Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

On the generalization of evolutionary continuous model in random markets

Elyas Shivanian [1], **Mahdi Keshtkar**[2], **Hamidreza Navidi**[3]

1. Department of Mathematics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran. E-mail: shivanian@sci.ikiu.ac.ir

2. Department of Applied Mathematics, Buein Zahra University Qazvin, Iran. E-mail: keshtkarmahdi@gmail.com

3. Department of Applied Mathematics, Shahed University, Tehran, Iran. E-mail: navidi@shahed.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 22 June 2016
Received in revised form: 22 June 2016
Accepted: 28 September 2016
Published online: 3 December 2023

Keywords:
Random markets,
equilibrium fixed point,
nonlinear operator,
evolutionary continuous model,
distribution of wealth.

ABSTRACT

Introduction

A generalization of the continuous economic model is proposed for random markets. In this model, agents interact by pairs and exchange their money in a random way, in general, with possibly non- constant total amount of “money”. This model takes the form of an iterated nonlinear map of the distribution of wealth. We show the only way to reach equilibrium fixed point distribution is the agents to share their money without expansion or contraction factor. Furthermore, it is proved the higher momenta of the distribution exist and the iteration of higher momenta becomes stable under some specific conditions.

Material and methods

In this paper, we develop a general form of Z-model that is similar to the behavior of original model (Z-model) in which each of the two partners in a transaction have a random amount u and v. During the transaction, they put first the whole amount $(u+v)$ in a basket and then share its content randomly.

Results and discussion

In this model at the time of the transaction between the two individuals, one of the individual puts au in the basket (instead of u in the Z-model) and the other puts bv in the basket, instead of v.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- As it will be seen, this model is not conservative except when some special conditions hold for the coefficients a and b.
- If we consider the symmetrical interaction for the pair of agents (v,u), in this case the first agent will put av in the basket and the second one bu. For both trades, those of the pairs (u,v) and (v,u), the total money to share in the basket is $(a+b)(u+v)$.

- It is shown the only way to reach equilibrium fixed point distribution is the agents to share their money without expansion or contraction factor.
- It is proved the higher momenta of the distribution exist and the iteration of higher momenta becomes stable under some specific conditions.

How to cite: Shivanian, Elyas., Keshtkar, Mahdi., & Navidi, Hamidreza. (2023). On the generalization of evolutionary continuous model in random markets. *Mathematical Researches*, 9 (2), 1-14.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰۴۶-۲۰۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۰۰۴-۲۰۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

یک مدل تعمیم یافته از فرایند تکاملی پیوسته در بازارهای تصادفی

الیاس شیوانیان [۱] ✉، مهدی کشتکار [۲]، حمیدرضا نویدی [۳]

۱. دانشیار گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران. ✉ رایانامه: shivanian@sci.ikiu.ac.ir
۲. استادیار گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی فنی مهندسی بویین زهرا، بویین زهرا، قزوین، ایران. رایانامه: keshtkarmahdi@gmail.com
۳. استاد گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران. رایانامه: navidi@shahed.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۲/۱۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲

واژه‌های کلیدی:
نقطه تعادلی،
مدل تکاملی،
عملگر غیرخطی،
بازارهای تصادفی.

چکیده

در این مقاله به تعمیم مساله Z-مدل، که یک مدل اقتصادی پیوسته در بازارهای تصادفی است می‌پردازیم. در این مدل عامل‌های اقتصادی دو به دو بطور تصادفی مبادله مالی دارند و این امکان وجود دارد که میزان کل دارایی سیستم در فرایند مالی ثابت نباشد. این مدل را به صورت یک عملگر غیرخطی تکراری از توزیع ثروت بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم تنها راه رسیدن به نقطه ثابت تعادلی، تبادل ثروت بدون ضریب انبساطی یا انقباضی بین عامل‌های اقتصادی است. سرانجام وجود گشتاورهای بالاتر توزیع را ثابت خواهیم کرد و تکرار گشتاورهای بالاتر تحت شرایط خاصی پایدار می‌شود.

