Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

# Generalized monotone operators and polarity approach to generalized monotone sets

**Mohammad Hossein Alizadeh**[1]

1. Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran.

E-mail: m.alizadeh@iasbs.ac.ir

**Article Info**

**Article type:**
Research Article

**Article history:**
Received:
1 January 2020
Received in revised form:
6 February 2021
Accepted:
7 March 2021
Published online:
31 December 2022

**Keywords**:
Monotone and generalized monotone operators,
Fenchel-Moreau inequality,
Fitzpatrick function,
monotone and generalized monotone polar sets.

**ABSTRACT**

**Introduction**

Suppose that $X$ is a Banach Space with topological dual space $X^*$. We will denote by $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X^* \to \mathbb{R}$ the duality pairing between X and $X^*$. For $\Omega \subset X$, we denote by $\operatorname{bd}\Omega$ the boundary points of $\Omega$ and by $\operatorname{int}\Omega$ the interior of $\Omega$. Also we will denote by $\mathbb{R}_+$ the real nonnegative numbers. Let $T$ be a set-valued map from $X$ to $X^*$. The domain and graph of $T$ are, respectively, defined by

$$D(T) := \{x \in X : T(x) \neq \varnothing\},$$

$$\operatorname{gr}(T) := \{(x,x^*) \in X\times X^* : x\in D(T), x^* \in T(x)\}.$$

We recall that a set valued operator $T$ is monotone if $\langle y^* - x^*, y - x\rangle \geq 0$, for all $x, y \in X$ and $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$. For two multivalued operators $T$ and $S$ we write $T \subseteq S$ if $S$ is an extension of $T$, i.e., $grT \subseteq grS$. A monotone operator is called maximal monotone if it has no monotone extension other than itself.
In 1988, The Fitzpatrick function of a monotone operator was introduced by Fitzpatrick. The Fitzpatrick function makes a bridge between the results of convex functions and results on maximal monotone operators. For a monotone operator $T$, its Fitzpatrick function is defined by

$$F : X\times X^* \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\},$$

$$F(x,x^*) = \sup_{(y,y^*)\in \operatorname{gr}T} \left(\langle x^*, y\rangle + \langle y^*, x\rangle - \langle y^*, y\rangle\right).$$

It is a convex and norm to weak-star lower semicontinuous function.
Let $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ be an extended real-valued function. Its effective domain is defined by $\operatorname{dom}(f) := \{x\in X : f(x) < \infty\}$. The function is called proper if $\operatorname{dom}(f) \neq \varnothing$. Let $f$ be a proper function. The subdifferential (in the sense of Convex Analysis) of $f$ at $x \in \operatorname{dom}(f)$ is defined by

$$\partial f(x) := \{x^* \in X : \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) \quad \forall y \in X\}.$$

Given a proper function $f$ and a map $\sigma:\operatorname{dom}(f)\to\mathbb{R}_+$, then $f$ is called $\sigma$-convex if

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\leq tf(x)+(1-t)f(y)+t(1-t)\min\left\{\sigma(x),\sigma(y)\right\}\|y-x\|$$

for all $x,y\in X$ and for all $t\in[0,1]$.

Given an operator $T$ and a map $\sigma:D(T)\to\mathbb{R}_+$. Then $T$ is called $\sigma$-monotone if for all $x,y\in X$ and $x^*\in T(x), y^*\in T(y)$ we have

$$\langle y^*-x^*, y-x\rangle\geq -\min\left\{\sigma(x),\sigma(y)\right\}\|y-x\|.$$

Also $T$ is called maximal $\sigma$-monotone if it has no $\sigma$-monotone extension other than itself. We recall for a proper function $f$ the $\sigma$-subdifferential of $f$ at $x\in\operatorname{dom}(f)$ is defined by

$$\partial^\sigma f(x):=\left\{x^*\in X:\langle x^*, y-x\rangle\leq f(y)-f(x)+\sigma(y)\|y-x\|\quad\forall y\in X\right\},$$

and $\partial^\sigma f(x)=\varnothing$ if $x\notin\operatorname{dom}(f)$.

**Main results**

The definition we use for the Fitzpatrick function is the same as for monotone operators.

Assume that $f$ is a proper $\sigma$-convex function its conjugate is defined by

$$f^*:X^*\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\},$$
$$f^*(x^*)=\sup\left\{\langle x^*,x\rangle-f(x):x\in\operatorname{dom}(f)\right\}.$$

First we have the following refinement of the Fenchel-Moreau inequality:

$$\langle x^*,x\rangle\leq f^*(x^*)+f(x)$$
$$\leq\langle x^*,x\rangle+\sup_{y\in\operatorname{dom}(f)}\sigma(y)\|y-x\|\leq\langle x^*,x\rangle+\iota_E(x),$$

where $\iota_E$ is the indicator function and $E=\left\{x\in\operatorname{dom}(f):\sigma(x)\neq 0\right\}$.

