



Numerical solution for infection of CD4+T cells using Dickson Polynomials

Dornaz Shirani¹ , Majid Tavassoli Kajani²  ✉

1. Department of Mathematics, Isfahan (Khorasgan) Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran.

E-mail: sshirani333@gmail.com

2. Department of Mathematics, Isfahan (Khorasgan) Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran.

✉ E-mail: tavassoli_k@yahoo.com

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
23 July 2020
Revised form:
15 November 2020
Accepted:
21 November 2020
Published online:
18 April 2022

Keywords:

Collocation method;
Fractional differential equations;
Chebyshev's nodes;
Error function.

Introduction

As it is well known, the cause of the AIDS disease is the HIV virus. The mechanism of the AIDS disease is that, after the arrival of the virus it consumes the CD4+T cells of blood and causes weakening of the body's defence system. However, until reaching the number of infected CD4+T cells to a specified amount, further propagation of the virus is controllable and it would be possible to prevent the AIDS disease. It should be noted that, the number of healthy or infected CD4+T cells in persons carrying the HIV virus varies according to the body's defence system.

According to the content provided, awareness of the number of healthy or infected CD4+T cells in the blood of a person, plays a great role in prevention and propagation of AIDS disease. The gained information help the doctors to choose the most useful therapeutic method. Moreover, this information enables doctors in choosing the type and amount of medicine.

There are various mathematical models dealing with the CD4+T cells function in confronting with HIV virus. One of the most famous of models, is the following system of differential equations:

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} T(t) = q - \eta T(t) + rT(t) \left(1 - \frac{T(t)+1}{T_{max}}\right) - kV(t)T(t) \\ D_*^{\alpha_2} I(t) = KV(t)T(t) - \beta I(t) & 0 \leq t \leq R < \infty \\ D_*^{\alpha_3} V(t) = \mu \beta I(t) - \gamma V(t) & 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$
$$T(0) = T_0, I(0) = I_0, V(0) = V_0$$

Where the parameters utilized in this model problem are explained in table below,

| Parameters and variables | Meaning |
|--------------------------------|---|
| $T(t)$ | The concentration of uninfected CD4+T in the blood |
| $I(t)$ | The concentration of infected CD4+T in the blood |
| $V(t)$ | The concentration of HIV virus particle in the blood |
| η | Turnover rate of uninfected CD4+T cells |
| β | Turnover rate of infected CD4+T cells |
| γ | Turnover rate of HIV virus particles |
| $1 - \frac{T(t) + 1}{T_{max}}$ | Logistic growth indicator of uninfected CD4+T cells |
| k | The infection rate of CD4+T cells by HIV virus |
| kVT | The incident of HIV infection of healthy CD4+T |
| μ | The number of virus particles produced by each infected CD4+T cell during its life time |
| q | The generation rate of uninfected CD4+T cells in the body |
| $\mu\beta$ | The generation rate of virions through infected CD4+T cells |
| T_{max} | The maximal concentration of CD4+T cells in the blood |
| r | Tate of cells' duplication through the process of mitosis when they are stimulated by antigen and mitogen |

Recent investigations have shown that most of real world, phenomena can be modeled using fractional differential equations. Furthermore, in comparison with the models based on ODEs of integer order, fractional order models raised from physics and biology would provide more efficient and more accurate results. Therefore, fractional order models are of special importance in science and technology.

In this paper, we investigate the fractional version of the model problem (1). Consider the following CD4+T cells function of fractional order,

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} T(t) = q - \eta T(t) + rT(t) \left(1 - \frac{T(t) + 1}{T_{max}}\right) - kV(t)T(t) \\ D_*^{\alpha_2} I(t) = KV(t)T(t) - \beta I(t) & 0 \leq t \leq R < \infty \\ D_*^{\alpha_3} V(t) = \mu\beta I(t) - \gamma V(t) & 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$T(0) = T_0, I(0) = I_0, V(0) = V_0$$

Where, $D_*^\alpha y$ is the fractional derivative of y of order in α ($0 < \alpha \leq 1$) in the Caputo Sense, given as follows;

$$D_*^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} y'(\tau) d\tau \quad (3)$$

The numerical methods that have been derived so far, have high computational complexity and, moreover, their accuracy is not high. We propose a collocation method based on Dickson polynomials for the numerical solution of the problem (2).

The efficiency and high accuracy of the derived method are also assessed.

Conclusion:

A fractional order model has been considered for infection of CD4+T cells. The numerical solution of this model has been constructed using a collocation method based on Dickson polynomials. Since the exact solution is unavailable, the obtained results are compared with the results of order methods in the literature. In addition, some error functions have been given to analyze the error of the obtained numerical results. These error functions show that the proposed collocation method possesses the so-called “spectral accuracy” The proposed method is also applicable to other systems of fractional ODEs.

How to cite: Shirani, D., & Tavassoli Kajani, M. (2022) Numerical solution for infection of CD4+T cells using Dickson Polynomials. *Mathematical Researches*, 8 (1), 1-20



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

حل عددی مدل کسری آلوده شدن سلول‌های $CD4+T$ با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون

درناز شیرانی^۱، مجید توسلی کجانی^۲ ✉

۱. دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اصفهان (خوراسگان)، اصفهان، ایران. پست الکترونیکی: sshirani333@gmail.com
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اصفهان (خوراسگان)، اصفهان، ایران. پست الکترونیکی: tavassoli_k@yahoo.com

چکیده

اطلاعات مقاله

این مقاله یک روش عددی برای حل یک مدل کسری از آلوده شدن سلول‌های $CD4+T$ توسط سلول‌های HIV را بیان می‌کند. با استفاده از این مدل می‌توان روند پیشرفت و انتشار HIV را مورد بررسی قرار داد. روش عددی با استفاده از روش کالوکیشن و چندجمله‌ای‌های دیکسون ارائه می‌شود. در روش هم‌محلی، نقاط هم‌محلی چبیشف به کار برده می‌شود. با انجام این فرایند دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری، به یک دستگاه غیرخطی تبدیل می‌شود و دستگاه غیرخطی به دست آمده با یکی از روش‌های موجود حل می‌شود. برای نشان دادن دقت این روش، نتایج عددی به دست آمده با نتایج عددی چندین مقاله مشابه مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۰۲

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۸/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۰۱

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۱/۲۹

واژه‌های کلیدی:

روش هم‌محلی،
معادلات دیفرانسیل کسری،
نقاط چبیشف،
تابع خطا.

