



Kharazmi University

# Orbit space of cohomogeneity two actions on Riemannian manifolds of constant negative curvature

Reza Mirzaei<sup>1</sup>  , Majid Heidarpour<sup>2</sup> 

1. Department of Pure Mathematics, Faculty of Science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.

E-mail: [r.mirzaei@sci.ikiu.ac.ir](mailto:r.mirzaei@sci.ikiu.ac.ir)

2. Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Zanjan, Iran.

 E-mail: [heydarpour@znu.ac.ir](mailto:heydarpour@znu.ac.ir)

---

## Article Info

---

## ABSTRACT

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:

29 June 2020

Received in revised form:

26 April 2021

Accepted:

3 August 2021

Published online:

20 June 2023

### Keywords:

Manifold,  
Orbit space,  
Lie group,  
Cohomogeneity,  
Curvature.

### Introduction

Let  $G$  be a Lie group with a differentiable action on a differentiable manifold  $M$ . Consider the orbit space  $\frac{M}{G}$  with the quotient topology.

Dimension of  $\frac{M}{G}$  is called the cohomogeneity of the action of  $G$  on  $M$ .

Study of the orbit spaces has many important applications in invariant function theory and  $G$ -invariant variational problems associated to  $M$ .

Many  $G$ -invariant objects associated to  $M$  can be related to similar objects associated to the orbit space. Therefore, if the dimension of the orbit space is small enough (the cohomogeneity of the action of  $G$  on  $M$  is small) we can effectively reduce many problems about  $G$ -invariant objects of  $M$  to generally easier problems on  $\frac{M}{G}$ .

Because of this motivation, many mathematicians studied topological properties of the orbit spaces of Lie group actions on manifolds.

A pioneer theorem in this area is a theorem proved by P. Mostert in 1957:

*If  $M$  is a differentiable manifold which is of cohomogeneity one under the action of  $G$  a compact connected Lie group, then the orbit space is homeomorphic to one of the spaces  $[0,1]$ ,  $(0,1)$ ,  $S^1$  or  $R$ .*

This theorem has been generalized to noncompact Lie groups with proper actions on manifolds. Moreover, If  $M$  is endowed with a Riemannian metric, and  $G$  is a closed and connected subgroup of the isometries of  $M$ , which acts by cohomogeneity one on  $M$ , there are more interesting results about the orbit space and orbits. It is proved that if  $M$  is a Riemannian manifold of negative curvature and  $G$  is a connected and closed subgroup of the isometries of  $M$ , acting on  $M$  with cohomogeneity one, then the orbit space is not homeomorphic to  $[0,1]$ , so by (generalized) Mostert's

---

---

theorem, it would be homeomorphic to  $[0,1)$  or  $S^1$  or  $\mathbb{R}$ , and if in addition,  $M$  is simply connected then the orbit space is homeomorphic to  $[0,1)$  or  $\mathbb{R}$ . This result, has been generalized to flat Riemannian manifolds, and recently it is proved for Riemannian manifolds of non-positive curvature. To extend Mostert's theorem, it is natural to ask, what may be the orbit space, when  $M$  is a cohomogeneity two  $G$ -manifold. There is no classification for orbit spaces of cohomogeneity two  $G$ -manifolds in general. Cohomogeneity two actions of compact Lie groups on Euclidean spaces are polar and all such actions are classified. It is clear in this case that the orbit space is homeomorphic to plane or half-plane. Also, It is proved that if  $G$  is a connected (compact or non-compact) group of the isometries which acts by cohomogeneity two on  $\mathbb{R}^n$ , then the orbit space is homeomorphic to plane or half-plane. Classification of orbit spaces of cohomogeneity two actions on the standard sphere  $S^n$  has been described in a series of papers. Also, the orbit space of cohomogeneity two actions on simply connected spaces of constant curvature (hyperbolic spaces) has been classified before. To extend this classification to all Riemannian manifolds of constant positive curvature, we prove the following theorem:

**Theorem.** *If  $M$  is a cohomogeneity two Riemannian  $G$ -manifold of constant negative curvature, then the orbit space  $\frac{M}{G}$  is homeomorphic to one of the following spaces:*

$$\mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

---

**How to cite:** Mirzaie, R., Heidarpour, M. (2023). Orbit space of cohomogeneity two actions on Riemannian manifolds of constant negative curvature. *Mathematical Researches*, 9 (1), 189-199.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---



Kharazmi University

## فضای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو روی خمینه‌های ریمانی با انحنا ثابت منفی

رضا میرزایی<sup>۱</sup>، مجید حیدرپور<sup>۲</sup>

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، قزوین، ایران. [r.mirzaei@sci.ikiu.ac.ir](mailto:r.mirzaei@sci.ikiu.ac.ir)

۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران. [heydarpour@znu.ac.ir](mailto:heydarpour@znu.ac.ir)

چکیده	اطلاعات مقاله
	نوع مقاله: مقاله پژوهشی
	تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۰۹
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۰۶
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۲
	تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰
در این مقاله فضاهای مداری عمل‌های طولپای با نقص همگنی دو روی خمینه‌های ریمانی با انحنا ثابت منفی را رده‌بندی می‌کنیم.	واژه‌های کلیدی: خمینه، فضای مداری، گروه لی، نقص همگنی، انحنا.
	استناد: میرزایی، رضا؛ حیدرپور، مجید؛ (۱۴۰۲). فضای مداری عمل‌های با نقص همگنی دو روی خمینه‌های ریمانی با انحنا ثابت منفی. پژوهش‌های ریاضی، ۹(۱)، ۱۸۹-۱۹۹.
	ناشر: دانشگاه خوارزمی



© نویسندگان.

## مقدمه

$G \times M \rightarrow M$ ، عمل هموار گروه لی  $G$  روی خمینه هموار  $M$  و فضای مداری آن با توپولوژی خارج قسمتی را در نظر می‌گیریم. بعد  $M/G$  را نقص همگنی عمل  $G$  روی  $M$  می‌نامند. بررسی چنین فضاهای مداری در نظریهٔ توابع ناوردا و مسائل متغیرهای  $G$ -ناوردای مربوط به خمینه  $M$  کاربردهای مهم بسیار زیادی دارد. در واقع می‌توان عناصر زیادی از  $G$ -ناوردهای مربوط به خمینه  $M$  را به عناصر مشابه آنها روی فضای مداری مرتبط نمود. پس، در صورتی که بعد فضای مداری به قدر کافی کوچک باشد (نقص همگنی عمل  $G$  روی  $M$  کوچک باشد)، می‌توان بسیاری از مسائل مربوط به عناصر  $G$ -ناوردای خمینه  $M$  را به مسائل به طور معمول ساده‌تری روی  $M/G$  به طور مؤثری کاهش داد.

با همین انگیزه، بسیاری از ریاضیدانان، خواص توپولوژیکی فضاهای مداری عمل گروه‌های لی روی خمینه‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌اند. یکی از قضایای پیشرو در این زمینه قضیهٔ زیر از موستارت در سال ۱۹۵۷ ([۱۴]) می‌باشد:

اگر  $M$  یک خمینه هموار بوده تحت عمل گروه لی فشرده و همبند  $G$  و از نقص همگنی یک باشد، آن‌گاه فضای مداری  $M/G$  با یکی از فضاهای زیر همسانریخت است:

$$\mathbb{R}, [0,1], (0,1), S^1.$$

این قضیهٔ به عمل گروه‌های لی غیر فشرده روی خمینه‌ها نیز تعمیم داده شده است. به علاوه، اگر  $M$  به یک متریک ریمانی مجهز شده باشد و  $G$  نیز زیر گروه بسته و همبند از گروه طولپاهای  $M$  باشد که با نقص همگنی یک روی  $M$  عمل می‌کند آن‌گاه نتایج جالب توجه بیشتری از فضای مداری و مدارها حاصل می‌شود ([۱۲]، [۱۴]، [۱۶] و [۱۷]).