Also we have the following refinement, when $f$ is a proper, $\sigma$-convex and lower semicontinuous function and $\partial^\sigma f$ is a maximal $\sigma$-monotone operator:

$$\langle x^*,x\rangle\leq F_{\partial^\sigma f}(x,x^*)$$
$$\leq\langle x^*,x\rangle+\sup_{y\in\operatorname{dom}(f)}\sigma(y)\|y-x\|.$$

Moreover, we approach generalized monotonicity from the point of view of the classical concept of polarity. Besides, we introduce and study the notion of generalized monotone polar of a set A. Moreover, we find some equivalent relations between polarity and maximal generalized monotonicity.

**How to cite:** Alizadeh, M. H. (2022). Generalized monotone operators and polarity approach to generalized monotone sets. *Mathematical Researches*, 8 (4), 151-163.



Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Kharazmi University

# عملگرهای یکنوای تعمیم‌یافته و رویکرد قطبیِ مجموعه‌های یکنوای تعمیم‌یافته

محمد حسین علیزاده [۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: m.alizadeh@iasbs.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

**نوع مقاله:** مقاله پژوهشی

**تاریخ دریافت:** ۱۳۹۸/۱۰/۱۱
**تاریخ بازنگری:** ۱۳۹۹/۱۱/۱۸
**تاریخ پذیرش:** ۱۳۹۹/۱۲/۱۷
**تاریخ انتشار:** ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

**چکیده**

ابتدا نامساوی فنچل- مورا به توابع $\sigma$ -محدب تعمیم داده می‌شود و سپس با استفاده از تابع فیتزپاتریک تعمیم یافته، تظریفی برای نامساوی فنچل - مورا تعمیم یافته ارائه می‌شود. در ادامه، رویکرد قطبی مجموعه‌های $\sigma$ -یکنوا معرفی شده و نتایج مرتبط با آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

**واژه‌های کلیدی:**
عملگرهای یکنوا و -یکنوا،
نامساوی فنچل - مورا،
تابع فیتزپاتریک،
قطبی مجموعه‌های یکنوا
و -یکنوا.

**استناد:** علیزاده، محمدحسین؛ (۱۴۰۱). عملگرهای یکنوای تعمیم‌یافته و رویکرد قطبیِ مجموعه‌های یکنوای تعمیم‌یافته. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۱۶۳-۱۵۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱. مقدمه

فرض کنید که $X$ یک فضای باناخ با دوگان توپولوژیک $X^*$ باشد. طبق معمول، برای جفت دوگانی بین $X$ و $X^*$ از نماد $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X^* \to \mathbb{R}$ استفاده می‌کنیم. همچنین، برای $x \in X$ و $r > 0$ گوی باز به مرکز $x$ و به‌شعاع $r$ را با $B(x,r) = \{y \in X : \| x-y \| < r\}$ نشان می‌دهیم. در این مقاله، $B$ و $B^*$ را به‌ترتیب برای نشان دادن گوی یکه بسته فضاهای باناخ $X$ و $X^*$ به‌کار خواهیم برد. همچنین مجموعه اعداد حقیقی نامنفی را با $\mathbb{R}_+$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\Omega$ یک زیرمجموعهٔ ناتهی از $X$ باشد، درون، بستار و مرز آن را به‌ترتیب با نمادهای $\operatorname{int}\Omega$، $\operatorname{cl}\Omega$ و $\operatorname{bd}\Omega$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید که $T : X \to 2^{X^*}$ عملگری مجموعه مقدار از $X$ به $X^*$ باشد. در این صورت $T$ را یکنوا گویند هرگاه برای هر $x, y \in X$ و برای هر $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ داشته باشیم

$$\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0.$$

دامنه و نمودار (گراف) $T$ به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$D(T) := \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\},$$
$$\operatorname{gr}(T) := \{(x, x^*) \in X \times X^* : x \in D(T), x^* \in T(x)\}.$$

فرض می‌کنیم که $T$ و $S$ عملگرهایی مجموعه مقدار باشند، می‌نویسیم $T \subset S$ هرگاه $S$ یک توسیع $T$ باشد؛ یعنی $\operatorname{gr} T \subset \operatorname{gr} S$. یک عملگر یکنوا را یکنوای ماکسیمال گویند هرگاه دارای هیچ توسیع یکنوای دیگری (به‌غیر خودش) نباشد. برای مطالعهٔ بیشتر و تاریخچهٔ مختصر عملگرهای یکنوا خوانندهٔ علاقه‌مند را به [۶] ارجاع می‌دهیم.

در سال ۱۹۸۸، سایمون فیتزپاتریک در [۱۱] تابعی را برای مطالعهٔ عملگرهای یکنوا و ارتباط این مطالب با معادلات با مشتقات جزئی معرفی کرد. در ادبیات امروزی آنالیز محدب، این تابع را تابع فیتزپاتریک می‌نامند.

