

An upper bound for the size of a cross t -almost intersecting family

Ali Taherkhani¹ 

1. Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran.

✉E-mail: ali.taherkhani@iasbs.ac.ir

Article Info**ABSTRACT**

Article type:

Research Article

Article history:

Received:

6 July 2020

Revised form:

26 August 2020

Accepted:

26 August 2020

Published online:

14 May 2022

Keywords:

Erdős–Ko–Rado

theorem;

Intersecting

family;

Cross-intersecting

family;

 t -almost intersecting.**Introduction**

Let n and k be two positive integers such that $n \geq k$. Let $[n] = \{1, \dots, n\}$ be an n -element set and let symbol $\binom{[n]}{k}$ denote the family of all k -element subsets (or k -sets) of $[n]$. A family \mathcal{A} of k -sets of $[n]$ is said to be intersecting if for every two members A, B in \mathcal{A} , we have $A \cap B \neq \emptyset$. For a fixed element $i \in [n]$, if all members of \mathcal{A} contain i , then it is clear that \mathcal{A} is an intersecting family, which is called star. For each $i \in [n]$, the family $S_i = \{A : |A| = k, A \subseteq [n], i \in A\}$ is a maximal star.

The well-known Erdős–Ko–Rado theorem is one of important results in extremal combinatorics. It has many interesting proofs and extensions. The Erdős–Ko–Rado theorem states that every intersecting family of $\binom{[n]}{k}$ has cardinality at most $\binom{n-1}{k-1}$ provided that $n \geq 2k$; moreover, if $n > 2k$, then the only intersecting families of this cardinality are isomorphic to S_i .

Two families $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are called cross intersecting if for any $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{B}$, we have $A \cap B \neq \emptyset$. Strengthening the Erdős–Ko–Rado theorem, in 1986 Pyber showed an upper bound for $|\mathcal{A}||\mathcal{B}|$ as follows.

Theorem A. Let k, ℓ, n be positive integers such that $k \geq \ell$. Assume that $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are cross intersecting.

- If $k > \ell$ and $n \geq 2k + \ell - 2$, then $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}$.
- If $k = \ell$ and $n \geq 2k$, then $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}^2$.

In 1989 Matsumoto and Tokushige slightly improved Pyber's result as follows.

Theorem B. Let k, ℓ, n be positive integers such that $n \geq 2 \max\{k, \ell\}$. Assume that $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are cross intersecting. Then $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}$.

We say that a family \mathcal{A} is t -almost intersecting if for every set $A \in \mathcal{A}$ there are at most t elements of \mathcal{A} disjoint from A . In 2012 Gerbner, Lemons, Palmer, Patkós, and Szécsi proved an interesting generalization of the Erdős–Ko–Rado theorem for t -almost intersecting families.

Theorem C. Let k, n, t be positive integers and $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ is a t -almost intersecting family.

- If $n=n(k,t)$ is sufficiently large, then $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ with equality if and only if $\mathcal{A} = S_i$ for some $i \in [n]$
- If $k \geq 3, n \geq 2k + 2$, and $t = 1$, then $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ with equality if and only if $\mathcal{A} = S_i$ for some $i \in [n]$.

Main Results

We say two families $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are cross t -almost intersecting if any $A \in \mathcal{A}$ is disjoint from at most t elements of \mathcal{B} and any $B \in \mathcal{B}$ is disjoint from at most t elements of \mathcal{A} . As our main result we simultaneously extend the previous results for sufficiently large n .

Theorem 1. Let k, ℓ, n be positive integers such that $n=n(k, \ell, t)$ is sufficiently large. Assume that $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are cross t -almost intersecting. Then $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}$ with equality if and only if $\mathcal{A} = \mathcal{B} = S_i$ for some $i \in [n]$.