استناد: شیرانی، درناز؛ توسلی کجانی، مجید؛ (۱۴۰۱). حل عددی مدل کسری آلوده شدن سلول‌های $CD4+T$ با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۱)، ۲۰-۱.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در قرن حاضر بسیاری از کشورها از جمله کشورهای پیشرفته و غیرپیشرفته با بیماری‌های خطرناکی مواجه هستند که تاکنون موفق به درمان آنها نشده‌اند. بیماری ایدز یکی از این بیماری‌ها است که در حال حاضر قابل درمان نیست، اما قابل پیشگیری است و در صورت مبتلا شدن می‌توان آن را کنترل نمود. چنانچه شخصی در مراحل ابتدایی ابتلا به این بیماری قرار گرفته باشد، می‌توان از پیشرفت آن جلوگیری کرد.

همان‌طور که می‌دانید ویروس HIV عامل ابتلا به بیماری ایدز می‌باشد. ابتلا به بیماری ایدز به این صورت است که، ویروس HIV پس از ورود به بدن فرد شروع به از بین بردن سلول‌های $CD4 + T$ موجود در خون می‌نماید و با از بین بردن آنها به تضعیف سیستم دفاعی بدن می‌پردازد. اما تا وقتی که تعداد سلول‌های سالم یا آلوده $CD4 + T$ موجود در خون هر فرد به مقدار به خصوصی نرسد، انتشار و پیشرفت این ویروس قابل پیشگیری است و می‌توان از تبدیل این ویروس به بیماری ایدز جلوگیری نمود. البته لازم به ذکر است که تعداد سلول‌های $CD4 + T$ سالم یا آلوده در اشخاص حامل ویروس HIV، بسته به ضعف یا قدرت سیستم دفاعی بدن هر فرد متفاوت خواهد بود.

با توجه به مطالب ارائه شده واضح است که اطلاع از تعداد سلول‌های $CD4 + T$ سالم یا آلوده موجود در خون هر فرد می‌تواند نقش مهم و تأثیرگذاری در روند جلوگیری از ابتلا و نیز پیشرفت بیماری ایدز داشته باشد. به این صورت که اطلاعات به دست آمده به پزشکان کمک می‌کند تا بتوانند شیوه درمانی مناسب‌تری را برای درمان انتخاب و ارائه نمایند. همچنین این اطلاعات، آنها را در انتخاب نوع و مقدار دارو راهنمایی مینماید. مدل‌های ریاضی متفاوتی وجود دارند که به بررسی عملکرد سلول‌های $CD4 + T$ در مواجه با سلول‌های HIV می‌پردازند. یکی از معروف‌ترین این مدل‌ها که ارائه شده است، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است که به صورت زیر بیان می‌شود [۱،۲،۳].

(۱)

$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = q - \eta T(t) + rT(t) \left(1 - \frac{T(t) + 1}{T_{max}}\right) - kV(t)T(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = kV(t)T(t) - \beta I(t) \\ \frac{dV(t)}{dt} = \mu\beta I(t) - \gamma V(t) \\ T(0) = T_0, I(0) = I_0, V(0) = V_0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq R < \infty$$

پارامترهای استفاده شده در این مدل در جدول زیر بیان شده است.

جدول (۱): پارامترهای استفاده شده در مدل

| متغیرها و پارامترها | توضیح متغیرها و پارامترها |
|--------------------------------|---|
| $T(t)$ | غلظت سلول‌های سالم $CD4 + T$ در خون |
| $I(t)$ | غلظت سلول‌های آلوده $CD4 + T$ در خون |
| $V(t)$ | غلظت ذرات ویروس HIV در خون |
| η | نرخ turnover سلول‌های سالم $CD4 + T$ |
| β | نرخ turnover سلول‌های آلوده $CD4 + T$ |
| γ | نرخ turnover ذرات ویروس HIV |
| $1 - \frac{T(t) + 1}{T_{max}}$ | نشانه‌گر رشد منطقی سلول‌های سالم $CD4 + T$ |
| k | نرخ آلودگی سلول‌های $CD4 + T$ توسط ویروس HIV |
| kVT | توصیف انتشار سرایت HIV توسط سلول‌های سالم $CD4 + T$ |
| μ | تعداد ذرات ویروس که هر سلول آلوده $CD4 + T$ در طول عمرش تولید می‌کند |
| q | نرخ تولید سلول‌های سالم $CD4 + T$ در بدن انسان |
| $\mu\beta$ | نرخ تولید ویروس توسط سلول‌های آلوده $CD4 + T$ |
| T_{max} | حداکثر غلظت سلول‌های $CD4 + T$ در خون |
| r | نرخ تکثیر mitosis سلول‌هاست وقتی توسط mitogen و antigen تحریک می‌شوند |

به دلیل اهمیت نتایج حاصل از مدل‌های HIV ، این مدل‌ها مورد توجه محققان قرار گرفته است و راه‌حل‌های متفاوتی ارائه نموده‌اند. نورتین دوگان یک روش جدید بر اساس تجزیه آدامین-لاپلاس (MLADM) برای حل مدل HIV از آلوده کردن سلول‌های $CD4 + T$ ارائه نموده است [۴]. او به منظور مقایسه جواب‌ها این مدل را با استفاده از روش رونگه کوتای مرتبه (۴) (RK4) نیز حل کرده است. اما چون این مقاله از مرتبه صحیح بوده است، دقت کمتری نسبت به معادلات دیفرانسیل کسری برای نشان دادن نحوه انتشار ویروس HIV دارد. در مقاله حاضر برای نشان دادن دقت روش مورد تحقیق، جواب‌های روش‌های رونگه کوتای مرتبه (۴) و روش تجزیه آدامین-لاپلاس با جواب‌های روش مورد بررسی مقایسه شده‌اند.

