳، $H^n = M$ و حکم از قضیهٔ ۶، نتیجه می‌شود. در صورتی که $dimH^{\tilde{G}} = 1$، قرار می‌دهیم $F = H^{\tilde{G}}$. مجموعه نقاط ثابت عمل زیرگروه بسته و همبند از طولپاها روی خمینه ریمانی زیر خمینه‌ای کلاً ژئودزیک است. بنابراین F در H^n کلاً ژئودزیک است. لذا تصویر یک ژئودزیک مانند γ در H^n است. اگر $\delta \in \Delta, x \in F$ و $g \in \tilde{G}$، آن‌گاه از این حقیقت که اعضای Δ و $\tilde{G}$ جابه‌جا می‌شوند داریم

$$\delta(x) = \delta(gx) = g\delta(x).$$

پس $\delta(x) \in F$، و این یعنی $\delta(F) = F$. حال نگاشت نمایی

$$exp: T_pH^n \to H^n$$

که یک وابرسانی[5] است ([۵]) را در نظر بگیرید و برای $p \in F$ قرار می‌دهیم:

$$W_p = \exp(T_p^{\perp}F).$$

در این‌صورت W_p یک زیر خمینه H^n است. چون برای هر $g \in \tilde{G}$، نگاشت $g: \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ ، نگاشت همانی است، پس $g: T_p\mathrm{F} \to T_p\mathrm{F}$ نیز همانی است و $gW_p = W_p$، یعنی $\tilde{G}W_p = W_p$.

اکنون فرض کنیم $\delta \in \Delta$ و قرار دهید $q = \delta(p)$. چون $\delta(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$، پس $q \in F$ و $d\delta(T_p\mathrm{F}) = T_q\mathrm{F}$ و در نتیجه $\delta(W_p) = W_p$. با ثابت گرفتن p، برای هر $q \in F$ ، $\delta(= \delta_q) \in \Delta$ یکتایی وجود دارد به طوریکه $\delta_q(p) = q$ و برای هر $x \in H^n$ نیز $q = q(x) \in F$ یکتایی وجود دارد به طوری‌که $x \in W_{q(x)}$. بنابر این نگاشت

$$\frac{H^n}{\tilde{G}} \to F \times \frac{W_p}{\tilde{G}}$$
$$\tilde{G}(x) \to (q(x), \tilde{G}\left(\delta_q^{-1}(x)\right))$$

یک همسان‌ریختی است. W_p یک $\tilde{G}-$خمینه با نقص همگنی یک است که عمل $\tilde{G}$ روی آن نقطهٔ ثابت یکتا ($p =$) دارد. برای هر $x \in W_p$ متمایز از p، مدار $\tilde{G}(x)$ یک کره در W_p با مرکز p و شعاع $r = d(p, x)$ است.

بنابراین نگاشت زیر یک همسان‌ریختی است:

$$\frac{W_p}{\tilde{G}} \to [0, \infty)$$
$$\tilde{G}(x) \to d(p, x)$$

---
[5] Diffeomorphism

پس داریم:

$$.\frac{H^n}{\tilde{G}} = F \times \frac{W_p}{\tilde{G}} = F \times [0,\infty)$$

قرار دهید $\Omega = \frac{M}{G}$ و $\tilde{\Omega} = \frac{H^n}{G}$. Δ روی فضای مداری $\tilde{\Omega}$ به طور آزاد و به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\delta\tilde{G}(x) = \tilde{G}(\delta x), \delta \in \Delta\,, x \in H^n \qquad (*)$$

به راحتی نشان داده می‌شود که عمل $(*)$ خوش‌تعریف است. در واقع، اگر $y \in \tilde{G}(x)$ ، آن‌گاه برای یک $g \in \tilde{G}$، $y = gx$. اعضای Δ با اعضای $\tilde{G}$ جابه‌جا می‌شوند، پس $\delta g = g\delta$. بنابراین داریم:

$$\delta\tilde{G}(y) = \tilde{G}(\delta y) = \tilde{G}(\delta g x) = \tilde{G}(g\delta x) = \tilde{G}(\delta x) = \delta\tilde{G}(x)$$

