Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Non-divisibility of abelian groups

Mohammad reza Vedadi[1]✉, Yaser Tolooei [2]

1. Faculty of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

✉E-mail: mrvedadi@iut.ac.ir

2. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Razi University, Kermanshah, Iran.

E-mail: y.toloei@razi.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
28 July 2020
Revised form:
18 January 2021
Accepted:
19 January 2021
Published online:
21 May 2022

Keywords:
Absolutely non-divisible group;
fully non-divisible group;
p-divisible group;
pradical.

ABSTRACT

Introduction

In Throughout all groups are abelian. Suppose that G is a group and n is a positive integer. For $a \in G$, if we consider the solution of the equation $nx = a$ in G, two subsets of G are proposed. One of them is $\{a \in G \mid \exists x \in G, nx = a\}$ and the other is $\{x \in G \mid nx = a\}$ for given $a \in G$. The first is nG, which is clearly a subgroup of G, but the second does not have to be a subgroup. However, if we replace the equation $nx = a$ with $nx \in < a >$ then we come to the equation $nx = 0$ in the group, whose solutions determine a subgroup of (hence of G). In this regard, we state something about divisibility from [2]. Let a is an element in a group G. The element a is called divisible whenever for every $n \geq 1$ there exists $x \in G$ such that $nx = a$. Also a is called torsion whenever there exists positive integer m such that a is a solution of the equation $mx = 0$. The group G is then called divisible (resp. torsion) if every element in G is divisible (resp. torsion). Furthermore, G is called reduced (resp. torsionfree) if it has no non-zero divisible (resp. torsion) subgroup. Therefore, G is divisible if and only if $nG = G$ for every $n \geq 1$. As canonical examples, we can mention the additive group Q and. Here, is the subgroup of Q/Z generated by {1/pi + }. Also, and all proper subgroup of Q are reduced; [1] and [2] are excellent references on the subject. Suppose that $n \geq 1$. It is easy to verify that $nG = G$ if and only if $pG = G$ for every prime number $p \mid n$. This follows that G is divisible if and only if $pG = G$ for every prime number p. Thus G is non − divisible if there exists a prime number q such that $qG \neq G$. Based on the above, we may define the divisibility (non-divisibility) with respect to a number.

Definition 1.1. Let $n \geq 1$ a group G is called:

(a) n-divisible if $nG = G$.

(b) Fully non-divisible if $pG \neq G$ for every prime number p.

(c) Absolutely non-divisible if $pH \neq H$ for every prime number p and non-zero subgroup H of G.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

Thus, we deal with three class of groups as blow:

{Absolutely non-divisible groups} ⊆ {Fully non-divisible} ∩ {Reduced groups}.

Examples are presented to show that these three classes are mutually distinct.

main results

Definition 2.1. *For every prime number p, let* $rad_p(G) = \cap_{n\geq 1} p^n G$ *and* $T_p(G)$*, the sum of all p-divisible subgroups of G.* D_n *be the class of all n-divisible groups and* F_p *be the class of all groups G with* $T_p(G) = \{0\}$*. Let* $D = \{G \mid G = \sum_{H \leqslant G} H$ *such that* $H \in \cup_{n\geq 1} D_n\}$ *and* C_p *be the class of all groups G with* $rad_p(G) = \{0\}$*.*

Theorem 2.2. *Let p be a prime number.*

(a) *For every group homomorphism* $f: G_1 \to G_2$ *we have* $f(\mathrm{rad}_p(G_1)) \subseteq \mathrm{rad}_p(G_2)$*. Furthermore* $rad_p(G)$ *is a fully invariant subgroup of G.*

(b) *For every* $H \leqslant G$ *we have* $\mathrm{rad}_p(H) \subseteq \mathrm{rad}_p(G)$*. Also if* $G = H \oplus K$ *then* $\mathrm{rad}_p(H) = H \cap \mathrm{rad}_p(G)$*.*

(c) $\mathrm{rad}_p(\bigoplus_{i\in I} G_i) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{rad}_p(G_i)$.

(d) $\mathrm{rad}_p(\prod_{i\in I} G_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{rad}_p(G_i)$.

(e) $pG = G$ *if and only if* $\mathrm{rad}_p(G) = G$ *if and only if* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}_p) = \{0\}$.

(f) *For every* $H \leqslant G$ *we have* $\frac{\mathrm{rad}_p(G)+H}{H} \subseteq \mathrm{rad}_p(\frac{G}{H})$*. Also, if* $H \subseteq \mathrm{rad}_p(G)$ *then* $\frac{\mathrm{rad}_p(G)}{H} = \mathrm{rad}_p(\frac{G}{H})$*. Furthermore* $\frac{G}{\mathrm{rad}_p(G)} = \{0\}$.

(g) $\mathrm{rad}_p(G) = \mathrm{Rej}(G, C_p)$.

(h) $\mathrm{rad}_p(G) = \mathrm{Rej}(G, \{\mathbb{Z}_{p^i}\}_{i\geq 1})$.

Theorem 2.3. *Let p be a prime number.*

(a) *The class of p-divisible groups is closed under direct sum and homomorphic image.*

(b) *For every group G,* $\mathrm{T}_p(G)$ *is p-divisible and we have* $\mathrm{T}_p(G) \subseteq \mathrm{rad}_p(G)$*. Furthermore* $\mathrm{T}_p(\mathrm{rad}_p(G)) = \mathrm{rad}_p(\mathrm{T}_p(G)) = \mathrm{T}_p(G)$*.*

(c) *If G is a p-torsionfree group, then* $\mathrm{rad}_p(G)$ *is a p-divisible subgroup and* $\mathrm{rad}_p(G) = \mathrm{T}_p(G)$*.*

(d) *Let G be a p-torsionfree group and* $H \leq G$*.* $H \subseteq \mathrm{rad}_p(G)$ *if and only if* $\mathrm{rad}_p(G) = \mathrm{rad}_p(H)$*. Furthermore* $\mathrm{rad}_p(\mathrm{rad}_p(G)) = \mathrm{rad}_p(G)$*.*

(e) *If* $\mathrm{T}_p(G) = \{0\}$*, then p divide the order of every torsion element in G.*

(f) *Let p and q be two different prime numbers. If* $\mathrm{T}_p(G) = \mathrm{T}_q(G) = \{0\}$*, then* $\mathrm{rad}_p(G) = \mathrm{rad}_q(G) = \{0\}$*.*

(g) $T_p(\frac{G}{T_p(G)}) = \{0\}$.

Theorem 2.4. *For every prime number p,* (D_p, F_p) *is a torsion theory.*

Theorem 2.5. *Every absolutely non-divisible group G is torsion free and so G is isomorphic to a subgroup of* $\mathbb{Q}^{\Lambda}$*.*

Theorem 2.6. *The following statements are equivalent for every group G.*

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

(a) *G is absolutely non-divisible,*

(b) *for every prime number p,* $\mathrm{rad}_q(G) = \{0\}$,

(c) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D, G) = \{0\}$.