در [۱۶] ثابت شده است که هرگاه  $M$  خمینه‌ای ریمانی با انحنا منفی و  $G$  یک زیرگروه بسته و همبند از گروه طولپاهای  $M$  باشد که با نقص همگنی یک روی  $M$  عمل می‌کند، آن‌گاه فضای مداری  $M/G$  با  $[0,1]$  یا  $\mathbb{R}$  همسانریخت است. این نتیجه در [۱۲] به خمینه‌های ریمانی تخت تعمیم یافته و اخیراً نیز برای خمینه‌های ریمانی با انحنا نامثبت ثابت شده است.

برای تعمیم قضیهٔ موستارت یک سوال طبیعی این است که اگر  $M$  یک  $G$ -خمینه با نقص همگنی دو باشد، آن‌گاه در مورد فضای مداری  $M/G$  چه می‌توان گفت. در حالت کلی هیچ رده‌بندی برای فضای مداری  $G$ -خمینه‌های با نقص همگنی دو وجود ندارد. البته می‌دانیم که عمل‌های با نقص همگنی دو توسط گروه‌های لی فشرده روی فضاهای اقلیدسی قطبی می‌باشند و چنین عمل‌هایی رده‌بندی شده‌اند ([۱۵]) و واضح است که در این حالت فضای مداری با صفحه یا نیم‌صفحه همسانریخت است.

<sup>1</sup> Mostert

<sup>2</sup> Homeomorphic

<sup>3</sup> Polar

همچنین در [۱۰] ثابت شده است که اگر  $G$  زیرگروهی همبند (فشرده یا غیر فشرده) از طولپاهای  $\mathbb{R}^n$  باشد که با نقص همگنی دو روی  $\mathbb{R}^n$  عمل می کند آن گاه فضای مداری  $\mathbb{R}^n/G$  با صفحه یا نیم صفحه همسان ریخت است. فضاهای مداری عمل های با نقص همگنی دو روی کره استاندارد  $S^n$  نیز در [۱۸] و [۱۹] توصیف شده اند. در [۱۳] فضاهای مداری عمل های با نقص همگنی دو روی خمینه های تخت مشخص شده اند.

فضاهای مداری عمل های با نقص همگنی دو روی فضاهای همبند ساده با انحنا ثابت (فضاهای هذلولوی) در [۱۱] رده بندی شده اند. در ادامه کارهای انجام شده، نتیجه اصلی مقاله حاضر (قضیه ۷)، رده بندی فضاهای مداری عمل های با نقص همگنی دو روی خمینه های ریمانی با انحنا ثابت منفی (همبند ساده و غیرهمبند ساده) را تکمیل می کند.

## نتایج

در ادامه همواره  $M$  را خمینه ریمانی و  $G$  را نیز زیرگروه بسته و همبند از گروه طولپاهای  $M$  در نظر می گیریم. برای هر عضو  $M$  مانند  $x$  مجموعه

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

را  $G$ -مدار  $x$  می نامیم و مجموعه

$$\frac{M}{G} = \{G(x) \mid x \in M\}$$

را به توپولوژی خارج قسمتی مجهز می کنیم به طوری که نگاشت خارج قسمتی  $\pi: M \rightarrow M/G$  پیوسته و باز باشد.  $dim M/G$  که مساوی نقص بعد مدارهای با بزرگترین بعد است را نقص همگنی عمل  $G$  روی  $M$  نامیده و با  $Coh(M, G)$  نمایش می دهیم. اگر

$$M^G = \{x \in M \mid G(x) = \{x\}\}$$

مجموعه نقاط ثابت عمل  $G$  روی  $M$ ، ناتهی باشد، آن گاه زیرخمینه ای کلاً ژئودزیک از  $M$  است. از حکم زیر در اثبات قضیه اصلی استفاده خواهیم نمود.