حال نشان دادن $\Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{\Delta}$ ساده است. چون $\Delta(\gamma) = \gamma$ پس $\Delta = \mathbb{Z}$ ([۵]) و در صورتی که $\tilde{\Omega}$ را با همسان‌ریخت اش $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ تعویض کنیم، می‌توانیم نشان دهیم که عمل Δ روی $\tilde{\Omega}$ با عمل زیر از $\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ جایگزین می‌شود:

$$.\,\delta(a,b) = (a+b,b)\,, \delta \in \mathbb{Z}\,, (a,b) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$$

بنابراین،

$$.\,\Omega = \frac{\mathbb{R}}{\Delta} \times [0,\infty) = S^1 \times [0,\infty)$$

ب) فرض کنیم P تنها $\tilde{G}$– مدار کلاً ژئودزیک در H^n باشد. چون اعضای Δ و $\tilde{G}$ جابه‌جا میشوند، پس برای هر δ در Δ، $\Delta(\mathrm{P})$ نیز یک $\tilde{G}$- مدار کلاً ژئودزیک است. بنابراین از یکتایی P نتیجه می‌شود که $\delta(\mathrm{P}) = P$ و $\Delta(\mathrm{P}) = P$. قرار دهید $E = \mathcal{K}(\mathrm{P})$. E در M کلا ژئودزیک بوده و در نتیجه انحنای ثابت منفی دارد. با توجه به این‌که E همگن با انحنای منفی است پس بنا به قضیهٔ کوبایاشی ([۶]) همبند ساده می‌باشد. پس Δ بدیهی است و این نیز به معنی همبند ساده بودن M ($M = \mathrm{H}^n$) است پس نتیجه از قضیهٔ ۶، حاصل می‌شود.

پ) نقطه z در $\mathrm{H}^n(\infty)$ را طوری در نظر بگیرید که همهٔ $\tilde{G}$– مدارها مشمول در ابرکره‌های به مرکز z و S نیز یکی از این ابرکره‌ها باشد. نشان می‌دهیم $\Delta(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$.

فرض کنید δ در Δ و $\delta(S) \neq \mathrm{S}$. اگر ژئودزیکی مانند γ وجود داشته باشد که $\delta(\gamma) = \gamma$ (γ محوری باشد) آن‌گاه بنا به گزارهٔ ۳ قسمت ۴،۲ در [۱]، γ یکتاست و چون برای هر g در $\tilde{G}$، $g\delta = \delta g$، پس $\delta(g\gamma) = g\gamma$ و به دلیل یکتایی محور $g\gamma = \gamma$. پس $\tilde{G}(\gamma) = \gamma$. لذا γ باید در یک $\tilde{G}$– مدار مشمول و نتیجتاً مشمول در یک ابرکره باشد. ولی این در

تناقض با این واقعیت است که هیچ ژئودزیکی در H^n در یک ابرکره جای ندارد. بنابراین هیچ عضو Δ محوری نبوده و باید همه سهموی باشند و این بنا به لم ۳ در [۳] نتیجه می‌دهد $\Delta(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$.

اکنون به دلیل وابرسان بودن H^n با $\mathbb{R} \times \mathrm{S}$، می توان دید که برای $N = \frac{S}{\Delta}$، M با $\mathbb{R} \times N$ وابرسان است. حال چون $\tilde{G}(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$، پس $G(\mathrm{N}) = \mathrm{N}$ و $\frac{\mathrm{M}}{G}$ با $\mathbb{R} \times \frac{N}{G}$ همسان‌ریخت است.

ابرکره های H^n تحت متریک القائی تخت می‌باشند. بنابراینN نیز یک $G-$ خمینه تخت با نقص همگنی یک است. نشان می‌دهیم N جهت‌پذیر است. گردایه همه ژئودزیک های با سرعت واحد γ در کلاس مجانبی $z = [\gamma]$ را در نظر بگیرید. بدون کاستن از کلیت فرض کنید برای همه γها، $\gamma(0) \in S$. در این صورت گردایه همهٔ بردارهای $\gamma'(0)$ یک میدان برداری نرمال روی S تعریف می‌کنند و چون برای هر δ در Δ ، $\delta[\gamma] = [\gamma]$ و $\delta(S) = \mathrm{S}$، پس گردایه بردارهای $d\mathcal{K}(\gamma'(0))$ نیز یک میدان برداری نرمال در امتداد N هستند. این یعنی N جهت‌پذیر است.