How to cite: Taherkhani, A.; (2022). An upper bound for the size of a cross t -almost intersecting family. *Mathematical Researches*, 8 (1), 205-214



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

کران بالایی برای مرتبهٔ یک خانوادهٔ ضربدري t -تقریباً اشتراکی

علی طاهرخانی[✉]

۱. دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. پست الکترونیکی: ali.taherkhani@iasbs.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۱۶

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۰۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۰۵

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:

قضیهٔ اردوش-کو-رادو،

خانوادهٔ اشتراکی،

خانوادهٔ ضربدري اشتراکی،

خانوادهٔ t -تقریباً اشتراکی.

فرض کنید \mathcal{A} خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی X باشد. به \mathcal{A} اشتراکی گویند هر گاه برای هر دو عضو A و B متعلق به \mathcal{A} داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$. قضیهٔ معروف اردوش-کو-رادو بیان می‌کند اندازه‌ی یک خانواده اشتراکی از زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی حداکثر $\binom{n-1}{k-1}$ است و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $n > 2k$ و عضو i مانند $i \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد که برای هر عضو A مانند A داشته باشیم $i \in A$. فرض کنید k و ℓ دو عدد صحیح مثبت باشند که $n \geq \max\{2k, 2\ell\}$. فرض کنید \mathcal{A} خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k عضوی از مجموعه n عضوی X و \mathcal{B} خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ℓ عضوی از مجموعه X باشد به دو خانواده \mathcal{A} و \mathcal{B} دو خانوادهٔ ضربدري t -تقریباً اشتراکی گویند اگر هر عضو A با حداکثر t عضو از خانواده \mathcal{B} اشتراک نداشته باشد و همین‌طور هر عضو B با حداکثر t عضو از خانواده \mathcal{A} اشتراک نداشته باشد. در این مقاله به عنوان تعمیمی از قضیهٔ اردوش-کو-رادو نشان می‌دهیم اگر \mathcal{A} و \mathcal{B} دو خانواده ضربدري t -تقریباً اشتراکی باشند و n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، آن‌گاه

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}$$

و تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر عضو i مانند $i \in X$ وجود داشته باشد که برای هر عضو A متعلق

به \mathcal{A} و هر عضو B متعلق به \mathcal{B} داشته باشیم، $i \in B$ و $i \in A$.

استناد: طاهرخانی، علی؛ (۱۴۰۱). کران بالایی برای مرتبهٔ یک خانوادهٔ ضربدري t -تقریباً اشتراکی. پژوهش‌های ریاضی، ۸(۱)، ۲۱۴-۲۰۵.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه و نتایج پیشین

برای عددهای صحیح و مثبت n و k فرض کنید نماد $[n]$ و $\binom{[n]}{k}$ به ترتیب نشان‌دهنده مجموعه n عضوی $\{1, \dots, n\}$ و خانواده همه زیرمجموعه‌های k عضوی از $[n]$ باشند. به خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k عضوی مانند \mathcal{A} اشتراکی گویند هرگاه برای هر دو عضو A و B متعلق به \mathcal{A} داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$. برای $i \in [n]$ خانواده تمام زیرمجموعه‌های k عضوی $[n]$ را که شامل i باشند ستاره با مرکز i می‌نامیم و آن را با S_i نمایش می‌دهیم. همچنین واضح است که S_i یک خانواده اشتراکی است.

قضیه معروف اردوش - کو- رادو در ارتباط با خانواده‌های اشتراکی است و در زمره مهم‌ترین قضیه‌های ترکیبیات حدی است. این قضیه کران بالایی برای اندازه یک خانواده اشتراکی از زیرمجموعه‌های k عضوی $[n]$ می‌دهد و خانواده‌هایی که این کران را اخذ می‌کنند مشخص می‌کند.

قضیه ۱. [۵] فرض کنید n و k دو صحیح مثبت باشند که $n \geq 2k$. اگر \mathcal{A} خانواده‌ای اشتراکی از $\binom{[n]}{k}$ باشد، آن‌گاه $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. همچنین، اگر $n > 2k$ ، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر برای عضوی چون $i \in [n]$ داشته باشیم $\mathcal{A} = S_i$.