لم ۱ ([۹]): اگر  $G$  یک زیرگروه بسته و همبند از گروه طولپاهای خمینه ریمانی  $M$  باشد، آن گاه داریم

$$dim M^G < Coh(M, G)$$

تبصره ۲ ([۲]): فرض کنید  $\tilde{M}$  خمینه ریمانی پوشش عام خمینه ریمانی  $M$  و  $\mathcal{K}: \tilde{M} \rightarrow M$  نگاشت پوششی با گروه تبدیلات پوششی  $\Delta$  باشد. در این صورت گروه لی پوششی همبند مانند  $\tilde{G}$  برای  $G$  وجود دارد به طوری که  $\tilde{G}$  روی  $\tilde{M}$  به طور طولپایی عمل می کند و

$$Coh(\tilde{M}, \tilde{G}) = Coh(M, G)$$

اعضای  $\Delta$  با اعضای  $\tilde{G}$  جابه‌جا می‌شوند. بنابراین  $\mathcal{K}$  هر  $\tilde{G}$ -مدار را بروی  $\tilde{G}$ -مدار می‌نگارد و داریم

$$\mathcal{K}^{-1}(M^G) = \tilde{M}^{\tilde{G}}$$

**تبصره ۳ ([۳]):** فرض کنید در تبصره ۲،  $\tilde{M}^{\tilde{G}} \neq \emptyset$  و  $\dim \tilde{M}^{\tilde{G}} = 0$  چون  $\tilde{G}$  همبند است پس  $\tilde{M}^{\tilde{G}}$  باید مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد. حال، از این حقیقت که اعضای گروه تبدیلات پوششی  $\mathcal{K}: \tilde{M} \rightarrow M$  نقاط ثابت  $\tilde{G}$  را به نقاط ثابت می‌نگارند، نتیجه می‌گیریم که گروه تبدیلات پوششی بدیهی بوده و  $M$  همبند ساده است.

برای تعاریف و جزئیات درباره نقاط بی‌نهایت  $M$  یعنی  $M(\infty)$  برای یک خمینه ریمانی همبند ساده با انحنا منفی، ابرکره‌ها<sup>۴</sup> و کلاس‌های مجانبی ژئودزیک و انواع ژئودزیک (محوری، سهموی و هذلولوی) به [۱] و [۷] ارجاع می‌دهیم. همچنین فضای هذلولوی  $n$  بعدی را نیز با  $H^n$  یا به طور ساده با  $H$  نمایش خواهیم داد.

**قضیه ۴ ([۴]):** اگر  $G$  زیرگروهی بسته و همبند از گروه طولپاهای  $H^n$  باشد، آن‌گاه یکی از گزاره‌های زیر درست است  
الف)  $H^G \neq \emptyset$ .

ب) مداری یکتا و نابدیهی وجود دارد که کلاً ژئودزیک است.

پ) تمام مدارها مشمول در ابرکره‌هایی با مرکز مشترک در بی‌نهایت‌اند.

**تبصره ۵:** اگر  $M$  یک  $G$ -خمینه ریمانی جهت‌پذیر تخت و با نقص همگنی یک باشد، آن‌گاه  $M/G$  با یکی از فضاهای زیرهمسانریخت است

$$\mathbb{R}, [0, \infty), S^1.$$

**قضیه ۶ ([۱۱]):** اگر  $G$  زیرگروهی بسته و همبند از گروه طولپاهای  $H^n$  باشد که  $n \geq 3$  و  $\text{Coh}(M, G) = 2$ ، آن‌گاه  $H^n/G$  با  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  یا  $\mathbb{R}^2$  همسانریخت است.