از آن‌جا که مدل‌های ریاضی که براساس معادلات دیفرانسیل کسری برای پدیده‌های طبیعی نوشته می‌شوند نسبت به معادلات دیفرانسیل معمولی، بیشتر به واقعیت شبیه هستند، از حل معادلات دیفرانسیل کسری در مسائل فیزیکی و بیولوژیکی نتایج دقیق‌تری به دست می‌آید. به همین دلیل این معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشند [۵، ۶، ۷]. به عنوان مثال آرافا و همکاران تأثیر یک داروی ضدویروس را روی ویروس HIV نوع (۱) با استفاده از یک مدل بر اساس معادلات دیفرانسیل کسری مورد بررسی قرار داده‌اند [۸].

همچنین مدل بیان شده (۱) که مربوط به عملکرد سلول‌های $CD4 + T$ موجود در خون در مقابل ویروس HIV می‌باشد، به صورت دستگاهی از معادلات دیفرانسیل کسری در نظر گرفته شده است [۹].

ما نیز در این مقاله، مدل کسری ارائه شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم و آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۹].

(۲)

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} T(t) = q - \eta T(t) + rT(t) \left(1 - \frac{T(t) + 1}{T_{max}}\right) - kV(t)T(t) \\ D_*^{\alpha_2} I(t) = KV(t)T(t) - \beta I(t) & 0 \leq t \leq R < \infty \\ D_*^{\alpha_3} V(t) = \mu\beta I(t) - \gamma V(t) & 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1 \\ T(0) = T_0, I(0) = I_0, V(0) = V_0 \end{cases}$$

که در آن $D_*^{\alpha} y(t)$ ، مشتق کسری تابع $y(t)$ ، از مرتبه α است و از فرمول کاپوتو برای محاسبه مشتق کسری $D_*^{\alpha} y(t)$ استفاده شده، که به صورت زیر تعریف می‌شود.

(۳)

$$D_*^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} y'(\tau) d\tau$$

در سال‌های اخیر روش‌های عددی مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری ارائه شده است، به عنوان مثال یک روش عددی جدید براساس درون‌یابی لژاندر-اسپلاین برای یافتن جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری به کار رفته است [۱۰].

رسولی و توسلی با استفاده از چندجمله‌ای‌های مونتر- لژاندر و به کار بردن روش تقسیم بازه یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری ارائه نموده‌اند [۹، ۱۰].

برای بررسی روش‌های دیگر می‌توان به مرجع‌های دیگر مراجعه کرد [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵].

کورکسو و همکاران نیز یک رویکرد عددی به همراه تحلیل خطا برای حل معادلات دیفرانسیل انتگرال با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون ارائه نموده‌اند که استفاده از این چندجمله‌ای‌ها موجب به دست آمدن جواب‌های دقیق‌تری برای این نوع معادلات شده است [۱۶].

روش‌هایی که تاکنون برای حل دستگاه معادلات کسری ارائه شده است، پیچیدگی محاسبات زیادی داشتند و جواب‌های به دست آمده از آنها دقت کمتری داشته‌اند.

در مقاله حاضر برای یافتن جواب دقیق‌تر دستگاه (۲) یک روش هم‌محلی براساس چندجمله‌ای‌های دیکسون ارائه می‌شود. این مقاله از بخش‌های زیر تشکیل شده است.

ابتدا چندجمله‌ای‌های دیکسون را تعریف نموده و یک رابطه بازگشتی برای به دست آوردن آنها معرفی می‌شود.

سپس با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون و روش کالوکیشن یک روش حل عددی برای مدل بیان شده، ارائه می‌شود. در بخش بعد نتایج عددی حاصل از حل دستگاه مربوط به مدل ارائه شده بیان می‌شود و این نتایج با نتایج مقالات دیگر مورد مقایسه قرار می‌گیرد و پس از آن به نتیجه‌گیری مقاله می‌پردازیم.

تعریف چند جمله‌ای‌های دیکسون

چندجمله‌ای‌های دیکسون برای اولین بار توسط دیکسون معرفی شدند [۱۶]. چندجمله‌ای‌های دیکسون به دلیل ویژگی‌های خاصشان دارای کاربردهای مختلفی در ریاضیات محض و کاربردی هستند.

چندجمله‌ای‌های دیکسون نوع اول از درجه n و با پارامتر λ (یک عدد حقیقی است) به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۷].

$$d_n(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m} (-\lambda)^m x^{(n-2m)} \quad n \geq 1, -\infty < x < \infty \quad (4)$$

با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون می‌توان چندجمله‌ای‌های دیگری را مانند چندجمله‌ای‌های زیر به دست آورد. به این صورت که اگر $\lambda = 0$ قرار دهیم، چندجمله‌ای‌های دیکسون $d_n(x, 0) = x^n$ بدست می‌آید که همان چندجمله‌ای توانی است و اگر $\lambda = -1$ قرار دهیم، چندجمله‌ای پل لوکاس، $Q_n\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست می‌آید و به ازای $\lambda = 1$ چند جمله‌ای چبیشف نوع اول $2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست می‌آید. همچنین اگر $\lambda = 2$ باشد، چندجمله‌ای‌های فرما-لوکاس $FL_n\left(\frac{x}{3}\right)$ به دست می‌آید [۱۷].