Theorem 2.7. *The class of absolutely non-divisible is closed under direct product and subgroup.*

Theorem 2.8. *If H and G/H are absolutely non-divisible groups then G is absolutely non-divisible group.*

Theorem 2.9. *For every group G the following statements hold.*

(a) $\mathrm{T}_q(G) \subseteq \cap_{n\geq 1}\mathrm{rad}_p^n(G)$.

G is an absolutely non-divisible group if and only if for every prime number p there exists a natural number n such that $\cap_{n\geq 1}\mathrm{rad}_p^n(G)$ *is absolutely non-divisible.*

For $H \leqslant \mathbb{Q}$ and prime number p, let $B_p(H) = \{t \in \mathbb{N} \mid \exists \frac{m}{n} \in H, (m,n) = 1, p^t \mid n\}$, and $b_p(H) = |B_p(H)|$.

Theorem 2.10. *Let $\{0\} \neq G \leq \mathbb{Q}$ G is absolutely non-divisible if and only if for every prime number p, $b_p(G)<\infty$.*

How to cite: Vedadi, M. R., & Tolooei, Y. (2022). Non-divisibility of abelian groups. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-15.

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نابخش‌پذیری گروه‌های آبلی

محمدرضا وادی[1] ✉، یاسر طلوعی[2]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضیات، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران. پست الکترونیکی: mrvedadi@iut.ac.ir
۲. گروه ریاضیات، دانشکدهٔ علوم ریاضی ، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران. پست الکترونیکی: y.toloei@razi.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۰۷
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۲۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۳۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:
گروه p–بخش‌پذیر،
p–رادیکال،
مطلقاً نابخش‌پذیر،
تماماً نابخش‌پذیر.

چکیده

در سرتاسر متن گروه‌ها آبلی هستند. گروه G را –n بخش‌پذیر گوئیم هرگاه. گروه G را مطلقاً نابخش‌پذیر گوئیم هرگاه برای هر، فاقد زیرگروه ناصفر –n بخش‌پذیر باشد. در بررسی کلاس C متشکل از تمام گروه‌های مطلقاً نابخش‌پذیر مانند G، به زیرگروه‌های جمع تمام زیرگروه‌های -p بخش‌پذیر و (برای هر عدد اوّل p) بر می‌خوریم. خواص این دو زیرگروه به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است و برای کلاس تمام گروه‌های بخش‌پذیر و کلاس متشکل از تمام گروه‌ها با، ثابت می‌کنیم زوج یک نظریه تاب است. کلاس C تحت هر جمع مستقیم و هر حاصل‌ضرب بسته است و اگر آن‌گاه نشان می‌دهیم. همچنین ثابت می‌شود که اگر و تنها اگر برای هر p، اگر و تنها اگر. سرانجام مشخص‌سازی دیگری برای زیرگروه‌هایی از Q (اعداد گویا) که به C تعلق دارند، بیان شده است. مثال‌های متنوع نیز جهت توصیف نتایج آورده شده است.

استناد: وادی، محمدرضا؛ طلوعی، یاسر؛ (۱۴۰۱). نابخش‌پذیری گروه‌های آبلی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۵-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

۱. مقدمه

در این نوشتار تمام گروه‌ها آبلی هستند. فرض کنید که G یک گروه باشد، و n یک عدد طبیعی وقتی به جواب معادله $n.x = a$ $(a \in G)$ در گروه G توجه می‌کنیم، دو زیرمجموعه از G مطرح می‌شوند. زیرمجموعه اوّل تمام اعضای مثل a هستند که برای آنها معادله فوق دارای حداقل یک جواب در G است. این زیرمجموعه همان nG است و به وضوح یک زیرگروه G است. زیرمجموعه دوّم تمام جواب‌های معادله $n.x = a$ برای یک عضو داده شده a است. مجموعه دوّم لزوماً یک زیرگروه G نیست. ولی اگر معادله را به رابطه $n.x \in \langle a \rangle$ تبدیل کنیم به‌طور معادل به معادله $n.x = 0$ در گروه $G/\langle a \rangle$ اشاره دارد که مجموعه جواب‌های آن می‌تواند زیرگروهی از G مشخص کند. در همین راستا و در ابتدای مقدمه مطالبی را از کتاب [۲] در مورد بخش‌پذیری در یک گروه می‌نویسیم. عضو a از گروه G را **بخش‌پذیر** گویند هرگاه برای هر عدد طبیعی n معادله $n.x = a$ حداقل یک جواب در G داشته باشد. عضو a در G را **تابدار** گویند هرگاه عدد طبیعی m موجود باشد به‌طوری‌که a یک جواب معادله $m.x = 0$ باشد. هرگاه تمام عناصر G بخش‌پذیر (تابدار) باشند آنگاه G را بخش‌پذیر (تابدار) گویند. همچنین گروه‌هایی که فاقد زیرگروه ناصفر بخش‌پذیر (تابدار) هستند را **کاهش یافته (از تاب آزاد)** گویند. بنابراین G بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر $nG = G$ برای هر $n \geq ۱$.

به عنوان مثال‌های متعارف از گروه‌های بخش‌پذیر می‌توان به گروه جمعی اعداد گویا $\mathbb{Q}$ و گروه $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (p یک عدد اوّل) نام برد، در اینجا $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ زیرگروه تولید شده توسط $\{\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z}\}_{i \geq 1}$ در گروه خارج قسمتی $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ است. همچنین $\mathbb{Z}_n$ و تمام زیرگروه‌های سره از $\mathbb{Q}$ کاهش یافته هستند. برای مطالعه بیشتر در این خصوص مراجع [۱] و [۲] مناسب هستند. فرض کنید $n \geq ۱$، به راحتی می‌توان دید $nG = G$ اگر و تنها اگر برای هر عدد اوّل p که $p|n$ داشته باشیم $pG = G$ این نتیجه می‌دهد که گروه G بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر عدد اوّل p داشته باشیم $pG = G$. بنابراین G **نابخش‌پذیر** است اگر عدد اوّل q موجود باشد به‌طوری‌که $qG \neq G$. با توجه به این مطالب، بخش‌پذیری (نابخش‌پذیری) را می‌توان نسبت به یک عدد تعریف کرد.

تعریف ۱. ۱. فرض کنید n یک عدد طبیعی و G یک گروه باشد. گروه G را،

الف: n- **بخش‌پذیر** گوییم هرگاه $nG = G$.

ب: **تماماً نابخش‌پذیر** گوییم هرگاه برای هر عدد اوّل p داشته باشیم $pG \neq G$.

ج: **مطلقاً نابخش‌پذیر** گوییم هرگاه برای هر عدد اوّل p و هر زیرگروه ناصفر H از G داشته باشیم $pH \neq H$.

واضح است که

{گروه‌های کاهش یافته } ⋂ {گروه‌های تماماً نابخش‌پذیر } ⊆ {گروه‌های مطلقاً نابخش‌پذیر }

ولی مثال‌های ارائه شده نشان می‌دهد که این سه کلاس از گروه‌ها دو به دو متمایز هستند. توجه ما در بخش سوّم این نوشتار به گروه‌های مطلقاً نابخش‌پذیر است که گروه‌هایی از تاب آزاد هستند. به راحتی دیده می‌شود که گروه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \cdots$ کاهش یافته و تماماً نابخش‌پذیر است. اگر برای هر گروه G، مجموعه P_G را به صورت

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

$$\mathbb{P}_G = \{p \in \mathbb{N} | pG = G, \text{عدد اوّل } p\}$$

در نظر بگیریم، در ادامه مثال‌هایی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهند، گروه جمعی $\mathbb{Q}$ دارای زیرگروه‌های سره‌ای مانند G است به‌طوری‌که P_G آنها تهی یا یک عضوی است و در عین حال G شامل زیرگروه‌هایی مانند H است که برای آنها P_H بی‌نهایت عضوی است.