**تعریف ۱.۱** ( **تابع فیتزپاتریک**). فرض کنید $T : X \to 2^{X^*}$ عملگری مجموعه مقدار باشد. تابع فیتزپاتریک وابسته به آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F : X \times X^* \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\},$$
$$F(x, x^*) = \sup_{(y,y^*) \in \operatorname{gr} T} \left( \langle x^*, y \rangle + \langle y^*, x \rangle - \langle y^*, y \rangle \right).$$

تابع فیتزپاتریک به مدت یک دهه مورد توجه واقع نشد ولی بعد از آن مقالات متعدی در مورد آن نوشته شد و به یکی از ابزارهای مهم آنالیز محدب و نظریه عملگرهای یکنوا تبدیل شد. لازم به یادآوری است که تابع فیتزپاتریک، تابعی سره، محدب و با توپولوژی نرم در ضعیف ستاره، نیم‌پیوسته پایینی است.

بخش‌های این مقاله به این شرح است: بخش ۲ به مفاهیم، تعاریف و روابط اصلی مورد نیاز در بخش‌های بعدی اختصاص داده شده است. بخش ۳ به مطالعه عملگرهای $\sigma$-یکنوا و تابع فیتزپاتریک تعمیم یافته می‌پردازد. سپس نامساوی فنچل - مورایِ تعمیم‌یافته بیان می‌شود و با استفاده از تابع فیتزپاتریک تعمیم یافته، تظریفی برای نامساوی فنچل - مورایِ تعمیم یافته ارائه می‌شود. در بخش ۴ مفهوم قطبی برای مجموعه‌های $\sigma$-یکنوا معرفی می‌شود و بعد نتایج مرتبط با آن مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

## ۲. مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش مفاهیم، تعاریف و قضایایی را که دربخش‌های بعد به آنها نیاز داریم معرفی می‌کنیم.

فرض کنید که $f : X \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ یک تابع باشد. دامنه مؤثر آن را با $\mathrm{dom}(f)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < \infty\}.$$

علاوه بر آن اپیگراف[1] (بالاگراف) $f$ را با $\mathrm{epi}(f)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \le r\}.$$

همچنین تابع $f$ را سره[2] گویند هرگاه $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$.

یادآوری می‌کنیم که تابع سره $f$ را محدب گویند هرگاه برای هر $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ و هر $t \in ]0,1[$ داشته باشیم

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t) f(y).$$

اینک فرض کنید که $f : X \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ تابعی سره باشد. زیردیفرانسیل فنچل $f$ را در نقطه $x \in \mathrm{dom}(f)$ با $\partial f(x)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\partial f(x) := \{x^* \in X : \langle x^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x) \quad \forall y \in X\}.$$

چنان‌چه $x \notin \mathrm{dom}(f)$ قرار می‌دهیم $\partial f(x) = \emptyset$.

حال فرض کنید که $f : X \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ تابعی سره باشد. از [۱۳،۱۴] یادآوری می‌کنیم که $f$ را $\varepsilon$-محدب گویند هرگاه برای هر $a, b \in X$ و $\lambda \in ]0,1[$ داشته باشیم

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) + \lambda(1-\lambda)\varepsilon \| a - b \|.$$

[1] epigraph
[2] proper

فرض کنید که $f: X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ تابعی سره باشد و $\sigma: \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}_+$ یک نگاشت باشد. در مرجع [۲] مفهوم تابع $\sigma$- محدب معرفی شد و ارتباط آن با عملگرهای $\sigma$-یکنوا مورد مطالعه قرار گرفت. لازم به ذکر است که تابع سره $f$ را $\sigma$- محدب گویند هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $t \in ]0,1[$ داشته باشیم

(۱)

$$f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y)+t(1-t)\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\|y-x\|.$$

توجه کنید که خانوادهٔ توابع $\sigma$- محدب شامل خانواده‌های توابع $\varepsilon$-محدب و محدب است.

تعریف زیر برگرفته شده از مراجع [۳] و [۱۲] است.

**تعریف ۲٫۱ .** فرض کنید که $T: X \to 2^{X^*}$ عملگری مجموعه مقدار و $\sigma: D(T) \to \mathbb{R}_+$ یک نگاشت باشد. در این صورت $T$ را $\sigma$-یکنوا گویند هرگاه برای هر $x, y \in X$ و برای هر $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ داشته باشیم

(۲)

$$\langle y^*-x^*, y-x\rangle \ge -\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\| y-x \|.$$

همچنین $T$را $\sigma$-یکنوای ماکسیمال گویند هرگاه برای هر عملگر-$\sigma'$یکنوای $T'$ که $T \subset T'$ و $\sigma'$ یک توسیع $\sigma$ است، داشته باشیم $T = T'$.