استناد: شیوانیان، الیاس؛ کشتکار، مهدی؛ و نویدی، حمیدرضا (۱۴۰۲). یک مدل تعمیم یافته از فرایند تکاملی پیوسته در بازارهای تصادفی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۱ – ۱۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

نظریه بازی تکاملی به دنبال ساختن دینامیکی برای رسیدن به رفتار تعادلی است و معروف ترین دینامیک های تکاملی، دینامیک ریپلیکیتور و لاگیت می باشد. یافتن یک استراتژی مناسب در یک بازی که از دو دسته افراد تشکیل شده و به صورت سازمانی عمل می کند و به دنبال تعادل می باشد نیز نوع دیگری از این بازی هاست. رویکرد معمول در این زمینه، در نظر گرفتن بازی هایی با تعداد متناهی استراتژی است که با دینامیک هایی به تعادل نش همگرا می شوند. فناوری ریزآرایه یک ابزار تحلیلی کوچک دیگری است که به کمک آن می توان ده ها هزار بازیکن را در جامعه ای که به طور همزمان با یکدیگربرخورد دارند مورد کاوش قرار داد. در سالهای اخیر روشها و مدل‌های مختلفی از فیزیک آماری برای تفسیر داده‌های اقتصادی به طور موفقیت آمیزی به کار گرفته شده است. به عنوان مثال براساس گزارش ارائه شده در جوامع غربی حدود ۹۵٪ جامعه که درآمدشان متوسط به پایین است از توزیع ثروت نمایی و درآمد بقیه افراد جامعه که ۵٪ جامعه را شامل می‌شود از توزیع قانون توان تبعیت می‌کنند[۱-۳]. یک نوع دیگر از مدل‌های تصادفی وابسته به بازار، مدل‌های شبه-گاز می‌باشد [۴]، این مدل‌های تصادفی تبادلات اقتصادی مالی بین عامل‌های اقتصادی را مشابه برخورد ذرات در گازها که تبادل انرژی دارند تفسیر می کنند.

اخیراً براساس ایده شبه-گازها یک پارامتر کنترلی که درجه تبادلات بین عامل‌های اقتصادی را نشان می‌دهد در بازه $[0,1]$ در نظر گرفته شده است، یعنی اگر پارامتر مقدارش صفر باشد، بین عامل‌ها تعاملی صورت نمی‌گیرد و اگر یک باشد همه عامل‌ها تعامل دارند تحت این شرایط به این نتیجه دست یافته اند که توزیع نمایی گیبس برای بازه مذکور برقرار است [6]. در همین راستا برای مدل‌های بازار تصادفی با استفاده از قضیه H نشان داده شده است آنتروپی در حال افزایش است[7]. ارتباط و رفتار گشتاورها وقتی آنها همگرا نیستند بر روی $Z-$ مدل بررسی شده است [8-10]. همچنین برای مشاهده همگرایی توزیع ثروت نمایی در بازارهای تصادفی گسسته و آنالیز کامل آنها می توان به مرجع [11] مراجعه کرد. یک مدل مشابه برای گازهای ایده‌ال مطرح شده که نشان می دهد به توزیع ماکسول همگراست که بر این اساس با شبیه سازی های انجام شده آن را به عنوان نقطه تعادلی عملگر در نظر گرفته اند [12]. رشد صعودی آنتروپی برای $Z-$ مدل در بازارهای تصادفی اثبات شده است [13].

به دنبال کارهای صورت گرفته، در این مقاله یک مدل اقتصادی پیوسته برای بازارهای تصادفی پیشنهاد داده و سپس به ویژگیها و کاربردهای آن می پردازیم. سازماندهی بخش ها به این صورت است که در بخش بعد تعمیمی از $Z-$ مدل را بیان می‌کنیم. سپس در بخش ۳ به ویژگی‌های عملگر T می‌پردازیم. در بخش ۴ مثال‌هایی را برای تشریح شبیه سازی عددی مدل ارائه شده بیان خواهیم کرد. در نهایت نتیجه گیری لازم صورت می‌گیرد.