مثال ۱. ۲.

۱ـ $\mathbb{Z}$ یک گروه مطلقاً نابخش‌پذیر است.

۲ـ زیرگروه تولید شده توسط مجموعه $\{1/p \mid \text{عدد اوّل } p\}$ از $\mathbb{Q}$ یک گروه مطلقاً نابخش‌پذیر است. (قضیه ۱۱.۳ را ببینید).

۳ـ برای هر عدد اوّل p زیرگروه تولید شده از $\mathbb{Q}$ توسط مجموعه $\{1/p^i\}_{i\geq 1}$ را با A_p نشان می‌دهیم. A_p یک گروه $p-$ بخش‌پذیر است ولی هر عدد اوّل q متمایز با p داریم $qA_p \neq A_p$ (در واقع $1/p \notin qA_p$).

۴ـ فرض کنید p یک عدد اوّل و $\mathbb{Z}_{(p)} := \{m/n \in \mathbb{Q} | p \nmid \frac{n}{d}, d = gcd(m,n)\}$ در این صورت برای هر عدد اوّل $p \neq q$ داریم $q\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}$ ولی $p\mathbb{Z}_{(p)} \neq \mathbb{Z}_{(p)}$.

۵ـ اگر p و q دو عدد اوّل متمایز باشند، به وضوح $q\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$ ولی $p\mathbb{Z}_p = \{0\}$.

۶ـ اگر p و q دو عدد اوّل متمایز باشند $A_p + A_q$ تماماً نابخش‌پذیر است ولی مطلقاً نابخش‌پذیر نیست. توجه کنید اگر γ یک عدد اوّل غیر از p و q باشد آنگاه $\gamma(A_p + A_q) \neq A_p + A_q$. زیرا برای اعداد صحیح s و t داریم $\gamma(\frac{n}{p^\alpha} + \frac{m}{q^\beta}) = \frac{1}{pq}$ آنگاه $\gamma \mid p^\alpha q^\beta$، تناقض. به‌طور مشابه ثابت می‌شود $p(A_p + A_q) \neq A_p + A_q$.

مقدمه را با چند لم و گزاره که در بخش‌های بعد از آنها استفاده می‌کنیم به پایان می‌بریم. بخش دوّم اختصاص دارد به مطالعه دو زیرگروه $\bigcap_{n\geq 1} p^n G$ و $\sum\{H \leq G \mid pH = H\}$ از یک گروه G که برای مطالعه گروه‌های مطلقاً نابخش‌پذیر ضروری است. لم زیر خاصیت مهمی از گروه‌های نابخش‌پذیر را بیان می‌کند.

لم ۱. ۳. گروه G نابخش‌پذیر است اگر و تنها اگر حداقل یک زیرگروه ماکسیمال داشته باشد.

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنید G گروهی نابخش‌پذیر باشد. بنابراین عدد اوّلی مانند p وجود دارد به‌طوری‌که $pG \neq G$. این نتیجه می‌دهد گروه آبلی G/pG را می‌توان به عنوان یک فضای برداری ناصفر روی میدان $\mathbb{Z}_p$ در نظر گرفت. حال اگر X یک پایه برای G/pG روی $\mathbb{Z}_p$ باشد و $x_1 \in X$، در این‌صورت واضح است که زیرگروه تولید شده توسط $X \setminus \{x_1\}$ در G/pG ماکسیمال است. لذا G/pG و در نتیجه G یک زیرگروه ماکسیمال دارد.

$(\Rightarrow)$ اگر H زیرگروه ماکسیمال G باشد آنگاه عدد اوّل p موجود است به‌طوری‌که $G/H \simeq \mathbb{Z}_p$. لذا $pG \subseteq H$ که نشان می‌دهد $pG \neq G$.

لم ۱. ۴. الف: فرض کنید G یک گروه باشد. اگر F یک گروه بخش‌پذیر باشد و $H \leq G$، آنگاه هر همریختی از H به F را می‌توان به یک همریختی از G به F گسترش داد.

ب: هر حاصل جمع مستقیم از گروه‌های بخش‌پذیر، یک گروه بخش‌پذیر است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

اثبات. به گزاره ۱۰.۳ از مرجع [۳] یا لم ۱۹.۳ از مرجع [۴] مراجعه کنید.

گزاره ۱. ۵. (الف) هر گروه از تاب آزاد با زیرگروهی از $\mathbb{Q}^{(\Lambda)}$ (Λ مجموعه‌ای ناتهی می‌باشد) یکریخت است.

(ب) اگر مرتبه هر عضوی از G توانی از عدد اوّل p باشد آنگاه G با زیرگروهی از $\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\Lambda)}$ (Λ یک مجموعه ناتهی است) یکریخت است.

اثبات. (الف) فرض کنید G یک گروه از تاب آزاد باشد.

$$\Omega=\{\{C_i\}_{i\in I}\mid G \text{ یک خانواده مستقل از زیرگروه‌های ناصفر و دوری در } \{C_i\}_{i\in I}\}$$

Ω همراه با $\subseteq$ یک مجموعه جزئاً مرتب است و طبق لم زرن یک عضو ماکسیمال مانند $\{C_i\}_{i\in\Lambda}$ دارد. واضح است که $\bigoplus_{i\in\Lambda} C_i \simeq \mathbb{Z}^{(\Lambda)}$. بنابراین یک تابع یک به یک $f:\bigoplus_{i\in\Lambda} C_i \to \mathbb{Q}^{(\Lambda)}$ موجود است که طبق لم ۴.۱ به یک تابع $\bar{f}: G \to \mathbb{Q}^{(\Lambda)}$ قابل گسترش است. اما با توجه به یک به یک بودن تابع f خواهیم داشت $\operatorname{Ker}\bar{f}\bigcap(\oplus_{i\in\Lambda} C_i)=\{۰\}$. بنابراین اگر $۰\neq x\in\operatorname{Ker}\bar{f}$ در این صورت مجموعه $\{\langle x\rangle\}\bigcup\{C_i\}_{i\in\Lambda}$ ناقض ماکسیمال بودن $\{C_i\}_{i\in\Lambda}$ است. لذا $\operatorname{Ker}\bar{f}=\{۰\}$.

(ب) توجه کنید که اگر $x\in G$ از مرتبه p^i باشد آنگاه $\langle x\rangle \simeq \mathbb{Z}_{p^i}$ و لذا $\langle x\rangle$ در $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ نشانده می‌شود. بنابراین $\oplus_{i\in\Lambda} C_i$ که در قسمت (الف) به آن اشاره شد با زیرگروهی از $\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\Lambda)}$ یکریخت است. از آنجا که $\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\Lambda)}$ نیز بخش‌پذیر است اثبات مشابه قسمت (الف) تکمیل می‌شود.

