Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Classical and non-classical symmetries and analytical solutions of the system of fractional HGF differential equations

Mir Sajjad Hashemi[1], Ali Haji-Badali[2], Farzaneh Alizadeh[3]

1. Department of Mathematics, Basic Science Faculty, University of Bonab, Bonab, Iran.
   E-mail: hashemi_math396@yahoo.com
2. Department of Mathematics, Basic Science Faculty, University of Bonab, Bonab, Iran.
   E-mail: ahajibadali@gmail.com
3. Department of Mathematics, Basic Science Faculty, University of Bonab, Bonab, Iran.
   E-mail: farzan.alizadeh@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:

Received:
5 September 2020
Received in revised form:
2 June 2021
Accepted:
2 June 2021
Published online:
20 June 2023

Keywords:

Lie symmetry analysis,
Classical symmetry,
Non-Classical symmetry,
Fractional differential equation.

ABSTRACT

Introduction

In this paper, we use the symmetry of the Lie group analysis as one of the powerful tools which that deals with the wide class of fractional order differential equation in the Riemann-Liouville concept. These transformations play fundamental role in the analysis of different kind of differential equations. Fractional calculus theory has received much attention from researchers and scientists in applied mathematics and physics because of its remarkable properties to accurately description of different abnormal physical events and complex processes in engineering and applied science such that classical calculations were insufficient to explain them. There is an essential fundamental difference between differential operators of integer order and the Riemann–Liouville fractional derivatives, the former are local operators, the latter are not.

In the first step, we employ the classical and non-classical Lie symmetries to acquire similarity reductions of nonlinear fractional Hunter-Gatherer-Farmer (HGF) equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u_{xx} - u(1-u-a_1 v) = 0, \qquad a_1 \neq 0 \\ \\ \dfrac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - v_{xx} - v(1-u-a_1 v) - uw - a_1 vw = 0, \\ \\ \dfrac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} - dw_{xx} - a_3 w(1-w) + a_4 uw + a_1 a_4 vw = 0, \qquad d, a_4 \neq 0. \end{cases}$$

In the second step, we find the related exact solutions for the derived generators. Classical and non-classical Lie symmetries are used to similarity reductions of this system. Corresponding exact solutions are obtained for the extracted generators.

Here, mainly we study the classical Lie symmetry and non-classical Lie symmetry. Symmetry generators for the classical case are obtained as

$$V_1 = u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad V_2 = v\frac{\partial}{\partial v}, \qquad V_3 = w\frac{\partial}{\partial w}, \qquad V_4 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$V_5 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha t\frac{\partial}{\partial t} + (3u\alpha - 2u)\frac{\partial}{\partial u} + (3v\alpha - 2v)\frac{\partial}{\partial v} + (3w\alpha - 2w)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Now we can obtain the exact solutions based on these generators as follows:

- For the case $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ the exact solution is:

$$u(\mathrm{x},t)=e^{x}\left(-a_1k_1t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(2t^{\alpha})\right),$$
$$v(\mathrm{x},t)=e^{x}\left(k_1t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(2t^{\alpha})\right),$$
$$w(\mathrm{x},t)=e^{x}\left(k_2t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(dt^{\alpha})\right).$$

- For the case $V_4=\dfrac{\partial}{\partial x}$ the exact solution is:

$$u(\mathrm{x},t)=-a_1k_1t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}),$$
$$v(\mathrm{x},t)=k_1t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}),$$
$$w(\mathrm{x},t)=k_2t^{\alpha-1}.$$

- For the case

$$V_5=2\alpha x\frac{\partial}{\partial x}+at\frac{\partial}{\partial t}+(3u\alpha-2u)\frac{\partial}{\partial u}+(3v\alpha-2v)\frac{\partial}{\partial v}+(3w\alpha-2w)\frac{\partial}{\partial w}$$

by using the power series method we have:

$$u(x,t)=\left(a_0+a_1xt^{\frac{-\alpha}{2}}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a_i\Gamma(-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}{(i+1)(i+2)\Gamma(-\frac{5\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}xt^{\frac{-\alpha i}{2}}\right)t^{\frac{3}{4}\alpha-\frac{1}{2}},$$
$$v(x,t)=\left(b_0+b_1xt^{\frac{-\alpha}{2}}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{b_i\Gamma(-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}{(i+1)(i+2)\Gamma(-\frac{5\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}xt^{\frac{-\alpha i}{2}}\right)t^{\frac{3}{4}\alpha-\frac{1}{2}},$$
$$w(x,t)=\left(c_0+c_1xt^{\frac{-\alpha}{2}}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{c_i\Gamma(-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}{(i+1)(i+2)d\Gamma(-\frac{5\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}xt^{\frac{-\alpha i}{2}}\right)t^{\frac{3}{4}\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Symmetry generators for non-classical case are $V_6=\dfrac{\partial}{\partial x},\ V_7=\dfrac{\partial}{\partial x}+c\dfrac{\partial}{\partial t}$. The exact solution based on V_6 is same as the solution for V_4 in classical type. Also, the exact solution which corresponds to vector field V_7 is

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{a_1k_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(t-cx\right)^{2\alpha-2}E_{\alpha-2,2\alpha-1}(c^2\left(t-cx\right)^{\alpha-2})-a_1k_1(1-E_{\alpha-2}(c^2\left(t-cx\right)^{\alpha-2}))\\&\quad+a_1c^2k_2\left(t-cx\right)^{\alpha-3}E_{\alpha-2,\alpha-2}(c^2\left(t-cx\right)^{\alpha-2}),\\v(x,t)&=\frac{-\gamma_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(t-cx\right)^{2\alpha-2}E_{\alpha-2,2\alpha-1}(c^2\left(t-cx\right)^{\alpha-2})+\gamma_1(1-E_{\alpha-2}(c^2\left(t-cx\right)^{\alpha-2}))\\&\quad-c^2\gamma_2\left(t-cx\right)^{\alpha-3}E_{\alpha-2,\alpha-2}(c^2\left(t-cx\right)^{\alpha-2}),\\w(x,t)&=\frac{-\lambda_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(t-cx\right)^{2\alpha-2}E_{\alpha-2,2\alpha-1}(d\left(t-cx\right)^{\alpha-2})+\lambda_1(1-E_{\alpha-2}(d\left(t-cx\right)^{\alpha-2}))\\&\quad-d\lambda_2\left(t-cx\right)^{\alpha-3}E_{\alpha-2,\alpha-2}(d\left(t-cx\right)^{\alpha-2}).\end{aligned}$$

From these findings, we conclude that the presented method might become a promising one in finding the analytical solutions of the different kinds of fractional partial differential equations.