**قضیه ۷:** فرض کنید  $n \geq 3$  و  $M^n$  یک  $G$ -خمینه ریمانی با انحنا ثابت منفی و نقص همگنی دو باشد. در این صورت فضای مداری  $M/G$  با یکی از فضاهای زیرهمسانریخت است

$$\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R} \times S^1, \mathbb{R}^2.$$

**اثبات:** از علامت (=) علاوه بر تساوی، برای نشان دادن همسانریختی فضاهای توپولوژیک نیز استفاده می‌کنیم. بدون کاستن از کلیت، انحنا  $M$  را منفی یک و خمینه پوششی عام آن را نیز  $H^n$  فرض می‌کنیم. همچنین با به کارگیری نمادهای تبصره ۲،  $\tilde{G}$  را گروه پوششی  $G$  در نظر می‌گیریم که با نقص همگنی دو روی  $H^n$  عمل می‌کند و حالات (الف)، (ب) و (پ) در قضیه ۴، را برای عمل  $\tilde{G}$  روی  $H^n$  مورد توجه قرار می‌دهیم.

<sup>4</sup> Horosphere

الف) چون  $H^{\tilde{G}} \neq \emptyset$ ، بنا به لم ۱، ۱ یا  $dim H^{\tilde{G}} = 0$  در وضعیت  $dim H^{\tilde{G}} = 0$ ، بنا به تبصره ۳،  $H^n = M$  و حکم از قضیه ۶، نتیجه می‌شود. در صورتی که  $dim H^{\tilde{G}} = 1$ ، قرار می‌دهیم  $F = H^{\tilde{G}}$ . مجموعه نقاط ثابت عمل زیرگروه بسته و همبند از طولی‌ها روی خمینه ریمانی زیر خمینه‌ای کلاً ژئودزیک است. بنابراین  $F$  در  $H^n$  کلاً ژئودزیک است. لذا تصویر یک ژئودزیک مانند  $\gamma$  در  $H^n$  است. اگر  $\delta \in \Delta$ ،  $x \in F$  و  $g \in \tilde{G}$ ، آن‌گاه از این حقیقت که اعضای  $\Delta$  و  $\tilde{G}$  جابه‌جا می‌شوند داریم

$$\delta(x) = \delta(gx) = g\delta(x)$$

پس  $\delta(x) \in F$ ، و این یعنی  $\delta(F) = F$ . حال نگاشت نمایی

$$\exp: T_p H^n \rightarrow H^n$$

که یک واپرسانی<sup>۵</sup> است  $([\Delta])$  را در نظر بگیرید و برای  $p \in F$  قرار می‌دهیم:

$$W_p = \exp(T_p^\perp F)$$

در این صورت  $W_p$  یک زیر خمینه  $H^n$  است. چون برای هر  $g \in \tilde{G}$ ، نگاشت  $g: F \rightarrow F$ ، نگاشت همانی است، پس

$$gW_p = W_p \text{ یعنی } g: T_p F \rightarrow T_p F$$

اکنون فرض کنیم  $\delta \in \Delta$  و قرار دهید  $q = \delta(p)$ . چون  $\delta(F) = F$ ، پس  $q \in F$  و  $d\delta(T_p F) = T_q F$  و در نتیجه

$$\delta(W_p) = W_q \text{ با ثابت گرفتن } p \text{ برای هر } q \in F \text{، } \delta_q (= \delta_q) \in \Delta \text{، یکتایی وجود دارد به طوری که } \delta_q(p) = q \text{ و برای}$$

هر  $x \in H^n$  نیز  $q = q(x) \in F$  یکتایی وجود دارد به طوری که  $x \in W_{q(x)}$ . بنا بر این نگاشت

$$\begin{aligned} \frac{H^n}{\tilde{G}} &\rightarrow F \times \frac{W_p}{\tilde{G}} \\ \tilde{G}(x) &\rightarrow (q(x), \tilde{G}(\delta_q^{-1}(x))) \end{aligned}$$

یک همسان‌ریختی است.  $W_p$  یک  $-\tilde{G}$  خمینه با نقص همگنی یک است که عمل  $\tilde{G}$  روی آن نقطه ثابت یکتا ( $p =$ ) دارد.