نتیجه ۱. ۶. اگر G گروهی باشد که مرتبه هر عضوش حداکثر p^i باشد آنگاه G در یک حاصلضربی از $\mathbb{Z}_{p^j}$ $(۱\leq j\leq i)$ نشانده می‌شود.

اثبات. طبق گزاره ۵.۱ قسمت (ب) می‌توان فرض کرد $G\subseteq\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\Lambda)}$. از آنجا که برای هر $\lambda\in\Lambda$، $\pi_\lambda(G)$ زیرگروهی از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ است که مرتبه هر عضوش p^i است، لذا $\pi_\lambda(G)$ در $\mathbb{Z}_{p^j}$ $(j\leq i)$ نشانده می‌شود. در اینجا $\pi_\lambda:\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\Lambda)}\to\mathbb{Z}_{p^\infty}$ همان بروریختی متعارف است.

۲. p – رادیکال یک گروه

در این فصل برای هر عدد اوّل p و هر گروه G، یک p- رادیکال تعریف می‌کنیم که برای شناخت کلاس گروه‌های مطلقاً نابخش‌پذیر مفید هستند. برای هر کلاس از گروه‌ها مانند C و یک گروه مانند G، نماد $\operatorname{Rej}(G,C)$ را برای $\bigcap\{\operatorname{Ker} f\mid f:G\to X, X\in C\}$ و نماد $\operatorname{Tr}(C,G)$ را برای $\{f(X)\mid f:X\to G, X\in C\}$ به‌کار می‌بریم. برای مطالعه بیشتر در مورد Rej و Tr به مراجع [۶] و [۵] مراجعه کنید.

تعریف ۲. ۱. فرض کنید p یک عدد اوّل و G یک گروه باشد. p- رادیکال G را زیرگروه $\bigcap_{n\geq ۱} p^nG$ تعریف می‌کنیم و با نماد $\operatorname{rad}_p(G)$ نشان می‌دهیم.

در قضیه زیر خواص p- رادیکال یک گروه را جمع‌آوری می‌کنیم. همان‌طورکه مشاهده خواهیم کرد، اگر برای حداقل یک عدد اوّل p، $rad_p(G)=0$ آنگاه G یک گروه کاهش یافته است. همچنین شرط $\bigcap_p rad_p(G)=0$ معادل آن است که G هیچ عضو بخش‌پذیر ناصفر نداشته باشد. برای هر کلاس از گروه‌ها مانند C قرار می‌دهیم $\operatorname{Cog}(C)$ کلاس

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

تمام گروه‌هایی مانند G که در یک حاصلضرب از اعضای C نشانده شود، برای دیدن مطالب بیشتر در این مورد به مرجع [۵]، [۳] یا [۶] مراجعه کنید. همچنین قرار می‌دهیم $C_p = \{X | rad_p(X) = \{0\}\}$.

قضیه ۲. ۲. فرض کنید p یک عدد اوّل باشد.

الف) برای هر همریختی گروهی $f : G_1 \to G_2$ داریم $f(\mathrm{rad}_p(G_1)) \subseteq \mathrm{rad}_p(G_2)$. به‌ویژه $\mathrm{rad}_p(G)$ یک زیرگروه تماماً پایا در G است.

ب) برای هر $H \leq G$ داریم $\mathrm{rad}_p(H) \subseteq \mathrm{rad}_p(G)$. همچنین اگر $G = H \oplus K$ آنگاه $\mathrm{rad}_p(H) = H \bigcap \mathrm{rad}_p(G)$.

پ) $\mathrm{rad}_p(\oplus_i G_i) = \oplus_i \mathrm{rad}_p(G_i)$.

ت) $\mathrm{rad}_p(\prod_i G_i) = \prod_i \mathrm{rad}_p(G_i)$.

ث) $pG = G$ اگر و تنها اگر $\mathrm{rad}_p(G) = G$ اگر و تنها اگر $Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}_p) = \{0\}$.

ج) برای هر $H \leq G$ داریم $\mathrm{rad}_p(\frac{G}{H}) \supseteq \frac{\mathrm{rad}_p(G) + H}{H}$. همچنین اگر $H \subseteq \mathrm{rad}_p(G)$ آنگاه $\mathrm{rad}_p(\frac{G}{H}) = \frac{\mathrm{rad}_p(G)}{H}$. به‌ویژه $rad_p(\frac{G}{rad_p(G)}) = \{0\}$.

چ) $\mathrm{rad}_p(G) = \mathrm{Rej}(G, C_p)$.

ح) $\mathrm{rad}_p(G) = \mathrm{Rej}(G, \{\mathbb{Z}_{p^i}\}_{i \geq 1})$.

اثبات.

الف) واضح است که برای هر $n \geq 1$، $f(p^n G_1) \subseteq p^n G_2$.

ب) قسمت اوّل واضح است. اگر $G = H \oplus K$ و $h \in H \bigcap \mathrm{rad}_p(G)$. فرض کنید برای هر $n \geq 1$، $h = p^n g_n$ (که در آن $g_n \in G$). داریم $g_n = h_n + k_n$ که در آن $h_n \in H$ و $k_n \in K$. در این‌صورت $p^n g_n = p^n h_n + p^n k_n$ که نتیجه می‌دهد $p^n k_n = 0$. بنابراین $h \in \mathrm{rad}_p(H)$.

پ) فرض کنید $G = \oplus_i G_i$ و $W = \mathrm{rad}_p(G)$. چون W زیرگروه پایای G است (قسمت الف) لذا داریم $W = \oplus_i (W \bigcap G_i)$. بنابراین قسمت (پ) طبق (ب) به‌دست می‌آید.

ت) توجه کنید $p^n(\prod_i G_i) = \prod_i p^n G_i$.

ث) اگر $pG = G$ آنگاه برای هر $n \geq 1$ داریم $p^n G = G$. لذا $\mathrm{rad}_p(G) = G$. اگر $\mathrm{rad}_p(G) = G$ و $0 \neq f: G \to \mathbb{Z}_p$ موجود باشد، آنگاه زیرگروه سره K از G وجود دارد به‌طوری‌که $p(G/K) = \{0\}$. بنابراین $G = \mathrm{rad}_p(G) \subseteq pG \subset K$، که با سره بودن در تناقض است. پس $Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}_p) = \{0\}$. حال فرض کنید $Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}_p) = \{0\}$ و $pG \neq G$. در این‌صورت همان‌طورکه در لم ۳.۱ دیدیم G / pG یک فضای برداری ناصفر روی میدان $\mathbb{Z}_p$ است و لذا $Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}_p)$ نمی‌تواند صفر باشد.

ج) توجه کنید که

$$\mathrm{rad}_p(\frac{G}{H}) = \bigcap_{n \geq 1} p^n(\frac{G}{H}) = \bigcap_{n \geq 1} (\frac{p^n G + H}{H}) \supseteq \frac{\mathrm{rad}_p(G) + H}{H}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

ولی اگر $H \subseteq \mathrm{rad}_p(G)$ آنگاه $p^nG + H = p^nG$.