How to cite: Hashemi, M.S., Haji-Badali, A., Alizadeh, F. (2023). Classical and non-classical symmetries and analytical solutions of the system of fractional HGF differential equations. *Mathematical Researches*, 9 (1), 264-283.

Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/
Kharazmi University

بررسی تقارنی‌های کلاسیک و غیرکلاسیک و جواب‌های تحلیلی دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری HGF

میرسجاد هاشمی[1] ✉، علی حاجی بدلی[2]، فرزانه علیزاده[3]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب، ایران. رایانامه: hashemi_math396@yahoo.com
۲. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب، ایران. رایانامه: ahajibadali@gmail.com
۳. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب، ایران. رایانامه: farzan.alizadeh@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۱۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

واژه‌های کلیدی:
تقارنی غیرکلاسیک،
گروه‌های لی،
جواب دقیق،
دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری HGF.

چکیده

در این مقاله به تجزیه و تحلیل تقارنی‌های کلاسیک و غیر کلاسیک گروه لی دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی Hunter-Gatherer-Farmer (HGF) می‌پردازیم. در واقع، از گروه تقارنی‌های کلاسیک و غیرکلاسیک برای کاهش معادلهٔ HGF کسری غیرخطی با مشتقات جزئی به دستگاه معادلات کسری غیرخطی معمولی استفاده می شود. در نهایت جواب دقیق معادلات مربوطه استخراج می‌شوند.

استناد: هاشمی، میرسجاد؛ حاجی بدلی، علی؛ علیزاده، فرزانه؛ (۱۴۰۲). بررسی تقارنی‌های کلاسیک و غیرکلاسیک و جواب‌های تحلیلی دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری HGF. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۱)، ۲۸۳-۲۶۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱- مقدمه

تبدیلات گروه لی برای اولین بار توسط ریاضی دان نروژی سوفوس لی[1] در اوایل قرن ۱۹ مطرح شد. این تبدیلات نقش مهمی در تحلیل انواع مختلف معادلات دیفرانسیل دارند [۴-۱]. محاسبات کسری، که قدمت آن به ۱۶۹۵ باز می‌گردد، در دهه‌های اخیر پیشرفت چشمگیری داشته است. نظریهٔ محاسبات کسری به دلیل ویژگی‌های برجسته و چشمگیر توجه دانشمندان را به خود جلب کرده است تا از آن طریق بتوانند پدیده‌های مختلف و گاهاً غیر عادی فیزیکی و فرآیندهای پیچیده در علوم مهندسی را دقیق‌تر توصیف کنند، زیرا محاسبات کلاسیک از توانایی کافی برای توصیف این پدیده‌ها برخوردار نبوده است [۷-۵] و [۹]. در واقع با استفاده از نظریه‌های مختلف محاسبات کسری، پدیده‌های غیرعادی در دنیای واقعی را از طریق معادلات دیفرانسیل انتگرالی یا کسری مدل‌سازی کرده‌اند.

در حقیقت، اپراتورهای کسری به ابزاری قدرتمند برای توسعهٔ مدل‌های دقیق‌تر از انواع کلاسیک تبدیل شده‌اند. اخیراً برخی از تعاریف جدید در مورد اپراتورهای کسری پیشنهاد شده است و برای مدل‌سازی رویدادهای پیچیده استفاده می‌شود [۱۵-۱۰]. به طور کلی، دستیابی به جواب‌های دقیق از معادلات دیفرانسیل کسری کار دشوار یا گاهی غیرممکن است. بسیاری از دانشمندان در مورد ساخت و گسترش روش‌های قابل اعتماد عددی یا نیمه‌تحلیلی که با معادلات کسری سر و کار دارند تحقیق کرده‌اند.

در این کار، معادلهٔ HGF کسری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u_{xx} - u(1-u-a_1 v) = 0, \qquad a_1 \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - v_{xx} - v(1-u-a_1 v) - uw - a_1 vw = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} - dw_{xx} - a_3 w(1-w) + a_4 uw + a_1 a_4 vw = 0, \qquad d, a_4 \neq 0 \end{cases} \tag{۱}$$

[1] Sophus Lie

که در آن $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}(\cdot)$ نشان دهنده اپراتور مشتق جزئی ریمان-لیوویل[۲] از مرتبه α $(0<\alpha\le 1)$ وابسته به متغیر t است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau & 0<\alpha<1\\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) & \alpha=1,\end{cases}$$

و $\Gamma(\cdot)$ نشان دهندهٔ تابع گاما است. برای $\alpha=1$، این مدل به دستگاه کلاسیک HGF تبدیل می‌شود [۸].

۲- تجزیه و تحلیل تقارنی‌های لی و جواب‌های دقیق دستگاه معادلات کسری HGF

در این بخش با استفاده از آنالیز گروه لی، خاصیت ناوردایی دستگاه معادلات کسری HGF بررسی می‌شود. همچنین از تجزیه و تحلیل گروه لی برای کاهش مدل کسری معادلهٔ اصلی استفاده می‌شود. برای این منظور، در مرحلهٔ اول جزئیات اصلی تجزیه و تحلیل تقارن لی برای دستگاه معادلات کسری PDE وابسته به زمان به طور خلاصه شرح داده شده است.

۲-۱ شرح تجزیه و تحلیل تقارن لی برای دستگاه معادلات کسری PDE

دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی ذیل با دومتغیر مستقل را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\Delta_1&\equiv\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}-F_1(x,t,u,v,w,u_x,v_x,w_x,\ldots)=0,\\ \Delta_2&\equiv\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}-F_2(x,t,u,v,w,u_x,v_x,w_x,\ldots)=0,\\ \Delta_3&\equiv\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha}-F_3(x,t,u,v,w,u_x,v_x,w_x,\ldots)=0,\end{aligned}\qquad (۲)$$

که در آن $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}(\cdot)$ نشان دهندهٔ اپراتور مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α $(0<\alpha\le 1)$ است. $\{u(x,t),v(x,t),w(x,t)\}$ و $\{x,t\}$ به ترتیب متغیرهای وابسته و مستقل هستند و اندیس‌ها مشتقات جزئی صحیح را نشان می دهند.