قضیه اردوش - کو- رادو دارای تعمیم‌ها و اثبات‌های زیبا و جالب بسیاری است. برای مثال می‌توان به مقاله‌های [۱، ۲، ۳، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۱۹] اشاره کرد. یکی از تعمیم‌های پرکاربرد قضیه اردوش - کو- رادو، قضیه هیلتون - میلنر است که یک قضیه پایداری برای خانواده‌های اشتراکی است.

فرض کنید B یک زیرمجموعه k عضوی باشد که $1 \notin B$. دو خانواده اشتراکی

$$\mathcal{H} = \{A \mid 1 \in A, A \cap B \neq \emptyset\} \cup \{B\}$$

و

$$\mathcal{H}' = \{A \mid |A \cap \{1, 2, 3\}| \geq 2\}$$

زیر را در نظر بگیرید. حالت‌های تساوی در قضیه هیلتون - میلنر فقط در آنها اتفاق می‌افتد.

قضیه ۲. [۱۲] فرض کنید n و k دو عدد صحیح و مثبت باشند که $n > 2k$. اگر \mathcal{A} خانواده‌ای اشتراکی از $\binom{[n]}{k}$ باشد که زیر خانواده هیچ ستاره‌ای نیست، آنگاه

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1.$$

به علاوه، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\mathcal{A} \cong \mathcal{H}$ و یا $k = 3$ و $\mathcal{A} \cong \mathcal{H}'$.

یکی دیگر از تعمیم‌های معروف قضیه اردوش - کو- رادو قضیه‌ای است که توسط پایبر در سال ۱۹۸۵ اثبات شده است. در ادامه به بیان این قضیه خواهیم پرداخت.

فرض کنید k و l دو عدد صحیح و مثبت باشند. به دو خانواده $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{l}$ ضربدری اشتراکی گویند هرگاه برای هر عضو $A \in \mathcal{A}$ و هر عضو $B \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$. پایبر قضیه زیر را در ارتباط با خانواده‌های اشتراکی اثبات کرد.

قضیه ۳. [۱۹] فرض کنید k, ℓ و n عددهای صحیح مثبت باشند. فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانواده ضربداری اشتراکی باشند.

$$\bullet \text{ اگر } k > l \text{ و } n \geq 2k + \ell - 2$$

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}.$$

$$\bullet \text{ اگر } k = \ell \text{ و } n \geq 2k$$

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}^2.$$

البته باید به این نکته اشاره کرد که ماتسوموتو و توکوشیگ [۱۸] قضیه پیش را بهبود بخشیدند و نتیجه زیر را اثبات کردند.

قضیه ۴. [۱۸] فرض کنید k, ℓ و n عددهای صحیح مثبت باشند که $n \geq \max\{2k, 2\ell\}$.

فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانواده ضربداری اشتراکی باشند. آن‌گاه

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}.$$

تعمیم دیگری از قضیه اردوش-کو-رادو توسط گیربئر و همکاران در [۹] ارائه شد که در ادامه آن را بیان می‌کنیم. به خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های k عضوی $[n]$ مانند \mathcal{A} خانواده t -تقریباً اشتراکی گویند اگر هر عضو $A \in \mathcal{A}$ حداکثر با t عضو \mathcal{A} اشتراک نداشته باشد.

گیربئر و همکاران تعمیمی از قضیه اردوش-کو-رادو را برای خانواده‌های t -تقریباً اشتراکی زمانی که n به اندازه کافی نسبت به k و t بزرگ است ثابت کردند. البته آنها توانستند برای زمانی که $t = 2$ شرط $n \geq 2k + 2$ را جایگزین شرط n به اندازه کافی کنند.

قضیه ۵. [۱۰] فرض کنید n, k و t سه عدد صحیح مثبت باشند که $n \geq 2k$. فرض کنید \mathcal{A} یک خانواده t -تقریباً اشتراکی از $\binom{[n]}{k}$ باشد.