مفاهیم $\sigma$-یکنوا و $\sigma$-یکنوای ماکسیمال ابتدا در فضاهای با بعد متناهی در [۱۲] معرفی و مطالعه شد. سپس در مراجع [۱،۲،۴] در فضاهای با بعد نامتناهی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. خواننده علاقه‌مند را برای مطالعه بیشتر به آن‌ها ارجاع می‌دهیم.

**تعریف ۲.۲** (**$\sigma$-زیردیفرانسیل**). فرض کنید که $f: X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ تابعی سره باشد. $\sigma$-زیردیفرانسیل $f$ را در نقطه $x \in \mathrm{dom}(f)$ با $\partial^\sigma f(x)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\partial^\sigma f(x) := \{x^* \in X : \langle x^*, y-x\rangle \le f(y)-f(x)+\sigma(y)\| y-x \| \quad \forall y \in X\},$$

هرگاه $x \notin \mathrm{dom}(f)$ تعریف می‌کنیم $\partial^\sigma f(x) = \varnothing$.

$\sigma$- زیردیفرانسیل و ارتباط آن با عملگرهای $\sigma$-یکنوا در [۲] مطالعه شده است.

## ۳. عملگرهای- $\sigma$ یکنوا و تابع فیتزپاتریک

در این فصل برخی از نتایج [۵] را به عملگرهای $\sigma$-یکنوا تعمیم می‌دهیم. برای این منظور لازم است که چند تعریف از [۴،۱۱] را گسترش دهیم.

در نگاه اول، به نظر می‌رسد که بهتر است تابع فیتزپاتریک را به صورت

$$F_T\left(x,x^*\right)=\sup_{\left(y,y^*\right)\in \mathrm{gr}T}\left\{\left\langle x^*,x\right\rangle+\left\langle y^*,x-y\right\rangle-\min\{\sigma\left(y\right),\sigma\left(x\right)\}\|y-x\|\right\}$$

یا به صورت

$$F_T\left(x,x^*\right)=\sup_{\left(y,y^*\right)\in \mathrm{gr}T}\left\{\left\langle x^*,x\right\rangle+\left\langle y^*,x-y\right\rangle-\sigma\left(y\right)\|y-x\|\right\}$$

تعریف کنیم؛ هر چند با این تعریف تابع روی زیرمجموعه‌های بزرگتری از $X\times X^*$ سره می‌شود ولی خواص اساسی مانند محدب بودن و نیم‌پیوسته پایینی بودن را از دست می‌دهد. از این‌رو، طبیعی است که تابع فیتزپاتریک را برای عملگرهای $\sigma$-یکنوا نیز همانند عملگرهای یکنوا تعریف کنیم [۱].

**تعریف ۳٫۱.** فرض کنید که $T:X\to 2^{X^*}$ عملگری $\sigma$-یکنوا باشد. تابع فیتزپاتریک وابسته به آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}&F:X\times X^*\to\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\},\\&F\left(x,x^*\right)=\sup_{\left(y,y^*\right)\in \mathrm{gr}T}\left(\langle x^*,y\rangle+\langle y^*,x\rangle-\langle y^*,y\rangle\right).\end{aligned}$$

تابع فیتزپاتریک در این حالت نیز تابعی محدب و با توپولوژی نرم در ضعیف ستاره، نیم‌پیوسته پایینی است.

ابتدا قضیهٔ زیر که تعمیم قضیه فیتزپاتریک به عملگرهای $\sigma$-یکنوا به حساب می‌آید را از [۱] ارائه می‌کنیم:

**قضیهٔ ۳٫۱.** فرض کنید که $T:X\to 2^{X^*}$ عملگری $\sigma$-یکنوای ماکسیمال باشد. دراین صورت

$$F_T\left(x,x^*\right)\geq\langle x^*,x\rangle,\quad \forall\left(x,x^*\right)\in X\times X^*.$$

هرگاه $\left(x,x^*\right)\notin \mathrm{gr}T$، نامساوی فوق تبدیل به نامساوی اکید می‌شود. اگر $\left(x,x^*\right)\in \mathrm{gr}T$ و $\sigma\left(x\right)=0$، آن‌گاه نامساوی تبدیل به تساوی می‌شود.

در زیر نامساوی فنچل - مورِا را به توابع $\sigma$-محدب تعمیم می‌دهیم:

فرض کنید که $f:X\to\mathbb{R}\bigcup\left\{+\infty\right\}$ تابعی $\sigma$-محدب باشد. تابع مزدوج آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}&f^*:X^*\to\mathbb{R}\cup\left\{+\infty\right\},\\&f^*\left(x^*\right)=\sup\left\{\langle x^*,x\rangle-f\left(x\right):x\in \mathrm{dom}\left(f\right)\right\}.\end{aligned}$$

در این صورت از تعریف معلوم می‌شود که

(۳)

$$\langle x^*, x\rangle \le f^*\left(x^*\right)+f\left(x\right).$$

حال فرض کنید $x^* \in \partial^\sigma f\left(x\right)$، در این صورت

$$\langle x^*, y-x\rangle \le f\left(y\right)-f\left(x\right)+\sigma\left(y\right)\| y-x\| \qquad \forall y\in X,$$