[۲] Riemann-Liouville

با توجه به تجزیه و تحلیل تقارن لی، فرض می‌کنیم معادلهٔ (۲) تحت تبدیلات یک پارامتری زیر ناوردا باشد

(۳)

$$
\begin{aligned}
&x^* = x + \varepsilon\xi(x,t,u,v,w) + O(\varepsilon^2),\\
&t^* = t + \varepsilon\tau(x,t,u,v,w) + O(\varepsilon^2),\\
&u^* = u + \varepsilon\eta(x,t,u,v,w) + O(\varepsilon^2),\\
&v^* = v + \varepsilon\phi(x,t,u,v,w) + O(\varepsilon^2),\\
&w^* = w + \varepsilon\phi(x,t,u,v,w) + O(\varepsilon^2),\\
&\frac{\partial^\alpha u^*}{\partial t^{*\alpha}} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varepsilon\eta^{\alpha,t} + O(\varepsilon^2),\\
&\frac{\partial^\alpha v^*}{\partial t^{*\alpha}} = \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \varepsilon\phi^{\alpha,t} + O(\varepsilon^2),\\
&\frac{\partial^\alpha w^*}{\partial t^{*\alpha}} = \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} + \varepsilon\theta^{\alpha,t} + O(\varepsilon^2),\\
&\frac{\partial^j u^*}{\partial x^{*j}} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} + \varepsilon\eta^{j,x} + O(\varepsilon^2), \quad j = 1,2,3,\ldots\\
&\frac{\partial^j v^*}{\partial x^{*j}} = \frac{\partial^j v}{\partial x^j} + \varepsilon\phi^{j,x} + O(\varepsilon^2), \quad j = 1,2,3,\ldots\\
&\frac{\partial^j w^*}{\partial x^{*j}} = \frac{\partial^j w}{\partial x^j} + \varepsilon\theta^{j,x} + O(\varepsilon^2), \quad j = 1,2,3,\ldots
\end{aligned}
$$

که در آن ε پارامتر گروه لی است و جبر لی مرتبط با آن توسط میدان برداری زیر تولید می‌شود

$$
\begin{aligned}
V = {} & \xi(x,t,u,v,w)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u,v,w)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u,v,w)\frac{\partial}{\partial u}\\
& + \phi(x,t,u,v,w)\frac{\partial}{\partial v} + \theta(x,t,u,v,w)\frac{\partial}{\partial w}.
\end{aligned} \tag{۴}
$$

$\{\xi,\tau,\eta,\phi,\theta\}$ مجموعه‌ای از بی‌نهایت کوچک‌ها و به ترتیب $\theta^{\alpha,t},\phi^{\alpha,t},\eta^{\alpha,t}$ و $\theta^{j,x},\phi^{j,x},\eta^{j,x}$ برای $(j=1,2,\ldots)$ بسط‌های بی‌نهایت کوچک از مرتبه α و j هستند. میدان برداری (۴) تقارن معادلهٔ (۲) را تولید می‌کند اگر و تنها اگر شرط ناوردایی تبدیلات بی‌نهایت کوچک زیر برقرار باشد:

$$
\begin{aligned}
&Pr^{(\alpha,m_1,n_1,r_1)}V(\Delta_1)|_{\Delta_1=0,\Delta_2=0,\Delta_3=0} = 0,\\
&Pr^{(\alpha,m_2,n_2,r_2)}V(\Delta_2)|_{\Delta_1=0,\Delta_2=0,\Delta_3=0} = 0,\\
&Pr^{(\alpha,m_3,n_3,r_3)}V(\Delta_3)|_{\Delta_1=0,\Delta_2=0,\Delta_3=0} = 0,
\end{aligned} \tag{۵}
$$

که در آن $(m_1\ n_1\ r_1)$ (m_2,n_2,r_2) و (m_3,n_3,r_3) به ترتیب نمایانگر مرتبه صحیح معادلات اول، دوم و سوم دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۲) هستند و اپراتور پرولانگیشن کسری تعمیم یافته $Pr^{\alpha,m,n}V\,(\cdot)$ به شرح زیر تعریف شده است [۴]

$$\begin{aligned} Pr^{(\alpha,m,n,r)}V &= V + \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial(\partial u_t^{\alpha})} + \eta^{1,x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots + \eta^{m,x}\frac{\partial}{\partial u_m x} \\ &+ \phi^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial(\partial v_t^{\alpha})} + \phi^{1,x}\frac{\partial}{\partial v_x} + \ldots + \phi^{n,x}\frac{\partial}{\partial v_n x} \\ &+ \theta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial(\partial w_t^{\alpha})} + \theta^{1,x}\frac{\partial}{\partial w_x} + \ldots + \theta^{r,x}\frac{\partial}{\partial w_r x}. \end{aligned} \tag{۶}$$

بسط مرتبهٔ صحیح بی‌نهایت کوچک‌های $\eta^{j,x}$، $\phi^{j,x}$ و $\theta^{j,x}$ صریحاً به شرح زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \eta^{j,x} &= D_x\eta^{j-1,x} - (D_x\xi)\frac{\partial^j u}{\partial x^j} - (D_x\tau)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^{j-1}u}{\partial x^{j-1}}\Big), \\ \phi^{j,x} &= D_x\phi^{j-1,x} - (D_x\xi)\frac{\partial^j v}{\partial x^j} - (D_x\tau)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^{j-1}v}{\partial x^{j-1}}\Big), \\ \theta^{j,x} &= D_x\theta^{j-1,x} - (D_x\xi)\frac{\partial^j w}{\partial x^j} - (D_x\tau)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^{j-1}w}{\partial x^{j-1}}\Big), \qquad j = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن D_x اپراتور مشتق کامل وابسته به متغیر x است.