\bullet اگر $t \geq 2$ و $n = n(k, t)$ به اندازه کافی بزرگ باشد، آن‌گاه $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. به علاوه، تساوی

برقرار است اگر و تنها اگر برای عضو $i \in [n]$ داشته باشیم $\mathcal{A} = S_i$.

\bullet اگر $t = 1$ و $n \geq 2k + 2$ آن‌گاه $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. به علاوه، تساوی برقرار است اگر و تنها برای

عضوی چون $i \in [n]$ داشته باشیم $\mathcal{A} = S_i$.

ذکر این نکته مفید است که علیشاهی و طاهرخانی در [۱] کران بالایی برای $n(k, t)$ بیان شده در قضیه قبل ارائه کردند و توانستند ثابت کنند که $n(k, t) \leq 3kt$ برقرار است. برای نتایجی از این دست و تعمیم‌های آنها می‌توانید مراجع [۱۶، ۱۰، ۱۱] را ببینید.

۲. نتیجه اصلی و اثبات

در این مقاله دو مفهوم t -تقریباً اشتراکی و ضربدری اشتراکی را که در قسمت قبل تعریف شدند به مفهوم ضربدری t -تقریباً اشتراکی تعمیم می‌دهیم و نتیجه‌ای در این زمینه بیان و اثبات خواهیم کرد که قضیه‌های پیشین ذکر شده در این زمینه را نیز برای n به اندازه کافی بزرگ نتیجه می‌دهد.

به دو خانواده $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانواده ضربدری t -تقریباً اشتراکی گویند اگر هر عضو $A \in \mathcal{A}$ با حداکثر t عضو از \mathcal{B} اشتراک نداشته باشد و همین‌طور هر عضو $B \in \mathcal{B}$ با حداکثر t عضو از \mathcal{A} اشتراک نداشته باشد.

قضیه ۶. فرض کنید n, k, ℓ و t چهار عدد صحیح مثبت باشند که $k \geq 2, \ell \geq 2$ و $n = n(k, \ell, t)$ به اندازه کافی بزرگ باشد. اگر $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانواده ضربدری t -تقریباً اشتراکی باشند، آنگاه

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}.$$

به علاوه تساوی برقرار است اگر و تنها اگر \mathcal{A} و \mathcal{B} ستاره‌هایی با مرکز یکسان باشند.

برای اثبات این قضیه به دو حکم زیر نیاز خواهیم داشت. حکم اول قضیه‌ای پرکاربرد است که توسط کاتونا و کروسکال به صورت مستقل در [۱۷، ۱۴] اثبات شده است. حکم بعدی نیز لمی است که به صورت مستقل توسط فرانکل و کالای در [۱۳، ۷] اثبات شده است که کاربردهایی فراوانی دارد.

برای بیان قضیه کاتونا و کروسکال ابتدا نیاز به یک تعریف داریم. ترتیب الفبایی، $<$ روی مجموعه $\binom{[n]}{k}$ به این شکل تعریف می‌شود که اگر A و B دو زیرمجموعه k عضوی از $[n]$ باشند، می‌نویسیم $A < B$ هرگاه $\min(A \setminus B) < \min(B \setminus A)$. فرض کنید $m \leq \binom{n}{k}$ عدد صحیح مثبت باشد. فرض کنید $\mathcal{L}^k(m)$ خانواده‌ی m زیرمجموعه اول در خانواده‌ی $\binom{[n]}{k}$ نسبت به ترتیب الفبایی روی $\binom{[n]}{k}$ باشد. به‌عنوان مثال $\mathcal{L}^k\left(\binom{n-1}{k-1}\right)$ با ستاره S_1 یکی است.

قضیه ۷. [۱۴، ۱۷] فرض کنید k, ℓ و n عددهای صحیح مثبت باشند. اگر $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانواده ضربدری اشتراکی باشند. آنگاه $\mathcal{L}^k(|\mathcal{A}|)$ و $\mathcal{L}^k(|\mathcal{B}|)$ نیز ضربدری اشتراکی هستند.