چندجمله‌ای‌های دیکسون را می‌توان با استفاده از رابطه بازگشتی زیر نیز به دست آورد.

$$d_n(x, \lambda) = x d_{n-1}(x, \lambda) - \lambda d_{n-2}(x, \lambda) \quad n \geq 2$$

که در آن $d_1(x, \lambda) = x$ و $d_0(x, \lambda) = 2$ است.

همچنین چندجمله‌ای‌های دیکسون در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر نیز صدق می‌کنند.

$$(x^2 - 4\lambda)d'' + x d' - n^2 d = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

تقریب یک تابع با استفاده از چندجمله‌ای دیکسون

فرض کنید تابع معلوم $f(x)$ موجود باشد که تقریبی از آن به صورت زیر است.

$$\forall \lambda \in R, f(x) \approx g(x) = \sum_{i=0}^n c_i d_i(x; \lambda)$$

که در آن c_i ها مقادیر مجهول هستند و برای به دست آوردن آنها دستگاه معادلات زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$f(\theta_i) = g(\theta_i), \quad i = 0, \dots, n$$

که θ_j ها نقاط چبیشف انتقال داده شده به روی بازه $[0, T]$ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\theta_j = \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right), \quad j = 1, \dots, n$$

به این ترتیب دستگاه $f(\theta_j) = g(\theta_j)$ یک دستگاه معادلات جبری با $n + 1$ معادله و $n + 1$ مجهول تشکیل می‌دهد که با حل کردن آن ضرایب مجهول c_i و $i = 0, \dots, n$ به دست می‌آیند.

روش حل

در این مقاله حل دستگاه معادلات کسری بیان شده در رابطه (۲) انجام می‌شود، به این صورت که ابتدا $T_n(t)$ و $I_n(t)$ و $V_n(t)$ که به ترتیب تقریب‌هایی برای T و I و V هستند، به صورت سری‌های زیر تعریف می‌شوند و در آنها c_i و e_i و f_i ضرایب ثابت مجهول هستند.

$$\begin{aligned} T(t) &\approx T_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i d_i(t; \lambda) \\ I(t) &\approx I_n(t) = \sum_{i=0}^n e_i d_i(t; \lambda) \end{aligned} \quad (5)$$

$$V(t) \approx V_n(t) = \sum_{i=0}^n f_i d_i(t; \lambda)$$

با جای گذاری تقریب‌های بالا (۵) در معادله (۲) داریم:

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} T_n(t) = q - \eta T_n(t) + r T_n(t) \left(1 - \frac{T_n(t) + 1}{T_{max}}\right) - k V_n(t) T_n(t) \\ D_*^{\alpha_2} I_n(t) = k V_n(t) T_n(t) - \beta I_n(t) \\ D_*^{\alpha_3} V_n(t) = \mu \beta I_n(t) - \gamma V_n(t) \\ T_n(0) = T_0, I_n(0) = I_0, V_n(0) = V_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1 \quad (6)$$

در رابطه بالا مشتق‌های کسری $D_*^{\alpha} T_n(t)$ و $D_*^{\alpha} I_n(t)$ و $D_*^{\alpha} V_n(t)$ را با استفاده از فرمول (۳) می‌توانیم به دست آوریم.

نقاط هم‌محلی θ_j را روی بازه $[0, R]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta_j = \frac{R}{2} - \frac{R}{2} \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)$$

که در آن $j = 1, \dots, n$ می‌باشد.

نقاطی که از فرمول بالا به دست می‌آیند، به نقاط چبیشف معروفند.

سپس این نقاط هم‌محلی در معادله (۶) جای گذاری شده و به این ترتیب معادله (۶) به صورت زیر در می‌آید:

(۷)

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_1} T_n(\theta_j) = q - \eta T_n(\theta_j) + r T_n(\theta_j) \left(1 - \frac{T_n(\theta_j) + 1}{T_{max}} \right) - k V_n(\theta_j) T_n(\theta_j) \\ D_*^{\alpha_2} I_n(\theta_j) = k V_n(\theta_j) T_n(\theta_j) - \beta I_n(\theta_j) \\ D_*^{\alpha_3} V_n(\theta_j) = \mu \beta I_n(\theta_j) - \gamma V_n(\theta_j) \\ T_n(0) = T_0, I_n(0) = I_0, V_n(0) = V_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$$

در دستگاه بالا چون c_i و e_i و f_i ($i = 0, 1, \dots, n$) ضرایب ثابت مجهول هستند، پس $3n + 3$ مجهول داریم و تعداد معادلات نیز $3n + 3$ می باشند و با حل دستگاه معادلات فوق با یکی از روش‌های رایج میتوان مقادیر مجهول c_i و e_i و f_i ($i = 0, 1, \dots, n$) را به دست آورد و با جای‌گذاری آنها در روابط (۵) می‌توان جواب‌های تقریبی T_n و I_n و V_n را به دست آورد.