۱. تعمیم Z- مدل

در این مدل متغیرهایی که بیانگر میزان دارایی بدست آمده توسط افراد می باشد را مثبت فرض می‌کنیم و این میزان با گذشت زمان به خاطر تبادلات تصادفی که بین افراد در دوره‌های زمانی متعدد صورت می‌گیرد در حال تغییر است. برهمین اساس احتمال اینکه فردی در جامعه به طور تصادفی به میزان x واحد در دوره زمانی n دارایی بدست آورد را

با $P_n(x)$ نشان می‌دهیم. در دوره زمانی بعدی یعنی n+1 به خاطر تبادلات دودویی $P_{n+1}(x)$ براساس قانون تکراری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_{n+1}(x) = Tp_n(x) = \iint_{S_{a,b}(x)} dudv \frac{P_n(u)P_n(v)}{au+bv},$$

ضرایب a و b پارامترهای مثبت و حقیقی هستند و $S_{a,b}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_{a,b}(x) = \left\{(u,v),\ u,v>0,\ \ x<au+bv\right\}$$

که در آن عامل اقتصادی اول به میزان au و عامل اقتصادی دوم به میزان bv در سبد قرار می‌هد و باتوجه به زوج‌های مرتب (u,v) و (v,u) که در $S_{a,b}(x)$ وجود دارد مبلغ نهایی که در سبد قرار می‌گیرد برابر است با $(a+b)(u+v)$ که بین آنها مبادله می‌شود.

۲. ویژگی‌های عملگر تعمیم یافته

در ابتدای این بخش تعاریف و قضایای لازم برای عملگر تعمیم یافته بیان می‌گردد.

تعریف ۱. فضای L_1^+ از توابع مثبت (توزیع ثروت) در بازه $[0,\infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L_1^+[0,\infty) = \{y:[0,\infty)\to R^+\cup\{0\}, \|y\|<\infty\},$$

که

$$\|y\| = \int_0^\infty y(x)dx.$$

در حالت خاص، زیر مجموعه $L_1^+[0,\infty)$، یعنی گوی واحد زیر را در نظر می‌گیریم

$$B = \left\{y\in L_1^+[0,\infty),\quad \|y\|=1\right\}$$

تعریف۲. میانگین ثروت وابسته به توزیع $y\in L_1^+[0,\infty)$ به صورت مقدار میانگین x نسبت به توزیع y تعریف می‌شود که با $<x>_y$ نشان می‌دهیم

$$<y>\equiv<x>_y=\|xy(x)\| = \int_0^\infty xy(x)dx$$

در ادامه، $<x>_y$ را با نماد $<y>$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳. به ازای $x\geq 0$ و $y\in L_1^+[0,\infty)$ عملگر T روی y به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T(y(x)) = \iint_{S_{a,b}(x)} \frac{y(u)y(v)}{au+bv}dudv$$

که

$$S_{a,b}(x) = \{(u,v), u,v>0, au+bv>x\}$$

دامنه تعریف جفت عامل‌های (u,v) است که دارایی x را بعد از تبادلات مالی تعیین می‌کند.

قضیه ۱. به ازای هر $y \in L_1^+[0,\infty)$ داریم $\|Ty\| = \|y\|^2$، بخصوص وقتی y یک تابع چگالی احتمال باشد یعنی اگر $\|y\|=1$ آنگاه $\|Ty\|=1$. این یعنی تعداد عامل‌های اقتصادی در دوره‌های مختلف حفظ می‌شود.

برهان. با توجه به اینکه $y \in L_1^+[0,\infty)$ پس

$$\|Ty\| = \int_0^\infty dx \iint_{S_{a,b}(x)} dudv \frac{y(u)y(v)}{au+bv} = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^{au+bv} dx \frac{y(u)y(v)}{au+bv}$$
$$= \int_0^\infty y(u)du \int_0^\infty y(v)dv = \|y\|^2.$$

نتیجه ۱. زیرمجموعه تابع چگالی احتمال در $L_1^+[0,\infty)$، یعنی گوی واحد $B := \{y \in L_1^+[0,\infty),\ \|y\|=1\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت اگر $y \in B$ آنگاه $Ty \in B$. بنابراین ما می‌توانیم تحدید T_B از T به زیرمجموعه B را تعریف کنیم، یعنی $T_B : B \to B$.