در نتیجه

$$f\left(x\right)+\langle x^*, y\rangle - f\left(y\right)\le \langle x^*, x\rangle+\sigma\left(y\right)\| y-x\| \qquad \forall y\in X.$$

حال با گرفتن سوپریمم روی $y\in \mathrm{dom}\left(f\right)$ خواهیم داشت

$$f\left(x\right)+f^*\left(x^*\right)\le \langle x^*, x\rangle+\sup_{y\in \mathrm{dom}(f)}\sigma\left(y\right)\| y-x\|.$$

از این‌رو نامساوی زیر را به دست می‌آوریم که تعمیم‌یافتهٔ نامساوی فنچل - مورا، است

$$\begin{aligned}\langle x^*, x\rangle &\le f^*\left(x^*\right)+f\left(x\right)\\ &\le \langle x^*, x\rangle+\sup_{y\in \mathrm{dom}(f)}\sigma\left(y\right)\| y-x\| \le \langle x^*, x\rangle+\iota_E\left(x\right).\end{aligned} \qquad (FM)$$

که در آن $\iota_E$ تابع شاخص $E$ است و $E=\left\{x\in \mathrm{dom}\left(f\right):\sigma\left(x\right)\neq 0\right\}$.

**قضیهٔ ۳,۲.** فرض کنید که $f: X\to \mathbb{R}\bigcup\left\{+\infty\right\}$ تابعی سره، $\sigma$- محدب و نیم‌پیوسته پایینی باشد که در آن نگاشت $\sigma:\mathrm{dom}\left(f\right)\to \mathbb{R}_+$ نیم‌پیوسته بالایی است. اگر $\partial^\sigma f$ یک عملگر $\sigma$-یکنوای ماکسیمال باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\langle x^*, x\rangle &\le F_{\partial^\sigma f}\left(x, x^*\right)\\ &\le \langle x^*, x\rangle+\sup_{y\in \mathrm{dom}(f)}\sigma\left(y\right)\| y-x\|.\end{aligned} \qquad (FF)$$

**برهان.** بنابه فرض $\partial^\sigma f$ یک عملگر $\sigma$-یکنوای ماکسیمال است. پس نامساوی اول در $\left(FF\right)$، طبق قضیهٔ ۳,۱ برقرار است. برای اثبات نامساوی دوم $\left(x, x^*\right)\in X\times X^*$ دلخواه ولی ثابت در نظر بگیرید. در این صورت بنابه تعریف تابع فیتزپاتریک دنباله‌ای مانند $\left\{\left(y_n, y_n^*\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ در $\mathrm{gr}(\partial^\sigma f)$ وجود دارد به طوری وقتی $n\to\infty$ داریم

$$\langle x^*, y_n\rangle+\langle y_n^*, x-y_n\rangle\to F_{\partial^\sigma f}\left(x, x^*\right).$$

حال مفروضات $\sigma$-یکنوایی ماکسیمال $\partial^\sigma f$ و نیم‌پیوسته بالایی بودن $\sigma$، از گزاره ۲,۷ در مرجع [۴] برقرارند در نتیجه $\mathrm{gr}\left(\partial^\sigma f\right)$ نسبت به توپولوژی نرم در ضعیف ستاره، بسته است. لذا فرض $\left\{\left(y_n, y_n^*\right)\right\}\in \mathrm{gr}\left(\partial^\sigma f\right)$ ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}\langle x^*, y_n\rangle + \langle {y_n}^*, x-y_n\rangle &\le \langle x^*, y_n\rangle - f\left(y_n\right) + f\left(x\right) + \sigma\left(y_n\right)\| y_n - x\|\\ &\le f\left(x\right) + f^*\left(x^*\right) + \sigma\left(y_n\right)\| y_n - x\|\\ &\le f\left(x\right) + f^*\left(x^*\right) + \sup_{y\in \mathrm{dom}(f)} \sigma\left(y\right)\| y - x\|.\end{aligned}$$

در نتیجه با گرفتن حد وقتی‌که $n \to \infty$ نامساوی مطلوب $(FF)$ حاصل می‌شود.

**توجه**: کاربردهایی از این مفاهیم و نتایج را می‌توان در مرجع‌های [۹،۱۰] یافت.

## ۴. رویکرد قطبی مجموعه‌های $\sigma$-یکنوا

در این فصل برخی از نتایج [۱۵] را که راجع به عملگرهای یکنواست به مجموعه‌های $\sigma$-یکنوا گسترش می‌دهیم. برای این منظور ابتدا نیاز داریم چند تعریف از [۴] را که در مورد عملگرهای $\sigma$-یکنواست به مجموعه‌های $\sigma$-یکنوا تعمیم دهیم. همچنین مفهوم قطبی برای عملگرها و عملگرهای شبه‌یکنوا در مراجع [۷،۸] مطالعه شده‌اند.