تحلیل خطا

جواب‌های تقریبی به دست آمده باید در مدل صدق کنند. به همین دلیل در این قسمت برای بررسی تحلیل خطا، توابع $E_1(t)$ و $E_2(t)$ و $E_3(t)$ را برای هر یک از معادلات مدل ارائه شده به صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \left| D_*^{\alpha_1} T_n(t) - q + \eta T_n(t) - r T_n(t) \left(1 - \frac{T_n(t) + 1}{T_{max}} \right) + k V_n(t) T_n(t) \right| \\ E_2(t) &= \left| D_*^{\alpha_2} I_n(t) - k V_n(t) T_n(t) + \beta I_n(t) \right| \\ E_3(t) &= \left| D_*^{\alpha_3} V_n(t) - \mu \beta I_n(t) + \gamma V_n(t) \right| \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1 \end{aligned}$$

با توجه به مطالب بیان شده، باید داشته باشیم $E_1(t) \approx 0$ و $E_2(t) \approx 0$ و $E_3(t) \approx 0$ که این موضوع در بخش بعدی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

نتایج عددی

در این قسمت روش بیان شده در قسمت قبل، برای حل معادله (۲) را به کار می‌بریم و نتایج به دست آمده برای $R = 1, \lambda = 1$ در ادامه ارائه می‌شود.

به دلیل عدم وجود جواب دقیق برای دستگاه (۲) مقادیر اولیه و پارامترهای ارائه شده در سایر مقالات مشابه را که در ادامه آمده است برای حل معادله (۲) بکار می‌بریم. مقادیر اولیه مورد نیاز در جدول (۲) ارائه شده است.

جدول (۲)

| مقادیر اولیه | پارامتر مورد استفاده در مدل |
|--------------|-----------------------------|
| 0.1 | T_0 |
| 0 | I_0 |
| 0.1 | V_0 |
| 0.1 | q |
| 0.02 | η |
| 0.3 | β |
| 3 | r |
| 2.4 | γ |
| 0.00027 | k |
| 1500 | T_{max} |
| 10 | μ |

در جدول‌های (۳)، (۴) و (۵) مقادیر عددی به دست آمده برای $\alpha = 1$ نشان داده شده است و همچنین این جواب‌ها با جواب‌های عددی ارائه شده در مقالات دیگر مورد مقایسه گرفته است، همچنین جدول‌های (۶)، (۷) و (۸) جواب‌های به دست آمده برای T_n و I_n و V_n را به ازای $n = 15$ و $\lambda = 0$ و $\alpha = 0.75$ و $\alpha = 0.85$ و $\alpha = 0.95$ و $\alpha = 1$ نمایش می‌دهند و با مقادیر به دست آمده در رفرنس [۹] مقایسه شده‌اند. مقادیر به دست آمده در جدول‌های (۶)، (۷) و (۸) نشان می‌دهند که با نزدیک شدن α به سمت 1 جواب‌های تقریبی به دست آمده نیز به سمت جواب‌های تقریبی به ازای $\alpha = 1$ میل می‌کنند.

جدول (۳): مقایسه مقادیر $T(t)$ با استفاده از روش بیان شده و سایر روش‌ها برای $\alpha = 1$

| t | روش حاضر | روش [۹] | روش رونگه کوتای مرتبه ۴ | VIM [۲] | روش [۳] | روش آدمین-لاپلاس [۱۸] |
|-----|---------------|-------------|-------------------------|--------------|---------------|-----------------------|
| 0.0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 0.2 | 0.20880808433 | 0.208808084 | 0.20880880833 | 0.2088073214 | 0.2038616561 | 0.208872731 |
| 0.4 | 0.40624054279 | 0.406240543 | 0.4062405393 | 0.4061346587 | 0.3803309335 | 0.4061052625 |
| 0.6 | 0.76442389850 | 0.766442390 | 0.7644238890 | 0.7624530350 | 0.69546223767 | 0.7611467713 |
| 0.8 | 1.41404685190 | 1.414046852 | 1.4140468310 | 1.3978805880 | 1.275964442 | 1.3773198590 |
| 1 | 2.59159485170 | 2.591559480 | 2.5915948020 | 2.506466690 | 2.382277428 | 2.3291697610 |

جدول (۴): مقایسه $I(t)$ با استفاده از روش بیان شده و سایر روشها برای $\alpha = 1$

| t | روش آدومین-لاپلاس [۱۹] | روش [۳] | VIM [۲] | روش رونگه کوتای مرتبه ۴ | روش [۹] | روش حاضر |
|-----|------------------------|-----------------|-----------------|-------------------------|----------------|------------------|
| 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.603270728e-5 | 0.6247872100e-5 | 0.6032634366e-5 | 0.6032702150e-5 | 0.603270224e-5 | 0.6032702241e-5 |
| 0.4 | 0.131591617e-4 | 0.1293552225e-5 | 0.1314878543e-4 | 0.1315834073e-4 | 0.131583409e-4 | 0.13158340937e-4 |
| 0.6 | 0.212683688e-4 | 0.2035267183e-4 | 0.2101417193e-4 | 0.2122378506e-4 | 0.212237854e-4 | 0.21223785438e-4 |
| 0.8 | 0.300691867e-4 | 0.2837302120e-4 | 1.2795130456e-4 | 0.3017741955e-4 | 0.301774201e-4 | 0.30177420110e-4 |
| 1 | 0.398736542e-4 | 0.3690842367e-4 | 0.2431562317e-4 | 0.4003781468e-4 | 0.400378155e-4 | 0.40037815480e-4 |

جدول (۵): مقایسه $V(t)$ با استفاده از روش بیان شده و سایر روشها برای $\alpha = 1$

| t | روش آدومین-لاپلاس [۱۹] | روش [۲] | VIM [۲] | روش رونگه کوتای مرتبه ۴ | روش [۹] | روش حاضر |
|-----|------------------------|---------------|---------------|-------------------------|--------------|---------------|
| 0.0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 0.2 | 0.06187996025 | 0.06187991856 | 0.06187995314 | 0.06187984331 | 0.061879843 | 0.06187984322 |
| 0.4 | 0.03831324883 | 0.03829493490 | 0.03830820126 | 0.03829488788 | 0.038294888 | 0.03829488777 |
| 0.6 | 0.02439174349 | 0.02370431860 | 0.02392029257 | 0.02370455014 | 0.023704550 | 0.02370455004 |
| 0.8 | 0.009967218934 | 0.01467956982 | 0.01621704553 | 0.01468036377 | 0.014680364 | 0.01468036368 |
| 1 | 0.003305076447 | 0.02370431861 | 0.01608418711 | 0.009100845043 | 0.0091008450 | 0.00910084500 |