بنابراین مطابق تبصرهٔ ۵، $\frac{N}{G}$ با یکی از فضایای زیر همسان‌ریخت است

$$\mathbb{R}, [0, \infty), S^1$$

بنابراین $\frac{M}{G}$ نیز با یکی از فضاهای زیر همسانریخت است

$$\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R} \times S^1 .$$

و این اثبات قضیه را تمام می کند.

مثال: در این مثال نشان می‌دهیم که فضاهای مداری اشاره شده در قضیهٔ ۷، در واقع می‌توانند ظاهر شوند. مثال‌هایی از خمینه‌های ریمانی با انحنای ثابت منفی و نقص همگنی یک وجود دارند به طوری که فضای مداری آنها با یکی از فضاهای $\mathbb{R}$ ، $[0, \infty)$ یا S^1 همسان‌ریخت است ([۱۶]).

اگر F یک خمینه ریمانی با انحنای ثابت $c \leq 0$ باشد، آن‌گاه تابعی مانند f روی $\mathbb{R}$ وجود دارد که خمینه حاصلضربی پیچیده[6] $M = \mathbb{R}_f \times F$ با انحنای ثابت منفی باشد ([۱]). اگر K زیر گروه همبند و بسته‌ای از گروه طولپاهای F و I نیز نگاشت همانی روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{G} = \{\mathrm{I}\} \times \mathrm{K}$ زیر گروه همبند و بسته از طولپاهای M است.

اکنون فرض کنید K با نقص همگنی یک روی F عمل کند. در این صورت G نیز با نقص همگنی دو روی M عمل می‌کند. بنابراین، اگر موارد مناسبی از K و F به طور مناسب انتخاب شوند آن‌گاه $\frac{M}{G}$ با یکی از موارد اشاره شده در قضیهٔ ۷، می‌تواند همسان‌ریخت باشد.

[6] Warped product

References

1. Bishop R. L., O’Neil B., "Manifolds of negative curvature", Trans. Amer. Math. Soc., 145 (1969) 1-49.

2. Bredon G. E., "Introduction to compact transformation groups", Acad. Press, New York, London 1972.

3. Byers W., "Isometry group of Riemannian manifolds of negative curvature", Proceeding of the Amer. Math. Soc., 45 (1976) 281-285.

4. Di Scala A. J., Olmos C., "The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space", Math. Z., 237 (2001) 199-209.

5. Do Carmo M. P., "Riemannian Geometry", Brikhhauser, Boston, Basel, Berlin, 1992.

6. Kobayashi S., "Homogeneous Riemannian manifolds of negative curvature", Tohoku Math. J., 14 (1962) 413-415.

7. Eberlin P., O’Neil B., "Visibility manifolds", Pasific J. Math., 46, 1 (1973) 45-109.

8. Michor P. W., "Isometric actions of Lie groups and invariants", Lecture course at the university of Vienna 1996/97.

9. Mirzaie R., "On orbits of isometric actions on flat Riemannian manifolds", Kyushu J. Math., 65 (2011) 383-393.

10. Mirzaie R., "On Euclidean G-manifolds which have two dimensional orbit spaces", International J. Math., 22, 3 (2011) 399-406.

11. Mirzaie R., Heidari M., "Orbit spaces arising from isometric actions on hyperbolic spaces", Mathematical researches, 3(2), (2018) 147-154.

12. Mirzaie R., Kashani S. M. B., "On cohomogeneity one flat Riemannian manifolds", Glasgw Math. J., 44 (2002) 185-190.

13. Mirzaie R., " Orbit space of cohomogeneity two flat Riemannian manifolds", Balkan Journal of Geometry and its Applications 23(2), (2018) 25-33.

14. Mostert P., "On a compact Lie group action on manifolds", Ann. Math., 65 (1957) 447.

15. Palais R. S., Terrg CH. L., "A general theory of canonical forms", Trans. Am. Math. Soc., 300 (1987) 771-789.

16. Podesta F., Spiro A., "Some topological properties of cohomogeneity one manifolds with negative curvature" Ann. Global. Anal. Geom., 14 (1966) 69-79.

17. Searle C., "Cohomogeneity and positive curvature in low dimensions", Math. Z., 214 (1993) 491-498.

18. Straume E., "Compact connected Lie transformation groups on spheres with low cohomogeneity. I", Memoris of the AMS, Vol. 119, 569 (1996).

19. Straume E., "Compact connected Lie transformation groups on spheres with low cohomogeneity. II", Memoirs of the AMS, Vol. 125, 595 (1997).