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots + v_x\frac{\partial}{\partial v} + v_{xx}\frac{\partial}{\partial v_x} + \ldots + w_x\frac{\partial}{\partial w} + w_{xx}\frac{\partial}{\partial w_x} + \ldots \tag{۸}$$

بنابراین $\eta^{\alpha,t}$ نشان دهندهٔ بسط مرتبه α-ام اپراتور بی‌نهایت کوچک است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\eta^{\alpha,t} = D_t^{\alpha}\eta + \xi D_t^{\alpha}(u_x) - D_t^{\alpha}(\xi u_x) + D_t^{\alpha}\big(D_t(\tau)u\big) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u).$$

D_t^{α} نشان دهندهٔ مشتق کسری کامل نسبت به t از مرتبهٔ α است. با استفاده از قانون لایب نیتز و قاعده زنجیری بسط مرتبه α -ام بی‌نهایت کوچک $\eta^{\alpha,t}$ به روشنی به شرح زیر نشان داده می شود [۷-۶]:

$$\begin{aligned}\eta^{\alpha,t} &= \frac{\partial^{\alpha}\eta}{\partial t^{\alpha}} + \eta\big(\eta_u - \alpha D_t(\tau)\big)\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} - u\,\frac{\partial^{\alpha}\eta_u}{\partial t^{\alpha}} + \Big(\eta_v\,\frac{\partial^{\alpha}v}{\partial t^{\alpha}} - v\,\frac{\partial^{\alpha}\eta_v}{\partial t^{\alpha}}\Big)\\ &+ \Big(\eta_w\,\frac{\partial^{\alpha}w}{\partial t^{\alpha}} - w\,\frac{\partial^{\alpha}\eta_w}{\partial t^{\alpha}}\Big) + \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^{i}\eta_u}{\partial t^{i}} - \binom{\alpha}{i+1}D_t^{i+1}(\tau)\Big]D_t^{\alpha-i}(u)\\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^{i}\eta_v}{\partial t^{i}}D_t^{\alpha-i}(v) + \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^{i}\eta_w}{\partial t^{i}}D_t^{\alpha-i}(w)\\ &- \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}D_t^{i}(\xi)D_t^{\alpha-i}(u_x) + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,\end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\,\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s u^s\,\frac{\partial^{j}(u^{r-s})}{\partial t^{j}}\frac{\partial^{i-j+r}\eta}{\partial t^{i-j}\partial u^{r}},\\ \mu_2 &= \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\,\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s v^s\,\frac{\partial^{j}(v^{r-s})}{\partial t^{j}}\frac{\partial^{i-j+r}\eta}{\partial t^{i-j}\partial v^{r}},\\ \mu_3 &= \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\,\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s w^s\,\frac{\partial^{j}(w^{r-s})}{\partial t^{j}}\frac{\partial^{i-j+r}\eta}{\partial t^{i-j}\partial w^{r}},\end{aligned}$$

به طور مشابه، $\phi^{\alpha,t}$ و $\theta^{\alpha,t}$ صریحاً می‌توانند به شرح زیر باشند:

(۱۰)

$$\begin{aligned}\phi^{\alpha,t} &= \frac{\partial^{\alpha}\phi}{\partial t^{\alpha}} + \phi\big(\phi_v - \alpha D_t(\tau)\big)\frac{\partial^{\alpha}v}{\partial t^{\alpha}} - v\,\frac{\partial^{\alpha}\phi_v}{\partial t^{\alpha}} + \Big(\phi_u\,\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} - u\,\frac{\partial^{\alpha}\phi_u}{\partial t^{\alpha}}\Big)\\ &+ \Big(\phi_w\,\frac{\partial^{\alpha}w}{\partial t^{\alpha}} - w\,\frac{\partial^{\alpha}\phi_w}{\partial t^{\alpha}}\Big) + \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^{i}\phi_v}{\partial t^{i}} - \binom{\alpha}{i+1}D_t^{i+1}(\tau)\Big]D_t^{\alpha-i}(v)\\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^{i}\phi_u}{\partial t^{i}}D_t^{\alpha-i}(u) + \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^{i}\phi_w}{\partial t^{i}}D_t^{\alpha-i}(w)\\ &- \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}D_t^{i}(\xi)D_t^{\alpha-i}(v_x) + q_1 + q_2 + q_3,\\ \theta^{\alpha,t} &= \frac{\partial^{\alpha}\theta}{\partial t^{\alpha}} + \theta\big(\theta_w - \alpha D_t(\tau)\big)\frac{\partial^{\alpha}w}{\partial t^{\alpha}} - w\,\frac{\partial^{\alpha}\theta_w}{\partial t^{\alpha}} + \Big(\theta_u\,\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} - u\,\frac{\partial^{\alpha}\theta_u}{\partial t^{\alpha}}\Big)\\ &+ \Big(\theta_v\,\frac{\partial^{\alpha}v}{\partial t^{\alpha}} - v\,\frac{\partial^{\alpha}\theta_v}{\partial t^{\alpha}}\Big) + \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^{i}\theta_w}{\partial t^{i}} - \binom{\alpha}{i+1}D_t^{i+1}(\tau)\Big]D_t^{\alpha-i}(w)\\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^{i}\theta_u}{\partial t^{i}}D_t^{\alpha-i}(u) + \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\frac{\partial^{i}\theta_v}{\partial t^{i}}D_t^{\alpha-i}(v)\\ &- \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}D_t^{i}(\xi)D_t^{\alpha-i}(w_x) + E_1 + E_2 + E_3\end{aligned}$$

که در آن

$$q_1=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s u^s\frac{\partial^j(u^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\phi}{\partial t^{i-j}\partial u^r},$$
$$q_2=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s v^s\frac{\partial^j(v^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\phi}{\partial t^{i-j}\partial v^r},$$
$$q_3=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s w^s\frac{\partial^j(w^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\phi}{\partial t^{i-j}\partial w^r},$$

$$E_1=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s u^s\frac{\partial^j(u^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\phi}{\partial t^{i-j}\partial u^r},$$
$$E_2=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s v^s\frac{\partial^j(v^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\phi}{\partial t^{i-j}\partial v^r},$$
$$E_3=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{i}\sum_{r=2}^{j}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{\alpha}{i}\binom{i}{j}\binom{r}{s}\frac{t^{i-\alpha}}{r!\Gamma(i-\alpha+1)}(-1)^s w^s\frac{\partial^j(w^{r-s})}{\partial t^j}\frac{\partial^{i-j+r}\phi}{\partial t^{i-j}\partial w^r},$$

با توجه به این‌که زمانی که η، ϕ و θ نسبت به متغیرهای وابسته u، v و w خطی هستند از معادلات (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شود $\mu_1=\mu_2=\mu_3=q_1=q_2=q_3=E_1=E_2=E_3=0$ چون روابط فوق شامل مشتقات $\frac{\partial^i\eta}{\partial^i u},\frac{\partial^i\phi}{\partial^i v}$ و $\frac{\partial^i\theta}{\partial^i w}$ به ازای $i\geq 2$ هستند.