جدول (۶): مقایسه مقادیر به دست آمده $T(t)$ با استفاده از روش حاضر و روش مونتز

| t | $\alpha = 0.75$ | | $\alpha = 0.85$ | | $\alpha = 0.95$ | | $\alpha = 1$ |
|-----|-----------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|--------------|--------------|
| | Present Method | Muntz Method | Present Method | Muntz Method | Present Method | Muntz Method | |
| 0.0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 0.2 | 0.3645697 | 0.3670560 | 0.2781874 | 0.2790315 | 0.2270366 | 0.2272514 | 0.2088081 |
| 0.4 | 0.9361864 | 0.9419131 | 0.6229638 | 0.6246844 | 0.4602312 | 0.4606339 | 0.4062405 |
| 0.6 | 2.2724237 | 2.2858520 | 1.3282599 | 1.3317891 | 0.8972132 | 0.8979687 | 0.7644239 |
| 0.8 | 5.4046402 | 5.4360892 | 2.7763784 | 2.7836259 | 1.7173925 | 1.8178109 | 1.4140468 |
| 1 | 12.7110109 | 12.784070 | 5.7471055 | 5.7619568 | 3.5263502 | 3.2590105 | 2.5915949 |

جدول (۷): مقادیر به دست آمده مقادیر $I(t)$ با استفاده از روش حاضر و روش مونتز

| t | $\alpha = 0.75$ | | $\alpha = 0.85$ | | $\alpha = 0.95$ | | $\alpha = 1$ |
|-----|-----------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|--------------|--------------|
| | Present Method | Muntz Method | Present Method | Muntz Method | Present Method | Muntz Method | |
| 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 1.2063066e-5 | 1.2151979e-5 | 8.8720752e-6 | 8.9043994e-6 | 6.8197683e-6 | 6.8290042e-6 | 6.0327022e-6 |
| 0.4 | 2.8057918e-5 | 2.8204527e-5 | 1.9343576e-5 | 1.9385818e-5 | 1.4736133e-5 | 1.4746964e-5 | 1.3158341e-5 |
| 0.6 | 5.5477476e-5 | 5.5742298e-5 | 3.3803924e-5 | 3.3864401e-5 | 2.4142790e-5 | 2.4155672e-5 | 2.1223785e-5 |
| 0.8 | 1.0646102e-4 | 1.0695931e-4 | 5.5311011e-5 | 5.5403434e-5 | 3.5569645e-5 | 3.5585428e-5 | 3.0177420e-5 |
| 1 | 2.0564037e-4 | 2.0660978e-4 | 8.9115050e-5 | 8.9263406e-5 | 4.9885851e-5 | 4.9905893e-5 | 4.0037815e-5 |

جدول (۸): مقادیر به دست آمده $V(t)$ با استفاده از روش حاضر و روش مونتز

| t | $\alpha = 0.75$ | | $\alpha = 0.85$ | | $\alpha = 0.95$ | | $\alpha = 1$ |
|-----|-----------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|--------------|--------------|
| | Present Method | Muntz Method | Present Method | Muntz Method | Present Method | Muntz Method | |
| 0.0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 0.2 | 0.0497882 | 0.0496485 | 0.0543246 | 0.0542264 | 0.0593022 | 0.0592643 | 0.0618798 |
| 0.4 | 0.0336711 | 0.0335988 | 0.0350109 | 0.0349582 | 0.0370092 | 0.0369869 | 0.0382949 |
| 0.6 | 0.0251476 | 0.0251079 | 0.0243529 | 0.0243227 | 0.0238116 | 0.0237983 | 0.0237046 |
| 0.8 | 0.0199646 | 0.0199388 | 0.0179229 | 0.0179038 | 0.0157670 | 0.0157587 | 0.0146804 |
| 1 | 0.0165526 | 0.0165367 | 0.0138080 | 0.0137958 | 0.0107561 | 0.0107509 | 0.0091008 |

در جدول‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) مقادیر تقریبی به دست آمده برای $T(0,5)$ ، $V(0,5)$ و $I(0,5)$ به ازای $\alpha = 1$ و مقادیر مختلف λ و n نمایش داده شده است.

جدول (۹): مقادیر تقریبی به دست آمده برای $T(0, 5)$

| $n \backslash \lambda$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| -1 | 0.568397692 | 0.5588633563 | 0.5588633582 | 0.5588633582 | 0.5588633582 |
| 0 | 0.5683977053 | 0.5588633558 | 0.5588633580 | 0.5588633584 | 0.5588633582 |
| 1 | 0.568397722 | 0.5588633507 | 0.5588633440 | 0.5588633579 | 0.55886334 |
| 2 | 0.56839778 | 0.5588632271 | 0.5588633582 | 0.5588633582 | 0.5588633582 |