**تعریف ۴٫۱.** فرض کنید $D\subset X$ و $\sigma: D\to \mathbb{R}_+$ یک نگاشت باشد. زیر مجموعه $A\subset D\times X^*$ را $\sigma$-یکنوا گوییم هرگاه برای هر $\left(x,x^*\right),\left(y,y^*\right)\in A$

$$\langle x^*-y^*, x-y\rangle \ge -\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\| x-y\|.$$

همچنین مجموعهٔ $\sigma$-یکنوای $A$ را $\sigma$-یکنوای ماکسیمال[۳] گویند هرگاه برای هر $A'$ که $\sigma$-یکنواست و $A\subset A'$ داشته باشیم $A=A'$.

**تعریف ۴٫۲.** فرض کنید $D\subset X$ و $\sigma: D\to \mathbb{R}_+$ یک نگاشت باشد. زوج‌های $\left(x,x^*\right),\left(y,y^*\right)\in A$ را گوییم که رابطهٔ $\sigma$-یکنوایی[۴] دارند هرگاه

$$\langle x^*-y^*, x-y\rangle \ge -\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\| x-y\|.$$

اینک فرض کنید که $D\subset X$ و $\sigma: D\to \mathbb{R}_+$ یک نگاشت باشد. رابطهٔ بازتابی و تقارنی $\rho$ را روی $D\times X^*$ به این صورت در نظر می‌گیریم:

$\left(x,x^*\right)\rho\left(y,y^*\right)$ اگر و فقط اگر آنها رابطهٔ $\sigma$-یکنوایی داشته باشند.

**تعریف ۴٫۳.** فرض کنید که $D\subset X$ و $\sigma: D\to \mathbb{R}_+$ یک نگاشت باشد. در این صورت قطبی $\sigma$ - یکنوایی $A\subset D\times X^*$ را با $A^\rho$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

[3] Maximal $\sigma-$monotone
[4] $\sigma$-monotonically related

$$A^{\rho} := \left\{ \left(x, x^*\right) \in D \times X^* : \left(x, x^*\right) \rho \left(y, y^*\right), \forall \left(y, y^*\right) \in A \right\}.$$

در واقع، $A^{\rho}$ مجموعه تمام اعضایی در $D\times X^*$ است که با همه اعضای $(y, y^*) \in A$ رابطهٔ $\sigma$- یکنوایی داشته باشند. لازم به ذکر است که همانند حالت یکنوایی نگاشت $A \to A^{\rho}$ یک نگاشت قطبی است. [۵،۱۵] از این‌رو گزارهٔ زیر برقرار است.

**گزارهٔ ۴٫۱.** فرض کنید که $I$ یک مجموعه اندیس باشد. اگر $A$، $B$ و $A_i$ برای هر $i \in I$ زیر مجموعه‌هایی از $D\times X^*$ باشند، آن‌گاه احکام زیر برقرارند:

الف) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\rho} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\rho}$؛

ب) $A \subset A^{\rho\rho}$؛

پ) $A^{\rho\rho\rho} = A^{\rho}$؛

ت) $A \subset B \Rightarrow B^{\rho} \subset A^{\rho}$؛

ث) $\varnothing^{\rho} = X \times X^*$.

به عنوان نتیجه‌ای از لم زرن، می‌توان هر مجموعه $\sigma$- یکنوا را به یک مجموعه $\sigma$- یکنوای ماکسیمال گسترش داد ( همانند گزارهٔ ۲.۳ منبع [۳] که این مطلب برای عملگرهای $\sigma$-یکنوا ثابت شده است، عمل کنید.).

به طور معمول نگاشت $A \mapsto A^{\rho\rho}$ را نگاشت $\rho$ - بستار و $A^{\rho\rho}$ را $\rho$ - بستار $A$ می‌نامند. [۱۵] همچنین $A \subset D\times X^*$ را $\rho$ - بسته گویند هرگاه $A^{\rho\rho} = A$.

ایدهٔ اثبات گزارهٔ زیر از [۱۵] برگرفته شده و به مجموعه‌های $\sigma$-یکنوا تعمیم داده شده است.

**گزارهٔ ۴٫۲.** فرض کنید $A \subset D\times X^*$. در این صورت احکام زیر معادلند:

الف) $A$ مجموعه‌ای $\sigma$- یکنواست؛

ب) $A \subset A^{\rho}$؛

پ) $A^{\rho\rho} \subset A^{\rho}$؛

ت) $A^{\rho\rho}$ مجموعه‌ای $\sigma$- یکنواست.

**برهان.** اثبات معادل بودن (الف) و (ب) نتیجه فوری تعریف ۴٫۱ است.

حکم (ب) $\Leftarrow$ (پ) از گزارهٔ ۴٫۱ قسمت (ت) حاصل می‌شود.