چ) فرض کنید $H = \mathrm{Rej}(G, C_p)$. طبق (ب) کلاس C_p تحت زیرگروه بسته است. لذا $H = \bigcap\{K \leq G \mid G/K \in C_p\}$. از طرفی اگر $G/K \in C_p$ آنگاه طبق (ج) $\mathrm{rad}_p(G) \subseteq K$ این نشان می‌دهد $\mathrm{rad}_p(G) \subseteq H$. همچنین، چون $rad_p(\frac{G}{rad_p(G)}) = \{0\}$ پس $\frac{G}{\mathrm{rad}_p(G)} \in C_p$. بنابراین $H \subseteq \mathrm{rad}_p(G)$.

ح) فرض کنید $H = \mathrm{Rej}(G, \{\mathbb{Z}_{p^i}\}_{i \geq 1})$، $K = \mathrm{rad}_p(G)$ و $f: G \to \mathbb{Z}_{p^i}$. داریم $f(K) \subseteq f(p^iG) = p^if(G) = \{0\}$ این نشان می‌دهد که $K \subseteq H$. برعکس، ابتدا توجه کنید که برای هر $i \geq 1$، گروه $\frac{G}{p^iG}$ یک $\mathbb{Z}_{p^i}-$مدول است. در نتیجه طبق نتیجه ۶.۱ برای هر $i \geq 1$، $\frac{G}{p^iG} \in Cog(\{\mathbb{Z}_{p^j}\}_{j\geq 1})$. این نشان می‌دهد که $\frac{G}{K} \in Cog(\{\mathbb{Z}_{p^j}\}_{j\geq 1})$ لذا $H \subseteq K$.

تعریف ۲. ۳. فرض کنید p یک عدد اوّل و G یک گروه باشد. $T_p(G)$ را جمع همه زیرگروه‌های p- بخش‌پذیر G تعریف می‌کنیم.

واضح است که گروه G مطلقاً نابخش‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر p، $T_p(G) = \{0\}$. یک گروه G را از p- تاب آزاد گوییم هرگاه شرط $px = 0$ در آن نتیجه دهد $x = 0$.

قضیه ۲. ۴. فرض کنید p یک عدد اوّل باشد.

الف) کلاس گروه‌های p-بخش‌پذیر تحت جمع مستقیم و تصویر همریخت بسته است.

ب) برای هر گروه G، زیرگروه $T_p(G)$، p-بخش‌پذیر است و داریم $T_p(G) \subseteq rad_p(G)$. به‌ویژه $T_p(rad_p(G)) = rad_p(T_p(G)) = T_p(G)$.

پ) اگر G از p-تاب آزاد باشد آنگاه $rad_p(G)$ یک زیرگروه p-بخش‌پذیر است به‌ویژه $T_p(G) = rad_p(G)$.

ت) اگر G از p-تاب آزاد باشد و $H \leq G$ آنگاه $\mathrm{rad}_p(G) = \mathrm{rad}_p(H)$ اگر و تنها اگر $\mathrm{rad}_p(G) \subseteq H$. به‌ویژه $\mathrm{rad}_p(\mathrm{rad}_p(G)) = \mathrm{rad}_p(G)$.

ث) اگر $T_p(G) = \{0\}$ آنگاه مرتبه هر عضو تاب‌دار در G توانی از p است.

ج) فرض کنید p و q دو عدد اوّل متمایز باشند. اگر $T_p(G) = T_q(G) = \{0\}$ آنگاه $rad_p(G) = rad_q(G) = \{0\}$.

چ) $T_p(\frac{G}{T_p(G)}) = \{0\}$.

اثبات. الف) اینکه فاکتور یک گروه p- بخش‌پذیر، یک گروه p- بخش‌پذیر است واضح است. برای بسته بودن نسبت به جمع مستقیم، به این نکته توجه کنید که $p(\oplus_i G_i) = \oplus_i pG_i$.

ب) فرض کنید Λ مجموعه‌ی تمام زیرگروه‌های p- بخش‌پذیر در G باشد. به وضوح $T_p(G)$ تصویر همریخت $\oplus_{H\in\Lambda} H$ می‌باشد. لذا قسمت اوّل (ب) از (الف) به‌دست می‌آید. توجه کنید که اگر $pH = H$ آنگاه برای هر $n \geq 1$ داریم $H = p^nH \leq p^nG$. بنابراین $T_p(G) \subseteq \mathrm{rad}_p(G)$. همچنین طبق قسمت اول و قضیه ۲.۲ قسمت (ث) داریم

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

$\mathrm{rad}_p(T_p(G))=T_p(G)$. از طرفی چون هر زیرگروه p- بخش‌پذیر G در $\mathrm{rad}_p(G)$ قرار دارد لذا $T_p(\mathrm{rad}_p(G))=T_p(G)$.

پ) فرض کنید $x\in \mathrm{rad}_p(G)$ لذا دنباله $\{g_n\}$ از اعضای G موجود است به‌طوری‌که برای هر $n\geq ۱$، $x=p^n g_n$. حال برای هر $n\geq ۲$ داریم $pg_۱=p^n g_n$ و چون G از p- تاب آزاد است داریم $g_۱=p^{n-۱}g_n$ (برای هر $n\geq ۲$). این نشان می‌دهد که $g_۱\in \mathrm{rad}_p(G)$ و لذا $x\in p(\mathrm{rad}_p(G))$. در نتیجه $\mathrm{rad}_p(G)$ یک گروه p- بخش‌پذیر است و لذا $\mathrm{rad}_p(G)\subseteq T_p(G)$. حال طبق (ب) اثبات کامل می‌شود.

ت) فرض کنید $\mathrm{rad}_p(G)\subseteq H$. طبق (پ) برای هر $n\geq ۱$ داریم

$$\mathrm{rad}_p(G)=p^n \mathrm{rad}_p(G)\subseteq p^n H$$

لذا $\mathrm{rad}_p(G)\subseteq \mathrm{rad}_p(H)$ که به همراه قضیه ۲.۲ قسمت (ب) نتیجه می‌دهد $\mathrm{rad}_p(G)=\mathrm{rad}_p(H)$. برای قسمت آخر به جای H قرار دهید $\mathrm{rad}_p(G)$.

ث) فرض خلف بیان می‌کند که عضو ناصفر x در G وجود دارد به‌طوری‌که مرتبه x برابر با $p^\alpha m$ است که $m>۱$ و $p\nmid m$. حال اگر قرار دهیم $y=p^\alpha x$ داریم $my=0$. از طرفی اعداد صحیح s,t موجودند به‌طوری‌که $sp+mt=۱$. بنابراین $spy=y$. که نشان می‌دهد $\langle y\rangle=p\langle y\rangle$. در نتیجه $\{0\}\neq\langle y\rangle\subseteq T_p(G)$ متناقض با فرض است.

ج) فرض این قسمت به همراه (ث) نشان می‌دهد که G از تاب آزاد است. بنابراین (ج) طبق (پ) اثبات می‌شود.

چ) فرض کنید $T_p(G)=W$ و $T_P(\frac{G}{W})=\frac{Y}{W}$ طبق قضیه ۴.۲ قسمت (ب)، داریم $p(\frac{Y}{W})=\frac{Y}{W}$ و $pW=W$. لذا داریم $pY=p(Y+W)=pY+pW=pY+W=Y$ این نشان می‌دهد که $Y\subseteq W$.