۲-۱-۱ تقارنی‌های کلاسیک

شرط ناوردایی بی‌نهایت کوچک در تجزیه و تحلیل تقارن لی برای دستگاه داده شده (۲) به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{cases} Pr^{(\alpha,m_1,n_1,r_1)}V\Big(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}-F_1(x,t,u,v,u_x,v_x,...)\Big)\Big|_{(2)}=0, \\ Pr^{(\alpha,m_2,n_2,r_2)}V\Big(\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}-F_2(x,t,u,v,u_x,v_x,...)\Big)\Big|_{(2)}=0, \\ Pr^{(\alpha,m_3,n_3,r_3)}V\Big(\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha}-F_3(x,t,u,v,u_x,v_x,...)\Big)\Big|_{(2)}=0, \end{cases} \tag{۱۱}$$

از رابطهٔ (۱۱) شرط ناوردایی برای دستگاه معادلات اصلی (۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} Pr^{(\alpha,m_1,n_1,r_1)}V\Big(\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}-u_{xx}-u(1-u-a_1v)\Big)\Big|_{(1)}=0, \\ Pr^{(\alpha,m_2,n_2,r_2)}V\Big(\dfrac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}-v_{xx}-v(1-u-a_1v)-uw-a_1vw\Big)\Big|_{(1)}=0, \\ Pr^{(\alpha,m_3,n_3,r_3)}V\Big(\dfrac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha}-dw_{xx}-a_3w(1-w)+a_4uw+a_1a_4vw\Big)\Big|_{(1)}=0, \end{cases}$$

از روابط فوق دستگاه معادلات مشخصهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\binom{\alpha}{n}\frac{\partial^n\eta_u}{\partial t^n}-\binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau)=0, \qquad n=1,2,\dots$$
$$\binom{\alpha}{n}\frac{\partial^n\phi_v}{\partial t^n}-\binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau)=0, \qquad n=1,2,\dots$$
$$\binom{\alpha}{n}\frac{\partial^n\theta_w}{\partial t^n}-\binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau)=0, \qquad n=1,2,\dots$$

$$\frac{\partial^n\eta_v}{\partial t^n}=\frac{\partial^n\eta_w}{\partial t^n}=0, \qquad n=1,2,\dots$$
$$\frac{\partial^n\phi_u}{\partial t^n}=\frac{\partial^n\phi_w}{\partial t^n}=0, \qquad n=1,2,\dots$$
$$\frac{\partial^n\theta_u}{\partial t^n}=\frac{\partial^n\theta_v}{\partial t^n}=0, \qquad n=1,2,\dots$$
$$D_t^n(\xi)=0, \qquad n=1,2,\dots$$
$$\tau_x=\tau_u=\tau_v=\tau_w=0,\ \xi_u=\xi_v=\xi_w=0,\ \alpha\tau_{tt}-2\eta_{ut}-\tau_{tt}=0,\ \alpha\tau_{tt}-2\phi_{vt}-\tau_{tt}=0,$$
$$\alpha\tau_{tt}-2\theta_{wt}-\tau_{tt}=0,\ \xi_{xx}-2\eta_{ux}=0,\ \xi_{xx}-2\phi_{vx}=0,\ \xi_{xx}-2\theta_{wx}=0,\ 2\xi_x-\alpha\tau_t=0,$$

بنابراین مولدهای بی‌نهایت کوچک را به صورت زیر داریم:

$$V_1=u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad V_2=v\frac{\partial}{\partial v}, \qquad V_3=w\frac{\partial}{\partial w}, \qquad V_4=\frac{\partial}{\partial x},$$
$$V_5=2\alpha x\frac{\partial}{\partial x}+at\frac{\partial}{\partial t}+(3u\alpha-2u)\frac{\partial}{\partial u}+(3v\alpha-2v)\frac{\partial}{\partial v}+(3w\alpha-2w)\frac{\partial}{\partial w},$$

به عنوان مثال، متغیر تشابه[۳] و تبدیلات تشابه مربوط به مولد بی‌نهایت کوچک $V_4 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ را می‌توان با حل معادله مشخصهٔ مرتبط با آن یعنی

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0} = \frac{dv}{0} = \frac{dw}{0}$$

به صورت $u(x\ t) = f(t)$، $v(x,t) = g(t)$ و $w(x\ t) = h(t)$ به دست آورد که این جواب‌های ناوردا دستگاه معادلات کسری با مشتقات جزئی HGF را به دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری معمولی زیر تبدیل می‌کنند:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} f(t) - f(t)\big(1 - f(t) - a_1 g(t)\big) = 0, \\ D_t^{\alpha} g(t) - g(t)\big(1 - f(t) - a_1 g(t)\big) = 0, \\ D_t^{\alpha} h(t) - a_3 h(t)\big(1 - h(t)\big) + a_4 f(t) h(t) + a_1 a_4 g(t) h(t) = 0. \end{cases}$$

اگر در دستگاه بالا فرض کنیم که $f(t) = -a_1 g(t)$ و $a_3 = 0$ باشد، یکی از جواب‌های دقیق دستگاه فوق را می‌توان به کمک تبدیلات لاپلاس کسری به صورت زیر محاسبه کرد

$$\begin{aligned} f(t) &= -a_1 k_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}), \\ g(t) &= k_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}), \\ h(t) &= k_2 t^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

که در آن k_1 و k_2 ثابت‌های دلخواه و $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ نشان دهندهٔ تابع میتاگ لفلر[۴] است.

همچنین برای مولد بی‌نهایت کوچک $V = V_1 + V_2 + V + V$ تبدیلات تشابه را می‌توان با حل معادله مشخصهٔ مرتبط با آن به دست آورد:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{u} = \frac{dv}{v} = \frac{dw}{w}.$$

رابطهٔ بالا نتیجه می‌دهد $u(x,t) = e^x f(t)$, $v(x,t) = e^x g(t)$ و $w(x,t) = e^x h(t)$. با فرض این‌که $f(t) = -a_1 g(t)$ و $a_3 = 0$، معادلهٔ (۱) به دستگاه معادله کسری معمولی زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} f(t) - 2f(t) = 0, \\ D_t^{\alpha} g(t) - 2g(t) = 0, \\ D_t^{\alpha} h(t) - dh(t) = 0. \end{cases}$$

[3] similarity variable
[4] Mittag-Leffler

جواب‌های دقیق دستگاه فوق با استفاده از تبدیلات لاپلاس کسری به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$f(t) = -a_1 k_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(2t^{\alpha}),$$
$$g(t) = k_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(2t^{\alpha}),$$
$$h(t) = k_2 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(dt^{\alpha}),$$