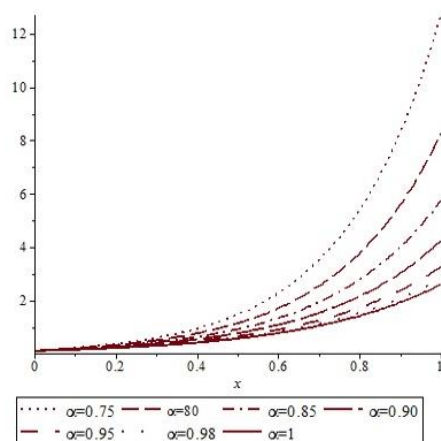
جدول (۱۰): مقادیر تقریبی بدست آمده برای $V(0, 5)$

| $n \backslash \lambda$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|------------------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|
| -1 | 0.1745606886e-4 | 0.1707873571e-4 | 0.1707873578e-4 | 0.1707873578e-4 | 0.1707873578e-4 |
| 0 | 0.1745606910e-4 | 0.1707873570e-4 | 0.1707873579e-4 | 0.1707873579e-4 | 0.1707873578e-4 |
| 1 | 0.1745606951e-4 | 0.1707873556e-4 | 0.17078733512e-4 | 0.1707873424e-4 | 0.17072e-4 |
| 2 | 0.1745607102e-4 | 0.1707873501e-4 | 0.1707873578e-4 | 0.1707873578e-4 | 0.1707878e-4 |

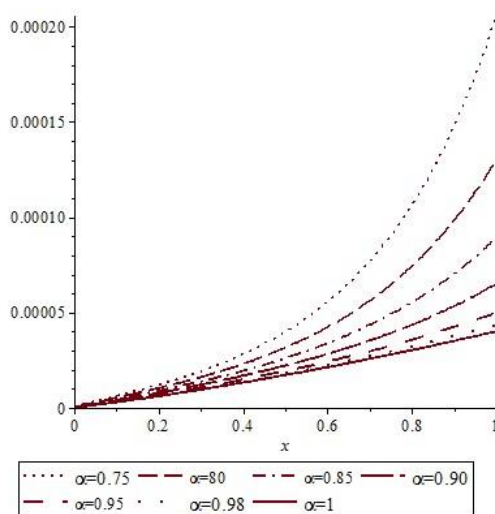
جدول (۱۱): مقادیر تقریبی به دست آمده برای $I(0, 5)$

| $n \backslash \lambda$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| -1 | 0.03013332997 | 0.03012787376 | 0.03012787386 | 0.03012787383 | 0.0301278738 |
| 0 | 0.03013332999 | 0.3012787387 | 0.03012787382 | 0.03012787380 | 0.0301278738 |
| 1 | 0.03013332888 | 0.03012787441 | 0.03012787380 | 0.03012787383 | 0.030127877 |
| 2 | 0.0301333301 | 0.03012787465 | 0.03012787383 | 0.03012787383 | 0.030127873 |

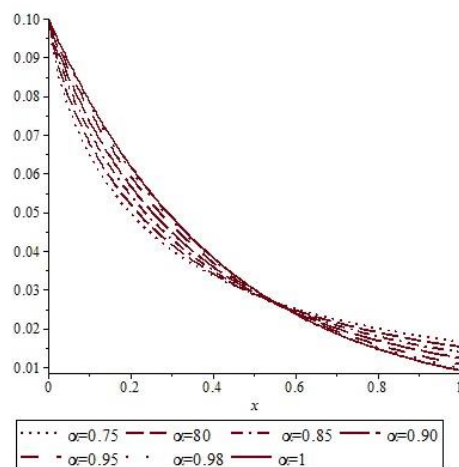
در شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب نمودارهای به دست آمده برای جواب‌های تقریبی $T_n(t)$ و $I_n(t)$ و $V_n(t)$ به ازای $n = 15$ و مقادیر مختلف α نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود با نزدیک شدن α به سمت عدد یک، نمودار جواب‌های تقریبی به دست آمده نیز به سمت نمودار جواب به دست آمده به ازای $\alpha = 1$ میل می‌کند.



شکل (۱). نمودار جواب‌های تقریبی $T(t)$ برای α های مختلف و $n = 15$

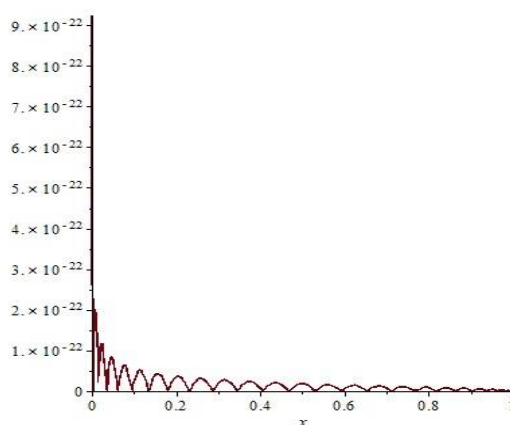


شکل (۲). نمودار جواب‌های تقریبی $I(t)$ برای α های مختلف و $n = 15$

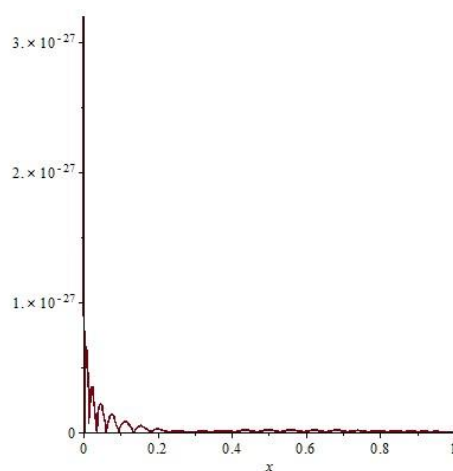


شکل (۳). نمودار جواب‌های تقریبی $V(t)$ برای α های مختلف و $n = 15$

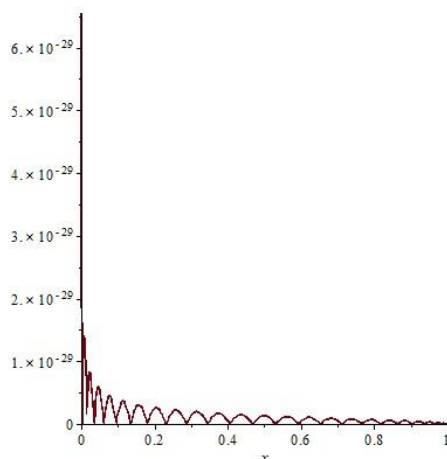
در شکل‌های (۴)، (۵) و (۶) توابع خطای تعریف شده در بخش تحلیل خطا برای $\alpha = 1$ ، $n = 25$ به ازای $\lambda = 1$ نمایش داده میشود.