مثال زیر نشان می‌دهد که شرط از p- تاب آزاد در قضیه ۴.۲ قسمت (پ)، یک شرط کافی است ولی لازم نیست.

مثال ۲. ۵. فرض کنید p یک عدد اوّل $M:=\prod_{i\geq 1}\mathbb{Z}_{p^i}$ و $N:=\bigoplus_{i\geq 1}\mathbb{Z}_{p^i}$ و $G:=M/N$. اعضای $\mathbb{Z}_{p^i}$ را با نماد $\bar{x}_i$ نمایش می‌دهیم که در آن $۰\leq \bar{x}_i\leq p^i-۱$.

(الف) گروه G از p- تاب آزاد نیست. زیرا اگر قرار دهیم $y=(\bar{۱},\bar{p},\bar{p}^۲,\dots)\in M$ آنگاه $p(y+N)=N$ ولی $y\notin N$.

(ب) اگر $z=\{\bar{z}_i\}_{i\geq ۱}\in M$ و $n\geq ۱$ آنگاه $z+N\in p^n G$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $m\geq ۱$ که برای هر $k\geq m$، $p^n\mid z_k$. توجه کنید که اگر $x=\{\bar{x}_i\}_{i\geq ۱}\in M$ و $p^n x-z\in M$ آنگاه وجود دارد $m\geq ۱$ که برای هر $k\geq m$، $p^n\bar{x}_k-\bar{z}_k=\bar{0}$ در $\mathbb{Z}_{p^k}$. این یعنی $p^k\mid p^n x_k-z_k$ و برای kهای بزرگتر از m و n داریم $p^k\mid z_k$. عکس مطلب نیز واضح است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

(پ) pG یک زیر گروه سره G است یعنی $pG \neq G$. زیرا اگر $pG = G$ در قسمت (ب) قرار می‌دهیم $n = ۱$ و $z_i = ۱$ برای هر $i \geq ۱$. لذا $p \mid ۱$ که به تناقض می‌رسیم.

(ت) داریم،

$$rad_p(G) = \{\{\bar{z}_i\}_{i\geq ۱} + N \mid \forall \geq ۱, \exists m \geq ۱, \forall k \geq m, p^n \mid z_k\}.$$

با توجه به قسمت (ب) بدیهی است.

(ث) داریم $rad_p(G) = T_p(G)$. فرض کنید $\{\bar{z}_i\}_{i\geq ۱} + N$ یک عضو از $rad_p(G)$ باشد. طبق قسمت (ت) برای هر $n \geq ۱$ قرار دهید

$$m_n = Min\{m \geq ۱ \mid \forall k \geq m, p^n \mid z_k\},$$

در این صورت $m_1 \leq m_2 \leq \cdots$. حال قرار می‌دهیم $pu_k = z_k$ برای $k \geq m_۱$ و $u_k = 0$ برای $۱ \leq k \leq m_۱$. نشان می‌دهیم $\{\bar{u}_k\}_{k\geq ۱} + N$ در $rad_p(G)$ است. این مطلب را به کمک (ت) اثبات می‌کنیم. فرض کنید $n \geq ۱$ قرار دهید $t = n + ۱$ داریم $p^t \mid z_k$، $\forall k \geq m_t$، لذا $p^n \mid u_k$. از طرفی

$$\{\bar{z}_i\}_{i\geq ۱} + N = p(\{\bar{u}_i\}_{i\geq ۱} + N) \in p(rad_p(G)).$$

این نشان می‌دهد که $rad_p(G) = p(rad_p(G))$ به عبارتی $rad_p(G)$ یک زیر گروه p- بخش‌پذیر است و لذا در $T_p(G)$ قرار دارد.

(ج) $rad_p(G)$ مخالف صفر است.

$$E_1 = (\bar{0}, \bar{p}, \bar{p}^2, \ldots) \in M$$

$$E_2 = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{p}, \bar{p}^2, \ldots) \in M$$

و همین‌طور بقیه E_nها را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. واضح است $p^n E_{n+۱} - E_n \in N$. لذا اگر تعریف کنیم $H := \langle \bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots \rangle$در اینجا منظور از $\bar{E}_i$ همان $E_i + N$ است، آنگاه داریم $\bar{E}_n \in pH$ برای هر $n \geq ۱$ و لذا $\{0\} \neq H = pH \subseteq rad_p(G)$.

قبل از این‌که به یک مشخص‌سازی از گروه‌های نابخش‌پذیر برسیم، ابتدا چند تعریف و نمادگذاری را بیان می‌کنیم. قبلاً کلاس C_p را برای بیان تمام گروه‌های با p- رادیکال صفر معرفی کردیم، در ادامه چند کلاس دیگر مرتبط با موضوع بحث را معرفی می‌کنیم:

F_p کلاس تمام گروه‌های مانند G با شرط $T_p(G) = \{۰\}$.

D_n کلاس تمام گروه‌های n- بخش‌پذیر،

D کلاس تمام گروه‌هایی مانند G به‌طوری‌که G برابر حاصل جمع زیرگروه‌هایی مانند H است که در آن $H \in \bigcup_{n\geq ۱} D_n$.

توجه کنید که $D_n = \bigcup_{p|n} D_p \subseteq D$ همان‌طورکه در مثال ۲.۱ دیدیم $A_p + A_q \in D$ ولی به هیچ‌یک از D_nها تعلق ندارد.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

اگر F یک کلاس از گروه‌ها و G یک گروه باشد، نماد $Hom_{\mathbb{Z}}(G,F)$ را برای مجموعه تمام همریختی‌ها از G به عضوی از F به کار می‌بریم. نماد $Hom_{\mathbb{Z}}(F,G)$ را نیز به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲. ۶. فرض کنید F و T دو کلاس از گروه‌ها باشند. زوج (T,F) را یک نظریه تاب گویند هرگاه

۱) $X \in T$ اگر و تنها اگر $Hom_{\mathbb{Z}}(X,F)=\{0\}$.

۲) $Y \in F$ اگر و تنها اگر $Hom_{\mathbb{Z}}(T,Y)=\{0\}$.

به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد که

$$X = Rej\,(X,F) \Leftrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(X,F)=\{0\},$$

$$Tr(T,Y)=\{0\} \Leftrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(T,Y)=\{0\}.$$

زوج‌های $(\{$از تاب آزاد$\},\{$تابدار$\})$ و (کاهش یافته، بخش‌پذیر) مثال‌های معروفی از نظریه تاب هستند. کلاس نظریه‌های تاب در ارتباط با رسته‌ی پیش رادیکال‌ها روی گروه‌ها هستند که در مرجع [۵] مفصلاً شرح داده شده است.

با توجه به نتایج به‌دست آمده گزاره زیر را داریم.

گزاره ۲. ۷. برای هر عدد اوّل p، زوج (D_p, F_p) یک نظریه تاب است.