که در آن k_1 و k_2 ثابت‌های دلخواه هستند. در نتیجه جواب‌های دقیق دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری HGF به شکل زیر می‌باشند

$$\begin{cases} u(x,t) = -a_1 k_1 e^{x} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(2t^{\alpha}), \\ v(x,t) = k_1 e^{x} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(2t^{\alpha}), \\ w(x,t) = k_2 e^{x} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(dt^{\alpha}). \end{cases}$$

برای مولد بی‌نهایت کوچک V_5 داریم:

$$\frac{dx}{2\alpha x} = \frac{dt}{at} = \frac{du}{3u\alpha - 2u} = \frac{dv}{3v\alpha - 2v} = \frac{dw}{3w\alpha - 2w},$$

با توجه به رابطهٔ بالا جواب‌های ناوردا به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{cases} u(x,t) = F(\zeta) t^{\frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{2}}, \\ v(x,t) = G(\zeta) t^{\frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{2}}, \qquad (\zeta = x t^{\frac{-\alpha}{2}}) \\ w(x,t) = H(\zeta) t^{\frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{۱۲}$$

قضیهٔ ۲-۱ با استفاده از تبدیل (۱۲) و با فرض این‌که $u = -a_1 v$ و $a_3 = 0$، معادلهٔ اصلی (۱) به دستگاه معادلات کسری معمولی زیر کاهش پیدا می‌کند

$$\begin{cases} \left(\mathcal{P}_{\frac{2}{\alpha}}^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2},\alpha} F\right)(\zeta) - F''(\zeta) = 0 \\ \left(\mathcal{P}_{\frac{2}{\alpha}}^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2},\alpha} G\right)(\zeta) - G''(\zeta) = 0 \\ \left(\mathcal{P}_{\frac{2}{\alpha}}^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2},\alpha} H\right)(\zeta) - dH''(\zeta) = 0. \end{cases} \tag{۱۳}$$

که در آن

$$\left(\mathcal{P}_{\beta}^{\tau,\alpha}F\right):=\Pi_{j=0}^{n-1}\left(\tau+j-\frac{1}{\beta}\zeta\frac{d}{d\zeta}\right)\left(\mathcal{K}_{\beta}^{\tau+\alpha,n-\alpha}F\right)(\zeta),$$
$$\left(\mathcal{P}_{\beta}^{\tau,\alpha}G\right):=\Pi_{j=0}^{n-1}\left(\tau+j-\frac{1}{\beta}\zeta\frac{d}{d\zeta}\right)\left(\mathcal{K}_{\beta}^{\tau+\alpha,n-\alpha}G\right)(\zeta),\qquad n=\begin{cases}[\alpha]+1, & \alpha\notin\mathbb{N}\\ \alpha, & \alpha\in\mathbb{N}\end{cases}$$
$$\left(\mathcal{P}_{\beta}^{\tau,\alpha}H\right):=\Pi_{j=0}^{n-1}\left(\tau+j-\frac{1}{\beta}\zeta\frac{d}{d\zeta}\right)\left(\mathcal{K}_{\beta}^{\tau+\alpha,n-\alpha}H\right)(\zeta),$$

و

$$\left(\mathcal{K}_{\beta}^{\tau,\alpha}F\right):=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_1^{\infty}(s-1)^{\alpha-1}s^{-(\tau+\alpha)}F\left(\zeta s^{\frac{1}{\beta}}\right)ds, & \alpha>0\\ F(\zeta),\alpha=0\end{cases}$$
$$\left(\mathcal{K}_{\beta}^{\tau,\alpha}G\right):=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_1^{\infty}(s-1)^{\alpha-1}s^{-(\tau+\alpha)}G\left(\zeta s^{\frac{1}{\beta}}\right)ds, & \alpha>0\\ G(\zeta),\alpha=0\end{cases}$$
$$\left(\mathcal{K}_{\beta}^{\tau,\alpha}H\right):=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_1^{\infty}(s-1)^{\alpha-1}s^{-(\tau+\alpha)}H\left(\zeta s^{\frac{1}{\beta}}\right)ds, & \alpha>0\\ H(\zeta),\alpha=0\end{cases}$$

نشان دهندهٔ اپراتور انتگرال کسری اردلی-کوبر[5] برای $F(\zeta)$، $G(\zeta)$ و $H(\zeta)$ است.

برهان: فرض کنیم $\alpha\in(n-1,n)$ و $n\in\mathbb{N}$ باشد، مشتق کسری ریمان-لیوویل رابطهٔ (۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}=\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}s^{\frac{3\alpha}{4}-\frac{1}{2}}F(xs^{-\frac{\alpha}{2}})ds\right] \qquad (۱۴)$$

فرض کنیم $z=\frac{t}{s}$ ، بنابراین $ds=\frac{-t}{z^2}$. لذا معادلهٔ (۱۴) را به صورت زیر خواهیم داشت

$$D^{\alpha}u=\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left[\frac{t^{n-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_1^{\infty}(z-1)^{n-\alpha-1}z^{\frac{\alpha}{4}-n+\frac{3}{2}}F(xt^{-\frac{\alpha}{2}}z^{\frac{\alpha}{2}})dz\right]$$
$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}=\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left[t^{n-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}}\left(\mathcal{K}_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{3\alpha}{4}-\frac{3}{2},n-\alpha}F\right)(\zeta)\right].$$

[5] Erdélyi–Kober

به علاوه، با فرض $\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{2}}$ و $\rho \in (0,\infty)$ داریم:

$$t\frac{\partial}{\partial t}\rho(\zeta) = t\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{d\rho(\zeta)}{d\zeta} = -\frac{\alpha}{2}\zeta\frac{d\rho(\zeta)}{d\zeta}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Big[t^{n-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}}\left(\mathcal{K}_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{3\alpha}{4}-\frac{3}{2},n-\alpha}F\right)(\zeta)\Big] = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(t^{n-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}}\left(\mathcal{K}_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{3\alpha}{4}-\frac{3}{2},n-\alpha}F\right)(\zeta)\Big)\Big]\\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[t^{n-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2}}\left(n-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\zeta\frac{d}{d\zeta}\right)\left(\mathcal{K}_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{3\alpha}{4}-\frac{3}{2},n-\alpha}F\right)(\zeta)\right]\\
&\quad\vdots\\
&= t^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2}}\Pi_{j=0}^{n-1}\left(?-?\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2}+j-\frac{\alpha}{2}\zeta\frac{d}{d\zeta}\right)\left(\mathcal{K}_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{3\alpha}{4}-\frac{3}{2},n-\alpha}F\right)(\zeta)\\
&= t^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2}}\left(\mathcal{P}_{\frac{2}{\alpha}}^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2},\alpha}F\right)(\zeta).
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2}}\left(\mathcal{P}_{\frac{2}{\alpha}}^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2},\alpha}F\right)(\zeta).$$

به روش مشابهی داریم

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} = t^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2}}\left(\mathcal{P}_{\frac{2}{\alpha}}^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2},\alpha}G\right)(\zeta),$$
$$\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} = t^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2}}\left(\mathcal{P}_{\frac{2}{\alpha}}^{-\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{2},\alpha}H\right)(\zeta).$$

و اثبات کامل می‌شود.