قضیه۲. عملگر T در گوی واحد B با ثابت کوچکتر مساوی ۲ پیوسته لیپ شیتس است.

برهان. فرض کنیم در این صورت

$$\|Ty - Tw\| = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^{au+bv} dx \frac{|y(u)y(v) - w(u)w(v)|}{au+bv}$$
$$= \int_0^\infty du \int_0^\infty dv |y(u)y(v) - y(u)w(v) + y(u)w(v) - w(u)w(v)|$$
$$\leq \int_0^\infty y(u)du \int_0^\infty dv |y(v) - w(v)| + \int_0^\infty w(v)dv \int_0^\infty du |y(u) - w(u)|$$
$$= 2\|y - w\|.$$

قضیه۳. مقدار میانگین $<y>$ در حالت کلی حفظ نمی‌شود به عبارت دیگر به ازای هر $y \in B$ لزوماً تساوی $<Ty> = <y>$ برقرار نیست. این یعنی میانگین ثروت در دوره‌های مختلف حفظ نمی‌شود.

برهان. بنابر تعریف ۲ داریم:

$$<Ty> = \|x(Ty)(x)\| = \int_0^\infty xdx \iint_{S_{a,b}(x)} dudv \frac{y(u)y(v)}{au+bv}$$
$$= \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^{au+bv} xdx \frac{y(u)y(v)}{au+bv} = \frac{1}{2}\int_0^\infty du \int_0^\infty dv (au+bv)y(u)y(v)$$
$$= \frac{a}{2}\int_0^\infty uy(u)du + \frac{b}{2}\int_0^\infty vy(v)dv = \frac{a+b}{2}\int_0^\infty xy(x)dx = \frac{a+b}{2} <y>.$$

این نشان می‌دهد که مقدار میانگین حفظ نمی‌شود زیرا به مقادیر a و b بستگی دارد.

نتیجه۲. میانگین ثروت سیستم اقتصادی در دوره‌های زمانی با شرط $a+b=2$ حفظ می‌شود.

در ادامه قضیه ای را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد ثروت نهایی با شرط $a+b>2$ صعودی و با شرط $a+b<2$ نزولی است.

۳،۱. مطالعه و بررسی گشتاورهای مربوطه

در این بخش به اثبات پایداری گشتاورهای مربوط به عمگر تکاملی می پردازیم.

قضیه۴. به ازای هر $y\in L_+^1[0,\infty]$، $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{R}^+$ داریم:

$$<T^n y> - <y> = ((\frac{a+b}{2})^n - 1) <y>.$$

برهان. براساس قضیه قبل می‌توان گفت

$$<Ty> - <y> = (\frac{a+b}{2} - 1) <y>.$$

به طور مشابه برای تکرارهای بعدی داریم

$$<T^2 y> - <Ty> = (\frac{a+b}{2} - 1) <Ty> = ((\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a+b}{2})) <y>,$$

$$<T^3 y> - <T^2 y> = (\frac{a+b}{2} - 1) <T^2 y> = ((\frac{a+b}{2})^3 - (\frac{a+b}{2})^2) <y>.$$

در حالت کلی برای تکرارهای مرتبه‌های بالاتر

$$<T^n y> - <T^{n-1} y> = (\frac{a+b}{2} - 1) <T^{n-1} y> = ((\frac{a+b}{2})^n - (\frac{a+b}{2})^{n-1}) <y>.$$