اثبات. واضح است که برای $X \in D_p$ و $Y \in F_p$ داریم $Hom_{\mathbb{Z}}(X,Y)=\{0\}$. حال فرض کنید $Hom_{\mathbb{Z}}(D_p,Y)=\{0\}$. از طرفی قضیه ۴.۲، $T_p(Y) \in D_p$، بنابراین $T_p(Y)=\{0\}$ که نشان می‌دهد $Y \in F_p$. هم‌چنین اگر $Hom_{\mathbb{Z}}(G,F_p)=\{0\}$ فرض کنید $W=T_p(G)$. بنابراین طبق قضیه ۴.۲ قسمت (چ) داریم $\frac{G}{W} \in F_p$ و لذا نگاشت متعارف $\pi: G \to \frac{G}{W}$ باید برابر صفر باشد که نشان می‌دهد $G = W \in D_p$.

۳. گروه‌های مطلقاً نابخش‌پذیر

قضیه ۳. ۱. هر گروه مطلقاً نابخش‌پذیر G از تاب آزاد است لذا با زیرگروهی از $\mathbb{Q}^{(A)}$ یکریخت است.

اثبات. اگر G مطلقاً نابخش‌پذیر باشد آنگاه برای هر p، $T_p(G)=\{0\}$ و لذا طبق قضیه ۴.۲ قسمت (ث)، از تاب آزاد است. بنابراین اثبات، طبق گزاره ۵.۱ کامل می‌شود.

کلاس تمام گروه‌های مطلقاً نابخش‌پذیر را با C نشان می‌دهیم و در این بخش به مطالعه این کلاس می‌پردازیم. طبق تعریف $C=\bigcap_p F_p$، همچنین طبق قضیه ۴.۲ قسمت (ب) داریم $C_p \subseteq F_p$. هر چند طبق مثال زیر $C_p \neq F_p$، در لم بعدی نشان می‌دهیم $C=\bigcap_p C_p$.

مثال ۳. ۲. فرض کنید p یک عدد اول، $\{e_i\}_{i\geq 1}$ پایه استاندارد برای گروه آزاد $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ و H زیرگروه تولید شده توسط مجموعه $\{e_1 - p^{n-1}e_n \mid n \geq 2\}$ باشد. قرار می‌دهیم $G:=\frac{\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}}{H}$ و نشان می دهیم $G \in F_p \setminus C_p$. اعضای G را با $\bar{g}$ که $g \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ نمایش می‌دهیم. ابتدا توجه کنید $\bar{e}_1 = p\bar{e}_2 = p^2\bar{e}_3 = \cdots$ و لذا $\bar{e}_1 \in rad_p(G)$. ثابت می‌کنیم $\langle \bar{e}_1 \rangle = rad_p(G)$. فرض کنید $\bar{f}=\sum_{i=1}^{t} m_i \bar{e}_i$ (که در آن $m_i \in \mathbb{Z}$ عضوی در $rad_p(G)$ باشد. بنابراین

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

$\overline{f} \in rad_p(G)$ و لذا برای هر n بین ۲ و t داریم $\overline{f} \in p^n G$. از این‌رو برای عضوی مانند $\overline{g} \in G$ داریم $\overline{f} = p^n \overline{g}$ و یا اعداد صحیح $k_2, \ldots, k_s$ موجودند که

$$\sum_{i=1}^{t} m_i e_i = (\sum_{j=2}^{s} k_j) e_1 - (\sum_{j=2}^{s} k_j) p^{j-1} e_j + p^n g\,.$$

از مقایسه ضریب e_n در دو طرف تساوی فوق باید داشته باشیم $p^{n-1} \mid m_n$ برای $2 \le n \le t$. فرض کنید $m_i = p^{i-1} z_i$ پس $m_i e_i = z_i p^{i-1} e_i$ و یا $m_i \overline{e}_i = z_i \overline{e}_1$ برای $2 \le i \le t$. این نشان می‌دهد که $\overline{f} \in \langle \overline{e}_1 \rangle$، بنابراین $rad_p(G) = \langle \overline{e}_1 \rangle$. از طرفی واضح است که $\langle \bar{e}_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}$ زیرا $\overline{e}_1$ عضوی از مرتبه نامتناهی است، بنابراین طبق قضیه ۴.۲ قسمت (ب) داریم

$$T_p(G) = T_p(rad_p(G)) \simeq T_p(\mathbb{Z}) = \{0\}.$$

قضیه ۳. ۳. شرایط زیر برای هر گروه G معادلند.

(الف) G مطلقاً نابخش‌پذیر است،

(ب) برای هر عدد اوّل p، $rad_p(G) = \{0\}$،

(ج) $Hom_{\mathbb{Z}}(D, G) = \{0\}$.

اثبات. (الف) $\Longleftarrow$ (ب) طبق قضیه ۴.۲ قسمت (ج) برقرار است.

(ب) $\Longleftarrow$ (الف) طبق قضیه ۴.۲ قسمت (ب)، برای هر عدد اوّل p داریم $T_p(G) = \{0\}$ و این یعنی G مطلقاً نابخش‌پذیر است.

(الف) $\Longleftarrow$ (ج) طبق گزاره ۷.۲ توجه کنید اگر $X \in D$ و $0 \neq f \in Hom_{\mathbb{Z}}(X, G)$ آن‌گاه اعداد اول p و زیرگروه ناصفر Y از X موجود است به‌طوری‌که $Y \in D_p$ و $f(Y) \neq \{0\}$ در حالی‌که طبق (الف) $G \in F_p$.

(ج) $\Longleftarrow$ (الف) فرض کنید $H = T_p(G)$. طبق قضیه ۴.۲ داریم $pH = H$ و لذا $H \in D$. در نتیجه نگاشت شمول $\iota : H \to G$ متعلق به $Hom_{\mathbb{Z}}(D, G)$ است. بنابراین $H = \{0\}$.

قضیه ۳. ۴. کلاس گروه‌های مطلقاً نابخش‌پذیر تحت حاصل‌ضرب‌ها و زیرگروه بسته است.

اثبات. به کمک قضیه ۳.۳ و قضیه ۲.۲ قسمت‌های (ت) و (ب) اثبات می‌شود.

قضیه ۳. ۵. اگر G/H و H مطلقاً نابخش‌پذیر باشند آنگاه G نیز مطلقاً نابخش‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید H و G/H هر دو مطلقاً نابخش‌پذیر باشد. برای اثبات مطلقاً نابخش‌پذیری G، برای هر عدد اوّل p باید نشان دهیم $T_p(G) = \{0\}$ چون $rad_p(G/H) = \{0\}$ لذا طبق قضیه ۲.۲ قسمت (ج) داریم $rad_p(G) \subseteq H$. حال چون H نیز مطلقاً نابخش‌پذیر است داریم $T_p(H) = \{0\}$. حال طبق قضیه ۲.۴ قسمت (ب) داریم $T_p(G) = T_p(rad_p(G)) \subseteq T_p(H) = \{0\}$.

برای هر $n \ge 2$ تعریف می‌کنیم $rad_p^n(G) = rad_p(rad_p^{n-1}(G))$ و البته $rad_p^1(G)$ همان $rad_p(G)$ است. نتیجه زیر را داریم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

نتیجه ۳. ۶. برای هر گروه G داریم:

(الف) $T_p(G) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} rad_p^n(G)$

(ب) G مطلقاً نابخش‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر p عدد طبیعی n موجود باشد به‌طوری که $rad_p^n(G)$ مطلقاً نابخش‌پذیر باشد.