جواب‌های سری توانی برای دستگاه (۱۳):

جواب‌های دقیق و تحلیلی را از طریق روش سری توانی و محاسبات نمادین برای این دستگاه معادلات بررسی می‌کنیم.

روابط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\zeta^i, \qquad G(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\zeta^i, \qquad H(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\zeta^i, \qquad (۱۵)$$

با توجه به این سری‌ها داریم

(۱۶)

$$F'(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty} i a_i \zeta^{i-1}, \qquad F''(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) a_i \zeta^{i-2},$$
$$G'(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty} i b_i \zeta^{i-1}, \qquad G''(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) b_i \zeta^{i-2},$$
$$H'(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty} i c_i \zeta^{i-1}, \qquad H''(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) c_i \zeta^{i-2},$$
$$\left(\mathcal{P}_{\beta}^{\tau,\alpha}F\right)(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{\Gamma(\tau-\frac{i}{\beta}+1)}{\Gamma(\tau-\frac{i}{\beta}+1-\alpha)}\zeta^{i},$$
$$\left(\mathcal{P}_{\beta}^{\tau,\alpha}G\right)(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{\Gamma(\tau-\frac{i}{\beta}+1)}{\Gamma(\tau-\frac{i}{\beta}+1-\alpha)}\zeta^{i},$$
$$\left(\mathcal{P}_{\beta}^{\tau,\alpha}H\right)(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{\Gamma(\tau-\frac{i}{\beta}+1)}{\Gamma(\tau-\frac{i}{\beta}+1-\alpha)}\zeta^{i}.$$

با جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۶) در معادلهٔ (۱۳) داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{5\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}\zeta^{i}-\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) a_i \zeta^{i-2}=0,$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{5\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}\zeta^{i}-\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) b_i \zeta^{i-2}=0, \qquad (۱۷)$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{5\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}\zeta^{i}-d\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) c_i \zeta^{i-2}=0,$$

لذا روابط زیر را برای ضرایب a_i، b_i و c_i خواهیم داشت:

$$a_{i+2}=\frac{a_i\Gamma(-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}{(i+1)(i+2)\Gamma(-\frac{5\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})},$$
$$b_{i+2}=\frac{b_i\Gamma(-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}{(i+1)(i+2)\Gamma(-\frac{5\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})},$$
$$c_{i+2}=\frac{c_i\Gamma(-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})}{(i+1)(i+2)d\Gamma(-\frac{5\alpha}{4}-\frac{\alpha i}{2}-\frac{1}{2})},$$

و به ازای $(i=0,1)$ ضرایب a_i، b_i و c_i ثابت‌های دلخواه و حقیقی هستند.

۲-۱-۲ تقارنی‌های غیر کلاسیک

برای اولین بار بلومن و کول در مطالعاتی که در زمینه کاهش دهنده‌های متقارن روی معادلهٔ گرما داشتند، پیشنهاد روشی به نام غیر کلاسیک را دادند [۱۶].

اساس ایدهٔ این روش برایPDE رتبهٔ n -ام با p متغیر مستقل $x=\left(x_1,\dots,x_p\right)$ و یک متغیر وابسته $u=u\left(x\right)$ به کار رفته است.

$$\Delta\equiv\Delta(x,u,u^{(l)}(x),\dots,u^{(n)})=0, \tag{۱۸}$$

که در آن $u^{(l)}$ تمام مشتقات جزئی مرتبه l از u را نشان می‌دهد. در ادامه PDE رابطهٔ (۱۸) با شرط رویه ناوردای زیر تکمیل شده است:

$$\Psi\equiv\sum_{i=1}^{p}\xi_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}-\eta(x,u)=0, \tag{۱۹}$$

که مربوط به میدان برداری

$$V=\sum_{i=1}^{p}\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۲۰}$$

می‌باشد.

فرض کنیم زیر منیفلد ما به $S_{\Delta}=\{u(x):\Delta=0\}$ یا به عبارتی S مجموعه جواب‌های دستگاه (۱۸) باشد. در روش غیرکلاسیک یک شرط مورد نیاز این است که زیرمجموعهٔ S_{Δ} که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_{\Delta,\Psi}=\{u(x):\Delta=0,\Psi=0\}, \qquad (۲۱)$$

تحت تبدیلات با مولدهای بی‌نهایت کوچک (۲۰) ناوردا باشند. تعداد معادلات مشخصهٔ به دست آمده در روش غیرکلاسیک کمتر از روش کلاسیک است، در نتیجه مجموعه جواب‌ها در حالت کلی برای روش کلاسیک گسترده‌تر است. لذا برای بررسی وضعیت غیرکلاسیک گروه لی دستگاه مورد نظر، علاوه بر $Pr^{(\alpha,m_1,n_1,r_1)}(V)=Pr^{(\alpha,m_3,n_3,r_3)}(V)=Pr^{(\alpha,m_2,n_2,r_2)}(V)=0$، باید شرایط رویه ناوردا را نیز داشته باشیم که به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &\equiv \xi(x,t,u,v)u_x+\tau(x,t,u,v)u_t-\eta=0,\\
\Psi_2 &\equiv \xi(x,t,u,v)v_x+\tau(x,t,u,v)v_t-\phi=0,\\
\Psi_3 &\equiv \xi(x,t,u,v)w_x+\tau(x,t,u,v)w_t-\theta=0.
\end{aligned}$$

بدون این‌که از کلیت مسئله کاسته شود فرض کنیم $\tau=0$ و $\xi=1$. بنابراین، شرایط رویه ناوردا را می توان به شرح زیر به دست آورد:

$$u_x=\eta, \qquad v_x=\phi, \qquad w_x=\theta,$$

لذا داریم

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \eta_x+\eta\eta_u+\phi\eta_v+\theta\eta_w,\\
v_{xx} &= \phi_x+\eta\phi_u+\phi\phi_v+\theta\phi_w,\\
w_{xx} &= \theta_x+\eta\theta_u+\phi\theta_v+\theta\theta_w,
\end{aligned}$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطهٔ (۱) نتایج $\eta=0$ ، $\phi=0$ و $\theta=0$ حاصل می‌شود. بنابراین بی‌نهایت کوچک متقارن $V_6=\dfrac{\partial}{\partial x}$ را خواهیم داشت. این میدان برداری در حالت کلاسیک V_4 بررسی شده است.