لم ۸. [۷، ۱۳] فرض کنید $\{(A_1, B_1), \dots, (A_h, B_h)\}$ خانواده‌ای از زوج‌های مرتب از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای دلخواه باشند که برای هر $1 \leq i \leq h$ داریم $|A_i| = k, |B_i| = \ell$ و $A_i \cap B_i = \emptyset$. همچنین فرض کنید برای هر $1 \leq i < j \leq h$ داشته باشیم $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. آنگاه $\square \leq \binom{k+\ell}{k}$.

اثبات قضیه ۶. فرض کنید که

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \geq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}$$

بنابراین $|\mathcal{A}| \geq \binom{n-1}{\ell-1}$ یا $|\mathcal{B}| \geq \binom{n-1}{k-1}$. بدون این که به کلیت مسأله خللی وارد شود فرض کنید $|\mathcal{B}| \geq \binom{n-1}{k-1}$.

ابتدا فرض کنید که B یک خانواده اشتراکی نیست. فرض کنید $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ طوری انتخاب شود که $\mathcal{A}' \neq \emptyset$ و B دو خانواده ضربداری اشتراکی باشند و فرض کنید $|\mathcal{A}'|$ بزرگ‌ترین مقدار ممکن را دارا باشد. چون \mathcal{A}' و B دو خانواده ضربداری اشتراکی هستند پس با توجه به قضیه ۴ داریم

$$|\mathcal{A}'||B| \leq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}.$$

چون B یک خانواده اشتراکی نیست، دو عضو از آن چون B و B' هستند که $B \cap B' = \emptyset$ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

$$|\mathcal{A}'| \leq k^2 \binom{n-2}{\ell-2}.$$

چون \mathcal{A}' و B دو خانواده ضربداری اشتراکی هستند، با توجه به قضیه ۴ داریم $\mathcal{L}(|\mathcal{A}'|)$ و $\mathcal{L}(|B|)$ خانواده‌های ضربداری اشتراکی هستند. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که $|B| \leq \sum_{i=1}^{\ell} \binom{n-i}{k-1}$. زیرا در غیر این صورت، اگر $|B| > \sum_{i=1}^{\ell} \binom{n-i}{k-1}$ ، آن‌گاه $\{\ell+1, \dots, \ell+k\} \in \mathcal{L}(|B|)$ ، چون $\{1, \dots, \ell\}$ به عنوان عضوی از $\mathcal{L}(|\mathcal{A}'|)$ و $\{\ell+1, \dots, \ell+k\}$ به عنوان عضوی از $\mathcal{L}(|B|)$ با هم اشتراک ندارند و این تناقض است با $\mathcal{L}(|\mathcal{A}'|)$ و $\mathcal{L}(|B|)$ خانواده‌های ضربداری اشتراکی هستند.

در این قسمت ثابت می‌کنیم که $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'| \leq t \binom{k+\ell}{\ell}$. با توجه به تعریف خانواده \mathcal{A}' ، زیر خانواده $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ از \mathcal{A} خانواده‌ای است که کمترین تعداد از اعضای \mathcal{A} را دارد که با حذف آنها باقیمانده خانواده \mathcal{A} و خانواده B دو خانواده ضربداری اشتراکی می‌شوند. برای اثبات نامساوی ثابت می‌کنیم با حذف حداکثر $t \binom{k+\ell}{\ell}$ عضو از \mathcal{A} باقیمانده خانواده \mathcal{A} و B دو خانواده ضربداری اشتراکی می‌شوند. تعریف کنید $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. برای $j \geq 2$ فرض کنید $A_j \in \mathcal{B}$ و $A_j \in \mathcal{A}_{j-1}$ به گونه‌ای انتخاب شوند که $A_j \cap B_j = \emptyset$ چون A_j و B_j دو خانواده ضربداری t -تقریباً اشتراکی هستند، پس $t_j \leq t$ عضو از \mathcal{A}_{j-1} مانند $A_{j,1}, \dots, A_{j,t_j}$ وجود دارند که با B_j اشتراک ندارند. حال برای هر $j \geq 2$ قرار دهید $\mathcal{A}_j := \mathcal{A}_{j-1} \setminus \{A_{j,1}, \dots, A_{j,t_j}\}$ فرض کنید \hat{j} بزرگترین عدد j باشد که برای آن $A_j \in \mathcal{A}_{j-1}$ و $B_j \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشند که $A_j \cap B_j = \emptyset$. بنابراین \mathcal{A}_j و B_j ضربداری اشتراکی هستند. به راحتی می‌توان دید که شرایط لم ۸ برقرار است پس $\hat{j} \leq \binom{k+\ell}{\ell}$. از طرف دیگر با توجه به نوع انتخاب \mathcal{A}' داریم