اثبات. (الف) از قضیه ۴.۲ قسمت (ب)، با تبدیل G به $rad_p(G)$ و با توجه به اینکه $T_p(G) = T_p(T_p(G))$، برای هر $n \geq 1$ به‌دست می‌آوریم $T_p(G) \subseteq rad_p^n(G)$.

(ب) توجه کنید که اگر $rad_p^n(G)$ مطلقاً نابخش‌پذیر باشد آنگاه طبق ۳.۳ داریم $rad_p(rad_p^n(G)) = \{0\}$ و لذا طبق (الف) برای هر p، $T_p(G) = \{0\}$.

مقاله را با یک مشخص‌سازی از زیرگروه‌های مطلقاً نابخش‌پذیر در $\mathbb{Q}$ به پایان می‌بریم.

تعریف ۳. ۷. یک گروه ناصفر را یکنواخت گوییم هرگاه اشتراک هر دو زیرگروه نابدیهی آن یک زیرگروه نابدیهی باشد.

لم ۳. ۸. گروه G از تاب آزاد و یکنواخت است اگر و تنها اگر با زیرگروهی از $\mathbb{Q}$ یکریخت باشد.

اثبات. $(\Leftarrow)$ همانند اثبات گزاره ۵.۱.

$(\Rightarrow)$ واضح است.

نمادگذاری ۳. ۹. اگر $H \leq \mathbb{Q}$ قرار می‌دهیم،

$$B_p(H) = \{t \in \mathbb{N} | \exists \frac{m}{n} \in H, (m,n) = 1, p^t | n\}$$

و $b_p(H) = |B_p(H)|$.

لم ۳. ۱۰. فرض کنید $G \leq \mathbb{Q}$ و p عدد اوّل باشد. اگر $b_p(G) = 0$ آن‌گاه $pG \neq G$.

اثبات. اعضای G را به صورت کسرهایی در $\mathbb{Q}$ که صورت و مخرج آن‌ها نسبت به هم اوّل هستند نشان می‌دهیم. فرض کنید $b_p(G) = 0$ و $pG = G$. چون $b_p(G) = 0$ بنابراین برای هر $0 \neq a/b \in G$ $p \nmid b$. حال فرض کنید m/n عضوی ناصفری از G باشد به‌طوری‌که در تجزیه m به اعداد اوّل، p با کمترین توان ظاهر شود. از طرفی $m/n \in pG = G$. لذا $m'/n' \in G$ موجود است به‌طوری‌که $\frac{m}{n} = \frac{pm'}{n'}$. چون $p \nmid n'n$، توان p در تجزیه m' کمتر از توان آن در تجزیه m است و این با انتخاب m/n در تناقض است.

قضیه ۳. ۱۱. فرض کنید $\{0\} \neq G \leq \mathbb{Q}$. در این‌صورت G مطلقاً نابخش‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر عدد اوّل p، $b_p(G)$ متناهی باشد.

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنید G مطلقاً نابخش‌پذیر و برای هر عدد اوّل p، $b_p(G)$ نامتناهی باشد. لذا برای هر $k \in \mathbb{N}$ عضوی چون u/v در G با شرط $p^\alpha | v$ و $\alpha \geq k$ وجود دارد. لذا عضو ناصفری از G مانند m/n، $(m,n) = 1$ وجود دارد به‌طوری که $p^k | n$. بنابراین $p \nmid m$ و اگر $n = p^k t$ داریم $\frac{m}{p^k} = \frac{tm}{n} = t(\frac{m}{n}) \in G$. از طرفی چون $p \nmid$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]

m لذا اعداد $r,s\in\mathbb{Z}$ موجودند به طوری که $1=rm+sp^k$. حال فرض کنید a کوچکترین عدد طبیعی در G باشد (چنین عددی در G موجود است)، داریم

$$a(\frac{1}{p^k})=\frac{a(rm+sp^k)}{p^k}=ar(\frac{m}{p^k})+as\in G$$

زیرگروه تولید شده توسط $\{a/p^m\}_{m\geq 1}$ را در G در نظر می‌گیریم. این زیر گروه به وضح با A_p یکریخت است و لذا G شامل یک زیرگروه p- بخش‌پذیر است که با فرض مسئله در تناقض است. بنابراین $b_p(G)$ متناهی است.

$(\Rightarrow)$ فرض می‌کنیم برای هر عدد اوّل p، $b_p(G)$ متناهی باشد. اگر $H\leq G$ و p یک عدد اوّل باشد باید نشان دهیم $pH\neq H$. اگر $b_p(H)=0$ آن‌گاه طبق لم ۱۰.۳، داریم $pH\neq H$. فرض کنید $b_p(H)\geq 1$. طبق فرض مسئله $b_p(H)$ متناهی است. بزرگترین عضو مجموعه $B_p(H)$ را k در نظر می‌گیریم. بنابراین اگر $m/n\in p^kH$ آنگاه $p\nmid n$. این نتیجه می‌دهد که $b_p(p^kH)=0$ و لذا مجدداً طبق لم ۳.۱۰، داریم $p(p^kH)\neq p^kH$. این نتیجه می‌دهد $pH\neq H$.

توجه کنید که برای هر گروه X داریم $Tr(D_p,X)=T_p(X)\subseteq rad_p(X)$ لذا $Tr(\bigcup_{n\geq 1}D_n,X)\subseteq\sum_p rad_p(X)$. از طرفی $X\in D$ اگر و تنها اگر $Tr(\bigcup_{n\geq 1}D_n,X)=X$. این نشان می‌دهد که $D\subseteq\{X\mid X=\sum_p rad_p(X)\}:=E$. قضیه ۳.۳ بیان می‌کند که برای هر $X\in D$ داریم $Hom_{\mathbb{Z}}(X,C)$ همچنین می‌توان نشان داد برای هر $X\in E$ داریم $Hom_{\mathbb{Z}}(X,C)=\{0\}$ زیرا اگر $f:X\to Y$ آن‌گاه $f(rad_p(X))\subseteq rad_p(Y)$، بنابراین به طور طبیعی به سوال زیر می‌رسیم که ممکن است مورد توجه خوانندگان قرار گیرد.

سؤال ۳. ۱۲. آیا (E,C) یک نظریه تاب است؟

References

۱. جان ب. فرالی، نخستین درس در جبر مجرد، مترجم، مسعود فرزان، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۷.

2. L. Fuchs, (1970). Infinite Abelian Groups, Pure and Applied Mathematics 36, (Vol. 1), Academic Press, New York.

3. Hungerford, T. W. (1974). Algebra. New York Springer-Verlag.

4. Lam, T. Y. (1999). Lectures on rings and modules. Graduate Texts in Mathematics.

5. Stenström, B. (1975). An introduction to methods of ring theory. In Rings of quotients (Vol. 217). Springer-Verlag, New York.

6. Wisbauer, R. (1991). Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research. Revised and translated from the 1988 German edition. Algebra, Logic and Applications, 3, 16-01.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2025-04-18]