برای حالت بعدی زمانی که $\tau\neq 0$ و $\xi=1$ باشد، فرض می‌کنیم $\tau_u=\tau_v=\tau_w=0$ لذا شرایط رویه ناوردا به صورت زیر خواهند بود:

$$u_x=\eta-\tau u_t, \qquad v_x=\phi-\tau v_t, \qquad w_x=\theta-\tau w_t$$

برای این حالت بی‌نهایت کوچک متقارن زیر را به دست می‌آوریم

$$V_7=\frac{\partial}{\partial x}+c\,\frac{\partial}{\partial t}.$$

با توجه به این میدان برداری مرتبه زیر قابل کاهش است:

$$u(x,t)=f(\zeta), \quad v(x,t)=g(\zeta), \quad w(x,t)=h(\zeta), \qquad (\zeta=t-cx)$$

بنابراین دستگاه معادلات (۱) به دستگاه زیر کاهش پیدا می‌کند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{\alpha} f(\zeta)}{\partial \zeta^{\alpha}} - c^2 f''(\zeta) - f(\zeta)\big(1 - f(\zeta) - a_1 g(\zeta)\big) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial^{\alpha} g(\zeta)}{\partial \zeta^{\alpha}} - c^2 g''(\zeta) - g(\zeta)\big(1 - f(\zeta) - a_1 g(\zeta)\big) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial^{\alpha} h(\zeta)}{\partial \zeta^{\alpha}} - dc^2 h''(\zeta) - a_3 h(\zeta)\big(1 - h(\zeta)\big) + a_4 f(\zeta) h(\zeta) + a_1 a_4 g(\zeta) h(\zeta) = 0. \end{cases} \tag{۲۲}$$

جواب دقیق این دستگاه با فرض این‌که $f(\zeta) = -a_1 g(\zeta)$ و $a_3 = 0$ و با استفاده از تبدیلات لاپلاس کسری به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{a_1 k_1}{\Gamma(1-\alpha)} \zeta^{2\alpha-2} E_{\alpha-2,2\alpha-1}(c^2 \zeta^{\alpha-2}) - a_1 k_1 (1 - E_{\alpha-2}(c^2 \zeta^{\alpha-2})) \\ &\quad + a_1 c^2 k_2 \zeta^{\alpha-3} E_{\alpha-2,\alpha-2}(c^2 \zeta^{\alpha-2}), \\ g(\zeta) &= \frac{-\gamma_1}{\Gamma(1-\alpha)} \zeta^{2\alpha-2} E_{\alpha-2,2\alpha-1}(c^2 \zeta^{\alpha-2}) + \gamma_1 (1 - E_{\alpha-2}(c^2 \zeta^{\alpha-2})) \\ &\quad - c^2 \gamma_2 \zeta^{\alpha-3} E_{\alpha-2,\alpha-2}(c^2 \zeta^{\alpha-2}), \\ h(\zeta) &= \frac{-\lambda_1}{\Gamma(1-\alpha)} \zeta^{2\alpha-2} E_{\alpha-2,2\alpha-1}(d\, \zeta^{\alpha-2}) + \lambda_1 (1 - E_{\alpha-2}(d\, \zeta^{\alpha-2})) \\ &\quad - d\, \lambda_2 \zeta^{\alpha-3} E_{\alpha-2,\alpha-2}(d\, \zeta^{\alpha-2}). \end{aligned}$$

که در آن k_1، γ_1 و λ_1 ثابت‌های دلخواهی هستند.

۳- نتیجه‌گیری

در مقالهٔ حاضر، تجزیه و تحلیل تقارن غیرکلاسیک و کلاسیک گروه لی در دستگاه معادلات کسری HGF بررسی شدند. دستگاه PDE کسری وابسته به زمان حاکم از طریق جواب‌های ناوردای به دست آمده معادلهٔ HGF را به یک دستگاه معادلات کسری ODE کاهش داده و جواب‌های دقیق آن را محاسبه کردیم.

References

1. G. Bluman, S. Anco, Symmetry and integration methods for differential equations, Vol. 154, Springer Science and Business Media, 2008.

2. N. H. Ibragimov, CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 3, CRC press, 1995.

3. P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Vol. 107, Springer Science & Business Media, 2000.

4. M. S. Hashemi, D. Baleanu, Lie Symmetry Analysis of Fractional Differential Equations, Chapman and Hall/CRC, 2020.

5. K. Oldham, J. Spanier, The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, Elsevier, 1974.

6. K. S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley, 1993.

7. A. Kilbas, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, 2006.

8. R. Cherniha, V. Davydovych, A hunter-gatherer-farmer population model: Lie symmetries, exact solution and their interpretation.

9. V. V. Uchaikin, Fractional derivatives for physicists and engineers, Vol. 2, Springer, 2013.

10. J. F. Gómez-Aguilar, A. Atangana, V. F. Morales-Delgado, Electrical circuits rc, lc, and rl described by atangana-baleanu fractional derivatives, International Journal of Circuit Theory and Applications 45 (11) (2017) 1514–1533.

11. M. Heydari, A. Atangana, A cardinal approach for nonlinear variable order time fractional schrüodinger equation defined by Atangana-baleanu-caputo derivative, Chaos, Solitons & Fractals 128 (2019) 339–348.

12. A. Atangana, Modelling the spread of covid-19 with new fractal fractional operators: Can the lockdown save mankind before vaccination, Chaos, Solitons & Fractals 136 (2020) 109860.

13. R. L. Magin, Fractional calculus in bioengineering, Vol. 2, Begell House Redding, 2006.

14. R. Hilfer, et al., Applications of fractional calculus in physics, Vol. 35, World scientific Singapore, 2000.

15. D. Baleanu, J. A. T. Machado, A. C. Luo, Fractional dynamics and control, Springer Science & Business Media, 2011.

16. G. W. Bluman, J. D. Cole, The general similarity solution of the heat equation, Journal of Mathematics and Mechanics 18 (11) (1969) 1025– 1042.