برای هر  $x \in W_p$  متمایز از  $p$ ، مدار  $\tilde{G}(x)$  یک کره در  $W_p$  با مرکز  $p$  و شعاع  $r = d(p, x)$  است.

بنابراین نگاشت زیر یک همسان‌ریختی است:

$$\begin{aligned} \frac{W_p}{\tilde{G}} &\rightarrow [0, \infty) \\ \tilde{G}(x) &\rightarrow d(p, x) \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Diffeomorphism

پس داریم:

$$\frac{H^n}{\tilde{G}} = F \times \frac{W_p}{\tilde{G}} = F \times [0, \infty)$$

قرار دهید  $\Omega = \frac{M}{G}$  و  $\tilde{\Omega} = \frac{H^n}{G}$ . روی فضای مداری  $\tilde{\Omega}$  به طور آزاد و به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\delta \tilde{G}(x) = \tilde{G}(\delta x), \delta \in \Delta, x \in H^n \quad (*)$$

به راحتی نشان داده می‌شود که عمل  $(*)$  خوش‌تعریف است. در واقع، اگر  $y \in \tilde{G}(x)$ ، آن‌گاه برای یک  $g \in \tilde{G}$ ،  $y = gx$ . اعضای  $\Delta$  با اعضای  $\tilde{G}$  جابه‌جا می‌شوند، پس  $\delta g = g\delta$ . بنابراین داریم:

$$\delta \tilde{G}(y) = \tilde{G}(\delta y) = \tilde{G}(\delta gx) = \tilde{G}(g\delta x) = \tilde{G}(\delta x) = \delta \tilde{G}(x)$$

حال نشان دادن  $\Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{\Delta}$  ساده است. چون  $\Delta(\gamma) = \mathbb{Z}$  پس  $\Delta = [\Delta]$  و در صورتی که  $\tilde{\Omega}$  را با همسان‌ریخت اش  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  تعویض کنیم، می‌توانیم نشان دهیم که عمل  $\Delta$  روی  $\tilde{\Omega}$  با عمل زیر از  $\mathbb{Z}$  روی  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  جایگزین می‌شود:

$$\delta(a, b) = (a + b, b), \delta \in \mathbb{Z}, (a, b) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$$

بنابراین،

$$\Omega = \frac{\mathbb{R}}{\Delta} \times [0, \infty) = S^1 \times [0, \infty)$$

(ب) فرض کنیم  $P$  تنها  $\tilde{G}$ -مدار کلاً ژئودزیک در  $H^n$  باشد. چون اعضای  $\Delta$  و  $\tilde{G}$  جابه‌جا میشوند، پس برای هر  $\delta$  در  $\Delta$ ،  $\Delta(P)$  نیز یک  $\tilde{G}$ -مدار کلاً ژئودزیک است. بنابراین از یکتایی  $P$  نتیجه می‌شود که  $\delta(P) = P$  و  $\Delta(P) = P$  قرار دهید  $E = \mathcal{K}(P)$ .  $E$  در  $M$  کلاً ژئودزیک بوده و در نتیجه انحنای ثابت منفی دارد. با توجه به این که  $E$  همگن با انحنای منفی است پس بنا به قضیهٔ کوبایاشی ([۶]) همبند ساده می‌باشد. پس  $\Delta$  بدیهی است و این نیز به معنی همبند ساده بودن  $M$  ( $M = H^n$ ) است پس نتیجه از قضیهٔ ۶، حاصل می‌شود.