حال با جمع دو طرف روابط بالا نتیجه می‌گیریم

$$<T^n y> - <y> = ((\frac{a+b}{2})^n - 1) <y>.$$

نتیجه۳. اگر ارزش برد سیستم و ارزش باخت سیستم را به ترتیب با VSW و VSL نشان دهیم تحت شرایطی ویژگی های زیر بعد از n تکرار نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} a+b>2 & VSW=((\frac{a+b}{2})^n-1)<y>,\ <T^n y>\to+\infty, \\ a+b=2 & VSW=VSL=0,\ <T^n y>=<y>, \\ a+b<2 & VSL=(1-(\frac{a+b}{2})^n)<y>,\ <T^n y>\to 0. \end{cases}$$

تبصره ۱. نتیجه فوق نشان می‌دهد اگر $a+b<2$ یا $a+b>2$ نقطه ثابت وجود ندارد.

تبصره ۲. براساس مشاهدات حتی وقتی $a+b=2$ اما $a\neq 1\ (b\neq 1)$ نقطه ثابت وجود ندارد، تنها حالتی که نقطه ثابت وجود دارد $a=b=1$ است که در مثال‌های بخش بعد این را خواهیم دید [8]. در حقیقت در تکرارهای متوالی توزیع ثروت به سمت نقطه ثابت بدیهی سیستم میل می‌کند. یعنی $\lim_{n\to\infty} T^n y(x)=0,$ در حالیکه میانگین ثروت حفظ شده است.

تعریف۴. گشتاورهای $p_t(x)$ را به صورت

$$m_k(t)=\int dx\, x^k p_t(x)$$

تعریف می‌کنیم. اگر $m_0=1$ مشابه Z- مدل رابطه تکراری (۱) که تعمیم Z- مدل است نیز در قیود حافظ m_0 صدق می‌کند. و درنتیجه $m_0(t+1)=m_0(t)^2,$ بنابراین گشتاور اول ثابت است.

همچنین خواهیم داشت

$$m_1(t+1)=\frac{a+b}{2}m_0(t)m_1(t)=\frac{1}{2}(a+b)m_1(t)$$

و در حالت کلی

$$m_1(t)=\frac{1}{2^t}(a+b)^t m_1(0)=\frac{1}{2^t}(a+b)^t<y>$$

بنابراین همانطور که قبلاً ذکر شده بود، وقتی $a+b>2$ ثروت نهایی افزایش و $a+b<2$ ثروت نهایی کاهش می‌یابد.

رابطه تکراری برای گشتاور دوم به صورت

$$m_2(t+1)=\frac{1}{3}\left[(a^2+b^2)m_2(t)+2abm_1(t)\right],$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد وقتی $a=1$ و $b=1$ فرمول معتبر است.

گشتاور kام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$m_k(t+1)=\frac{1}{k+1}\left[(a^k+b^k)m_k(t)+l.o.t(t)\right],$$

در این معادله بیانگر جملات مرتبه پایین تر است که مربوط به گشتاورهای کمتر از مرتبه k است. بنابراین اگر $a^k+b^k\leq k+1,$ گشتاور kام پایدار باقی می‌ماند. همچنین به ازای $a\leq 1$ و $b\leq 1$ گشتاورها از هر مرتبه ای پایدار هستند.