حکم (پ) $\Leftarrow$ (ت) از معادل بودن قسمت‌های (الف) و (ب) همین گزاره به دست می‌آید.

حکم (ت) $\Leftarrow$ (الف) فرض کنید که $A^{\rho\rho}$ مجموعه‌ای $\sigma$-یکنوا باشد. در این صورت گزارهٔ ۴٫۱ قسمت (ب) ایجاب می‌کند

که $A\subset A^{\rho\rho}$. چون هر زیر مجموعه یک مجموعهٔ $\sigma$-یکنوا، $\sigma$-یکنواست. پس $A$ نیز $\sigma$- یکنوا خواهد شد.

در گزارهٔ بعدی $A^{\rho}$ را بر حسب اجتماع مجموعه‌های $\sigma$-یکنوای ماکسیمال گسترش یافته $A$ مشخص می‌کنیم.

**گزارهٔ ۴,۳.** فرض کنید که $A$ مجموعه‌ای $\sigma$- یکنواست. در این صورت $A^{\rho}$ برابر اجتماع تمام مجموعه‌های $\sigma$- یکنوای ماکسیمال گسترش یافتهٔ $A$ است؛ یعنی

$$A^{\rho}=\bigcup\{B\subset D\times X^{*}: \text{و } A\subset B \text{ ، } B \text{ ، } \sigma\text{-یکنوای ماکسیمال باشد}\}.$$

**برهان.** مجموعه سمت راست تساوی فوق را $C$ می‌نامیم. ابتدا نشان می‌دهیم $A^{\rho}\subset C$. برای این منظور، فرض کنید که $(x,x^{*})\in A^{\rho}$. در این صورت طبق تعریف، برای هر $(y,y^{*})\in A$ داریم

$$\langle x^{*}-y^{*},x-y\rangle\geq-\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\|x-y\|.$$

بنابراین $A\bigcup\{(x,x^{*})\}$ مجموعه‌ای $\sigma$- یکنواست. پس آن‌را به یک مجموعه $\sigma$-یکنوای ماکسیمال مانند $A_1$ می‌توان گسترش داد. در نتیجه $(x,x^{*})\in A_1\subset C$.

حال نشان می‌دهیم که $C\subset A^{\rho}$. برای این منظور فرض کنید $(x,x^{*})\in C$. در این صورت یک $B'$ وجود دارد به طوری که

$B'$ مجموعه‌ای $\sigma$- یکنوای ماکسیمال است، $(x,x^{*})\in B'$ و $A\subset B'$. از این‌رو برای هر $(y,y^{*})\in A\subset B'$ داریم $(x,x^{*})\rho(y,y^{*})$ یعنی $(x,x^{*})\in A^{\rho}$ و به این ترتیب برهان گزاره کامل می‌شود.

گزارهٔ زیر شرطی معادل $\sigma$-یکنوایی ماکسیمال ارائه می‌کند.

**گزارهٔ ۴,۴.** فرض کنید $A\subset D\times X^{*}$. در این صورت $A$، $\sigma$-یکنوای ماکسیمال است اگر و فقط اگر $A=A^{\rho}$.

**برهان.** فرض کنید که $A$، $\sigma$-یکنوای ماکسیمال باشد. در این صورت طبق گزاره ۴,۲ داریم $A\subset A^{\rho}$ و لذا $A=A^{\rho}$.

برعکس، فرض کنید $A=A^{\rho}$. اگر $(x,x^{*})\in A$، آن‌گاه $(x,x^{*})$ با همه اعضای $(y,y^{*})\in A$ رابطه $\sigma$-یکنوایی دارد بنابر این $A$، $\sigma$-یکنواست. حال از فرض $A=A^{\rho}$ و از گزاره ۴,۳ نتیجه می‌گیریم که $A$ تنها یک گسترش $\sigma$-یکنوای ماکسیمال دارد و آن نیز خودش است. بنابر این $A$، $\sigma$-یکنوای ماکسیمال است.

با توجه به گزاره فوق معلوم می‌شود که هر عملگر $\sigma$-یکنوای ماکسیمال $\rho$-بسته است.

با گرفتن قطبی از گزارهٔ ۴,۳ نتیجه جالب زیر حاصل می‌شود.

**گزارهٔ ۴,۵.** فرض کنید $A\subset D\times X^{*}$، $\sigma$- یکنوا باشد. در این صورت

$$A^{\rho\rho}=\bigcap\{B\subset D\times X^{*}: \text{و } A\subset B \text{ ، } B \text{ ، } \sigma\text{- یکنوای ماکسیمال باشد}\}.$$

**گزارهٔ ۴,۶ .** فرض کنید $A\subset D\times X^{*}$، $\sigma$-یکنوا باشد. در این صورت $\mathrm{cl}\,A\subset A^{\rho}$ که در آن $\mathrm{cl}\,A$ بستار $A$ نسبت

به توپولوژی نرم در ضعیف ستاره است.