(پ) نقطه  $z$  در  $H^n(\infty)$  را طوری در نظر بگیرید که همهٔ  $\tilde{G}$ -مدارها مشمول در ابرکره‌های به مرکز  $z$  و  $S$  نیز یکی از این ابرکره‌ها باشد. نشان می‌دهیم  $\Delta(S) = S$ .

فرض کنید  $\delta$  در  $\Delta$  و  $\delta(S) \neq S$ . اگر ژئودزیکی مانند  $\gamma$  وجود داشته باشد که  $\delta(\gamma) = \gamma$  (محوری باشد) آن‌گاه بنا به گزارهٔ ۳ قسمت ۲، ۴ در [۱]،  $\gamma$  یکتاست و چون برای هر  $g$  در  $\tilde{G}$ ،  $g\delta = \delta g$ ، پس  $\delta(g\gamma) = g\gamma$  و به دلیل یکتایی محور  $\gamma$ ،  $g\gamma = \gamma$  پس  $\tilde{G}(\gamma) = \gamma$ . لذا  $\gamma$  باید در یک  $\tilde{G}$ -مدار مشمول و نتیجتاً مشمول در یک ابرکره باشد. ولی این در

تناقض با این واقعیت است که هیچ ژئودزیک در  $H^n$  در یک ابرکره جای ندارد. بنابراین هیچ عضو  $\Delta$  محوری نبوده و باید

$$\Delta(S) = S \text{ همه سهموی باشند و این بنا به لم ۳ در [۳] نتیجه می‌دهد}$$

اکنون به دلیل وابرسان بودن  $H^n$  با  $\mathbb{R} \times S$ ، می‌توان دید که برای  $N = \frac{S}{\Delta}$ ،  $M$  با  $\mathbb{R} \times N$  وابرسان است. حال چون  $\tilde{G}(S) = S$ ، پس  $G(N) = N$  و  $\frac{M}{G}$  با  $\frac{N}{G}$  همسان‌ریخت است.

ابکره‌های  $H^n$  تحت متریک القائی تخت می‌باشند. بنابراین  $N$  نیز یک  $G$ -خمینه تخت با نقص همگنی یک است. نشان می‌دهیم  $N$  جهت‌پذیر است. گردایه همه ژئودزیک‌های با سرعت واحد  $\gamma$  در کلاس مجانبی  $[ \gamma ]$  را  $Z$  در نظر بگیرید. بدون کاستن از کلیت فرض کنید برای همه  $\gamma$ ها،  $\gamma(0) \in S$ . در این صورت گردایه همه بردارهای  $\gamma'(0)$  یک میدان برداری نرمال روی  $S$  تعریف می‌کنند و چون برای هر  $\delta$  در  $\Delta$ ،  $\delta[\gamma] = [\gamma]$  و  $\delta(S) = S$ ، پس گردایه بردارهای  $d\mathcal{K}(\gamma'(0))$  نیز یک میدان برداری نرمال در امتداد  $N$  هستند. این یعنی  $N$  جهت‌پذیر است.

بنابراین مطابق تبصره ۵،  $\frac{N}{G}$  با یکی از فضاهای زیر همسان‌ریخت است

$$\mathbb{R}, [0, \infty), S^1$$

بنابراین  $\frac{M}{G}$  نیز با یکی از فضاهای زیر همسان‌ریخت است

$$\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R} \times S^1$$

و این اثبات قضیه را تمام می‌کند.

**مثال:** در این مثال نشان می‌دهیم که فضاهای مداری اشاره شده در قضیه ۷، در واقع می‌توانند ظاهر شوند. مثال‌هایی از خمینه‌های ریمانی با انحنای ثابت منفی و نقص همگنی یک وجود دارند به طوری که فضای مداری آنها با یکی از فضاهای  $\mathbb{R}$ ،  $[0, \infty)$  یا  $S^1$  همسان‌ریخت است ([۱۶]).