$$|\mathcal{A}_j| \leq |\mathcal{A}'| \quad \text{و در نتیجه} \quad |\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'| \leq |\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{\hat{j}+1}|.$$

بنابراین $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'| \leq t \binom{k+\ell}{\ell}$. با توجه به نوع انتخاب \mathcal{A}' داریم $|\mathcal{A}'| \leq k^2 \binom{n-2}{\ell-2}$ و $|\mathcal{A}'||B| \leq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}$ که از آنجا که

$$|\mathcal{A}||B| = (|\mathcal{A}'| + |\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'|)|B|$$

پس داریم

$$|\mathcal{A}||B| \leq \left(k^2 \binom{n-2}{\ell-2} + t \binom{k+\ell}{\ell} \right) |B|.$$

بنابراین چون $|B| \leq \ell \binom{n-1}{k-1}$ خواهیم داشت

$$|\mathcal{A}||B| \leq (k^2 \binom{n-2}{\ell-2} + t \binom{k+\ell}{\ell}) (\ell \binom{n-1}{k-1})$$

و در نتیجه اگر داشته باشیم

$$\ell k^2 \binom{n-2}{\ell-2} + t \binom{k+\ell}{\ell} < (n-1) \quad (1)$$

به تناقض می‌رسیم با فرض

$$|\mathcal{A}||B| \geq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}$$

و حکم اثبات می‌شود. اما برقرار بودن نامساوی (۱) معادل برقراری نامساوی زیر است

$$\frac{\ell k^2 \binom{n-2}{\ell-2}}{(n-1)} + \frac{\ell t \binom{k+\ell}{\ell}}{(n-1)} < 1 \quad (2)$$

که برای برقرار بودن نامساوی (۲) نیز کافی است نشان دهیم

$$\frac{\ell^2 k^2}{n} + \frac{\ell t (k+\ell) \dots (k+1)}{\ell (n-1) \dots (n-\ell+1)} < 1$$

که این نامساوی نیز زمانی برقرار است که

$$\frac{\ell^2 k^2}{n} + t(k+1) \left(\frac{k+\ell}{n}\right)^{\ell-1} \leq 1$$

در نتیجه اگر

$$n \geq \max\{2\ell^2 k^2, (2t(k+1))^{\frac{1}{\ell-1}}(k+\ell)\}$$

بگیریم نامساوی‌های ذکر شده برقرار خواهند بود.

حال فرض کنید \mathcal{B} خانواده‌ای اشتراکی باشد. آن‌گاه با توجه به قضیه اردوش-کو-رادو داریم $|B| \leq \binom{n-1}{k-1}$ و چون فرض کردیم $|B| \geq \binom{n-1}{k-1}$ پس $|B| = \binom{n-1}{k-1}$.