**برهان.** نشان می‌دهیم که $D\times X^{*}\setminus A^{\rho}$ با توپولوژی مفروض باز است. برای این منظور فرض کنید که $(x,x^{*})\notin A^{\rho}$. در این صورت $\left(y,y^{*}\right)\in A$ وجود دارد به طوری که با $(x,x^{*})$ رابطه $\sigma$-یکنوایی ندارد. یعنی

(۴)

$$\langle x^{*}-y^{*},x-y\rangle<-\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\|x-y\|.$$

نقطهٔ مفروض $\left(z,z^{*}\right)\in D\times X^{*}$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\begin{aligned}&\langle x^{*}+z^{*}-y^{*},x+z-y\rangle\\&=\langle x^{*}-y^{*},x-y\rangle+\langle z^{*},z\rangle+\langle z^{*},x-y\rangle+\langle x^{*}-y^{*},z\rangle\\&\le\langle x^{*}-y^{*},x-y\rangle+\|z^{*}\|\|z\|+\|z^{*}\|\|x-y\|+\|x^{*}-y^{*}\|\|z\|.\end{aligned}$$

اکنون با انتخاب مقادیر به اندازهٔ کافی کوچک برای مقادیر $\|z\|$ و $\|z^{*}\|$ با استفاده از (۴) معلوم می‌شود که آخرین جملهٔ نامساوی فوق از $-\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\|x-y\|$ کوچکتر است. بنابراین یک مجموعهٔ باز در توپولوژی نرم در ضعیف ستاره وجود دارد به طوری شامل $\left(x,x^{*}\right)$ بوده و مشمول $D\times X^{*}$ است. یعنی $\left(x,x^{*}\right)\notin \operatorname{cl}A^{\rho}$ و لذا حکم برقرار است.

**نکتهٔ ۴,۱.** توجه کنید که اگر $A\subset D\times X^{*}$، $\sigma$-یکنوای ماکسیمال باشد، آن‌گاه طبق گزارهٔ ۴,۳، $A=A^{\rho}$ و لذا بنا به گزاره فوق با توپولوژی نرم در ضعیف ستاره، بسته است. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که بستار با توپولوژی نرم در ضعیف ستاره هر مجموعه $\sigma$- یکنوا، $\sigma$- یکنواست.

## References


1. M. H. Alizadeh, Fitzpatrick function for generalized monotone operators, J. Nonlinear Convex Anal. (to appear).

2. M. H. Alizadeh, On generalized convex functions and generalized subdifferential, Optim.Lett. 14 (2020) 157-169.

3. M. H. Alizadeh, M .Roohi, Some results on pre-monotone operators, Bull. Iran. Math. Soc. 43 (2017) 2085-2097.

4. M. H. Alizadeh, N. Hadjisavvas, M. Roohi, Local boundedness properties for generalized monotone operators, J. Convex Anal. 19 (2012) 49-61.

5. H. H. Bauschke, D. A. McLaren, H. S. Sendov, Fitzpatrick functions: inequalities, examples, and remarks on a problem by S. Fitzpatrick, J. Convex Anal. 13, (2006) 499-523.

6. J. M. Borwein, Fifty years of maximal monotonicity. Optim. Lett. 4 (2010) 473-490.

7. O. Bueno, J. Cotrina, The pseudomonotone polar for multivalued operators, Optimization 66 (2017) 691-703.

8. O. Bueno, J.-E. Martinez-Legaz, B. F. Svaiter, On the monotone polar and representable closures of monotone operators, J. Convex Anal. 21 (2014)495-505.

9. P. Cheraghi, A.P. Farajzadeh, S. Suantai, On optimization via $\epsilon$-generalized weak subdifferentials, Thai Journal of Mathematics 16(1) 147-164, (2018).

10. A. Farajzadeh, P. Cheraghi , On optimality conditions via weak subdifferential and augmented normal cone, Iranian Journal of Operations Research 9 (2), 15-30, 2018.

11. S. Fitzpatrick, Representing monotone operators by convex functions, in: FunctionalAnalysis and Optimization, Workshop/Miniconference (Canberra1988), Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. 20, Australian National University, Canberra (1988) 59-65.

12. A. N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa, An existence result for equilibrium problems with some surjectivity consequences, J. Convex Anal. 16 (2009) 807-826.

13. A. Jofre, D. T. Luc, M. Thera, $\varepsilon$-subdifferential and $\varepsilon$-monotonicity, Nonlinear Anal. 33 (1998) 71-90.

14. D.T.Luc, H. V. Ngai, M. Thera, Approximate convex functions, J. Nonlinear Convex Anal. 1 (2000), 155-176.

15. J.-E. Martinez-Legaz, B. F. Svaiter, Monotone operators representable by l.s.c. convex functions, Set-Valued Anal. 13 (2005)21-46.