اگر  $F$  یک خمینه ریمانی با انحنای ثابت  $c \leq 0$  باشد، آن‌گاه تابعی مانند  $f$  روی  $\mathbb{R}$  وجود دارد که خمینه حاصلضربی پیچیده  $M = \mathbb{R}_f \times F^c$  با انحنای ثابت منفی باشد ([۱]). اگر  $K$  زیر گروه همبند و بسته‌ای از گروه طولپاهای  $F$  و  $I$  نیز نگاشت همانی روی  $\mathbb{R}$  باشد، آن‌گاه  $G = \{I\} \times K$  زیر گروه همبند و بسته از طولپاهای  $M$  است.

اکنون فرض کنید  $K$  با نقص همگنی یک روی  $F$  عمل کند. در این صورت  $G$  نیز با نقص همگنی دو روی  $M$  عمل می‌کند. بنابراین، اگر موارد مناسبی از  $K$  و  $F$  به طور مناسب انتخاب شوند آن‌گاه  $\frac{M}{G}$  با یکی از موارد اشاره شده در قضیه ۷، می‌تواند همسان‌ریخت باشد.

<sup>6</sup> Warped product

## References

1. Bishop R. L., O'Neil B., "Manifolds of negative curvature", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 145 (1969) 1-49.
2. Bredon G. E., "Introduction to compact transformation groups", Acad. Press, New York, London 1972.
3. Byers W., "Isometry group of Riemannian manifolds of negative curvature", *Proceeding of the Amer. Math. Soc.*, 45 (1976) 281-285.
4. Di Scala A. J., Olmos C., "The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space", *Math. Z.*, 237 (2001) 199-209.
5. Do Carmo M. P., "Riemannian Geometry", Brikhhauser, Boston, Basel, Berlin, 1992.
6. Kobayashi S., "Homogeneous Riemannian manifolds of negative curvature", *Tohoku Math. J.*, 14 (1962) 413-415.
7. Eberlin P., O'Neil B., "Visibility manifolds", *Pacific J. Math.*, 46, 1 (1973) 45-109.
8. Michor P. W., "Isometric actions of Lie groups and invariants", *Lecture course at the university of Vienna 1996/97*.
9. Mirzaie R., "On orbits of isometric actions on flat Riemannian manifolds", *Kyushu J. Math.*, 65 (2011) 383-393.
10. Mirzaie R., "On Euclidean G-manifolds which have two dimensional orbit spaces", *International J. Math.*, 22, 3 (2011) 399-406.
11. Mirzaie R., Heidari M., "Orbit spaces arising from isometric actions on hyperbolic spaces", *Mathematical researches*, 3(2), (2018) 147-154.
12. Mirzaie R., Kashani S. M. B., "On cohomogeneity one flat Riemannian manifolds", *Glasgow Math. J.*, 44 (2002) 185-190.

13. Mirzaie R., " Orbit space of cohomogeneity two flat Riemannian manifolds", *Balkan Journal of Geometry and its Applications* 23(2), (2018) 25-33.
14. Mostert P., "On a compact Lie group action on manifolds", *Ann. Math.*, 65 (1957) 447.
15. Palais R. S., Terrg CH. L., "A general theory of canonical forms", *Trans. Am. Math. Soc.*, 300 (1987) 771-789.
16. Podesta F., Spiro A., "Some topological properties of cohomogeneity one manifolds with negative curvature" *Ann. Global. Anal. Geom.*, 14 (1966) 69-79.
17. Searle C., "Cohomogeneity and positive curvature in low dimensions", *Math. Z.*, 214 (1993) 491-498.
18. Straume E., "Compact connected Lie transformation groups on spheres with low cohomogeneity. I", *Memoris of the AMS*, Vol. 119, 569 (1996).
19. Straume E., "Compact connected Lie transformation groups on spheres with low cohomogeneity. II", *Memoirs of the AMS*, Vol. 125, 595 (1997).