شکل (۴). نمودار تابع $E_1(t)$ برای $\alpha = 1$ ، $n = 25$ به ازای $\lambda = 1$



شکل (۵). نمودار تابع $E_2(t)$ برای $\alpha = 1$ ، $n = 25$ به ازای $\lambda = 1$



شکل (۶). نمودار تابع $E_3(t)$ برای $\alpha = 1$, $n = 25$ به ازای $\lambda = 1$

نتیجه‌گیری

در این مقاله روش حل عددی برای یافتن جواب‌های تقریبی از مدل *HIV* بصورت دستگاهی از معادلات دیفرانسیل کسری ارائه شده است. چون جواب دقیقی برای این مدل در دسترس نیست، به همین علت جواب‌های بدست آمده با جواب‌های ارائه شده در مقالات دیگر مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج به دست آمده در جدول‌های (۳)، (۴)، (۵)، (۶)، (۷) و (۸) نشانگر آن است که جواب‌های تقریبی به دست آمده از روش ارائه شده تطابق خوبی با نتایج سایر مقالات مشابه دارد. همچنین در این مقاله توابع خطایی به منظور تحلیل خطای جواب‌های تقریبی به دست آمده از دستگاه معادلات بیان شد. این توابع خطا نشان می‌دهند که جواب‌های تقریبی به دست آمده با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله از دقت خوبی برخوردار می‌باشند. به علاوه روش بیان شده در این مقاله را می‌توان برای یافتن جواب‌های تقریبی دستگاه‌های دیگر از معادلات کسری نیز به کار برد.

References

1. Wang L., Li M. Y., "Mathematical Analysis of the Global Dynamics of a Model for HIV Infection of CD4+T Cells", *Mathematical Biosciences*, 200(1) (2006) 44-57.
2. Merdan M., Gokdogan A., Yildirim A., "On the Numerical Solution of the Model for HIV Infection of CD4+T Cells", *Computers and Mathematics with Applications*, 62(1) (2011) 118-123.

3. Yuzbasi S., "A numerical approach to solve the model for HIV infection of CD4+Tcells", Applied Mathematical Modelling, 36(12) (2012) 5876-5890.
4. Dogan N., "Numerical Treatment of the Model for HIV Infection of CD4+T Cells by Using Multistep Laplace Adomian Decomposition Method", Discrete Dynamics in Nature and Society Volume 2012, Article ID 976352 (2012) 11 pages.
5. Kajani M. T., Maleki M., Kilicman A., "A Multiple-step Legendre-Gauss Collocation Method for Solving Volterra's Population Growth Model", Math. Prob. Eng. (2013) 1-6.
6. Kajani M. T., Vahdati S., Abbas Z., Maleki M., "Application of Rational Second Kind Chebyshev Functions for System of Integro-differential Equations on Semi-Infinite Intervals", Journal of Applied Mathematics, (2012) 1-11.
7. Kajani M. T., Maleki M., Allame M., "A Numerical Solution of Falkner-Skan Equation via a Shifted Chebyshev Collocation Method", AIP ConfProc, 1629 (2014) 381- 386.
8. Arafa A.A.M., Rida S.Z., Khalil M., "The effect of anti-viral drug treatment of human immunodeficiency virus type 1 (HIV-1) described by a fractional order model", Applied Mathematical Modelling, 37 (2013) 2189–2196.
9. Gandomani M.R., kajani M.T., "Numerical Solution of a Fractional Order Model of HIV Infection of CD4+T Cells Using Muntz-Legendre Polynomials", International Journal of Bioautomation, 20(2) (2016) 193-204.
10. Gandomani M.R., kajani M.T, "Application of shifted Muntz-Legendre Polynomials For Solving fractional Differential Equations", International Journal of pure and Applied Mathematics, 103(2) (2015) 263-279.
11. Kareem R.S., "Numerical Methods for Fractional Differential Equations", International Journal of Computer Science and Network Security, VOL.14 (1) (2014) 42-45.
12. Zurigat M., Momani Sh., Alawneh A., "Analytical approximate solutions of systems of fractional algebraic differential equations by homotopy analysis method", Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 1227_1235.
13. Liu S. , Wang G., Zhang L., "Existence results for a coupled system of nonlinear neutral fractional differential equations", Applied Mathematics Letters, 26 (2013) 1120–1124.

14. John T. Edwards, Neville J. Ford, A. Charles Simpson, "The numerical solution of linear multi-term fractional differential equations: systems of equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 148 (2002) 401–418.
15. Momani Sh., Al-Khaled K., "Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method", *Applied Mathematics and Computation* 162 (2005) 1351–1365.
16. kurkcü O. k., Aslan E., sezar M., "A Numerical Approach With Error Estimation To Solve General Integro-Differential-Difference Equations using Dickson Polynomials", *Applied Mathematics And Computation*, 276(2016) 324-339.
17. Lidl R., Mullen G.L., Turnwald G., "Dickson Polynomials", *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics* 65, Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, (1993).
18. Ongun M. Y., "The Laplace Adomian Decomposition Method for Solving a Model for HIV Infection of CD4+T Cells", *Mathematical and Computer Modelling*, 53(6) (2011) 597- 603.