۴. مثالهای عددی

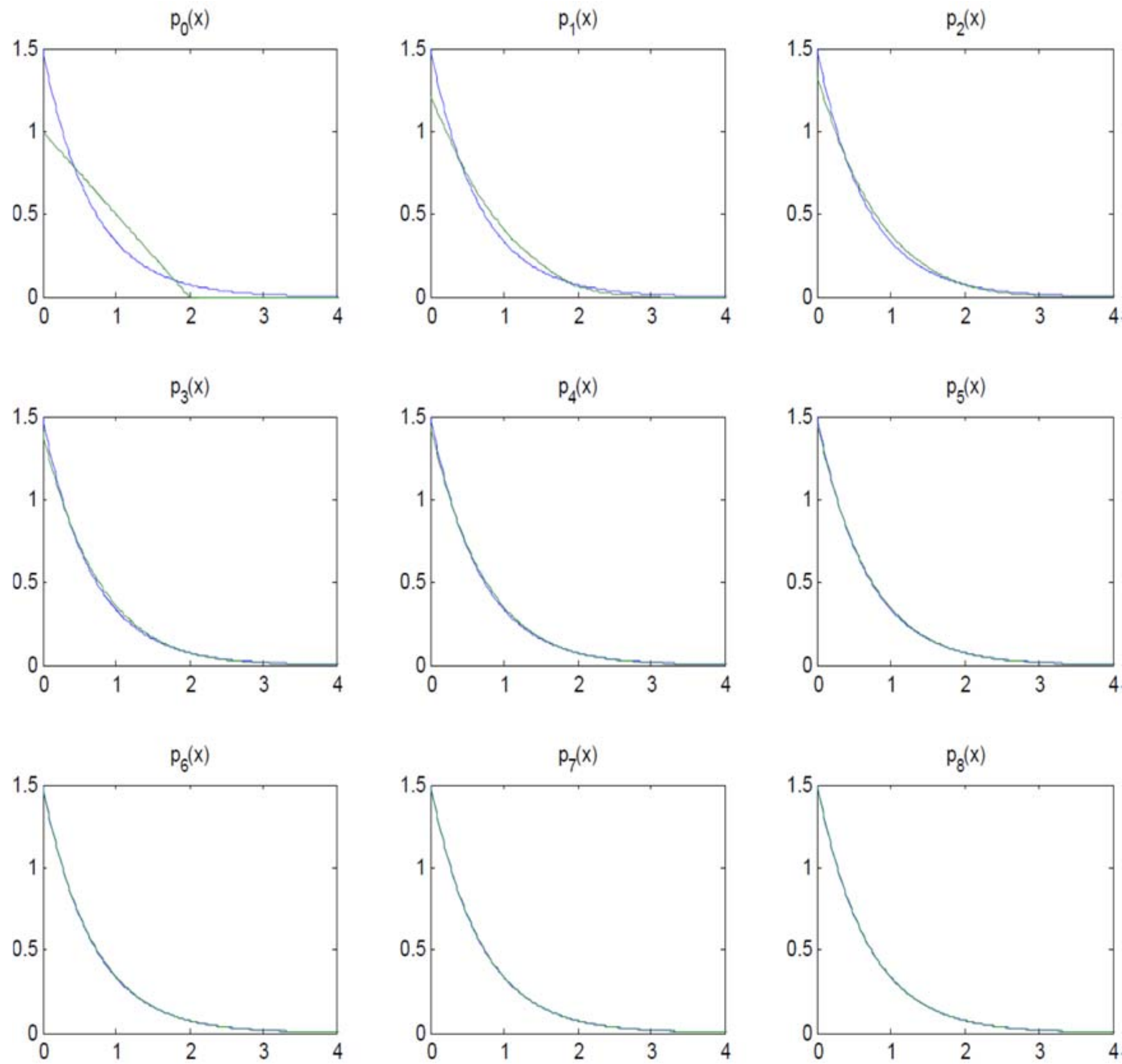
مثال ۱. فرض کنیم $p(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$p(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}x & 0<x<2,\\ 0 & x\geq 2.\end{cases}$$

به ازای $a=1$ و $b=1$، از قضیه نقطه ثابت در Z-مدل انتظار داریم که

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T^{n}p(x)-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}\right\|=0.$$

روند همگرایی در شکل ۱ شبیه سازی شده و نشان داده شده است.