چون $n = n(k, \ell, t)$ به اندازه کافی بزرگ فرض شده است به کمک قضیه اردوش-کو-رادو می‌توان فرض کرد که \mathcal{B} ستاره S_1 است. همچنین مشابه قبل می‌توان فرض کرد \mathcal{A} خانواده‌ای اشتراکی است. زیرا در غیر این صورت اگر \mathcal{A} خانواده‌ای اشتراکی نباشد، مانند حالتی که \mathcal{B} خانواده‌ای اشتراکی نبود می‌توان ثابت کرد

$$|\mathcal{A}||B| < \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}$$

که تناقض است. بنابراین با توجه به قضیه اردوش-کو-رادو $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{\ell-1}$. اگر $|\mathcal{A}| < \binom{n-1}{\ell-1}$ ، آن‌گاه داریم $|\mathcal{A}||B| < \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{\ell-1}$ که تناقض است. بنابراین می‌توان فرض کرد $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{\ell-1}$ و \mathcal{A} یک ستاره مانند S_i برای $i \in [n]$ است. اما می‌توان ثابت کرد که $i = 1$. زیرا اگر $i \neq 1$ ، آن‌گاه عضوی دلخواه مانند A متعلق به $\mathcal{A} \setminus S_1$ دقیقاً $\binom{n-\ell-1}{k-1}$ عضو در \mathcal{B} هیچ اشتراکی ندارد و چون n به اندازه کافی نسبت به

بزرگ k, ℓ, t فرض شده است پس $\binom{n - \ell - 1}{k - 1} > t$ که با فرض این که \mathcal{A} و \mathcal{B} دو خانواده ضربداری t -تقریباً اشتراکی هستند در تناقض است.

References

1. Alishahi M., Taherkhani A. "Extremal G -free induced subgraphs of Kneser graphs", J. Combin. Theory Ser. A, 159:269–282, 2018.
2. Balogh J., Bollobás B., Narayanan B. P., "Transference for the Erdős–Ko–Rado theorem", Forum Math. Sigma, 3:e23, 18, 2015.
3. Deza M., Frankl P., "Erdős–Ko–Rado theorem-22 years later. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*", 4(4):419–431, 1983.
4. Erdős P., "A problem on independent r -tuples", Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., 8:93–95, 1965.
5. Erdős P., Ko C., Rado R., "Intersection theorems for systems of finite sets", Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 12:313–320, 1961.
6. Frankl P., "On intersecting families of finite sets", J. Combin. Theory Ser. A, 24(2):146–161, 1978.
7. Frankl P., "An extremal problem for two families of sets", European J. Combin., 3(2):125–127, 1982.
8. Frankl P., "Improved bounds for Erdős' matching conjecture", J. Combin. Theory Ser. A, 120(5):1068–1072, 2013.
9. Frankl P., Füredi Z., "A new short proof of the EKR theorem", J. Combin. Theory Ser. A, 119(6):1388 – 1390, 2012.
10. Gerbner D., Lemons N., Palmer C., Patkós B., Szécsi V., "Almost intersecting families of sets", SIAM J. Discrete Math., 26(4):1657–1669, 2012.
11. Godsil C. and Meagher K., "A new proof of the Erdős–Ko–Rado theorem for intersecting families of permutations", European J. Combin., 30(2):404–414, 2009.

12. Hilton A. J. W., Milner E. C., "Some intersection theorems for systems of finite sets", Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 18:369–384, 1967.
13. Kalai G., "Intersection patterns of convex sets", Israel J. Math., 48(2-3):161–174, 1984.
14. Katona G. O. H., "A theorem of finite sets", Theory of Graphs, Proc. Coll. Tihany 1966, Akad, Kiado, Budapest, 1968; Classic Papers in Combinatorics, 381–401, 1987.
15. Katona G. O. H., "A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem", J. Combin. Theory Ser. B, 13(2):183 – 184, 1972.
16. Katona G. O. H., Nagy D. T., "A new generalization of the Erdős–Ko–Rado theorem. Graphs Combin., 31(5):1507–1516, 2015.
17. Kruskal J. B., "The Number of Simplices in a Complex", Mathematical optimization techniques, 251: 251–278, 1963.
18. Matsumoto M., N. Tokushige, "The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem for cross-intersecting families", J. Combin. Theory Ser. A, 52:90–97, 1989.
19. Pyber L., "Union-intersecting set systems", J. Combin. Theory Ser. A, 43:85–90, 1986.