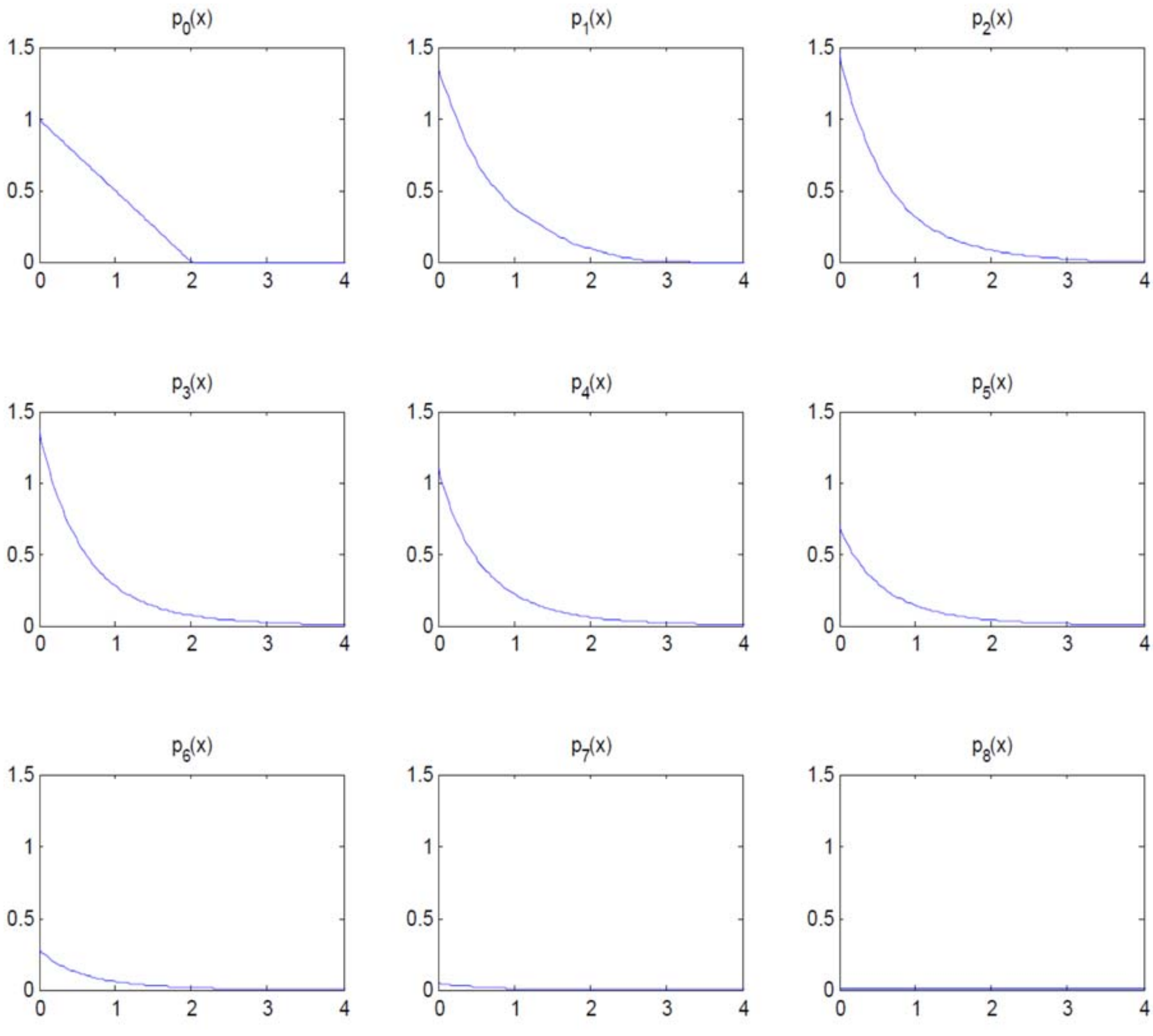


شکل۱. تکرارهای عملگر T در مثال ۱ بر روی $p_0(x)$ که به $\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}$ میل می‌کند.

مثال ۲. فرض کنیم $p(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$p(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}x & 0<x<2,\\ 0 & x\geq 2.\end{cases}$$

به ازای $a=\frac{3}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$، انتظار داریم توزیع به سمت صفر میل کند همانطور که در شکل ۲ دیده می‌شود توزیع اولیه $p_0(x)$ به سمت صفر میل می‌کند.



شکل۲. تکرارهای عملگر T بر روی $p_0(x)$ مثال ۲ که به صفر میل می‌کند.

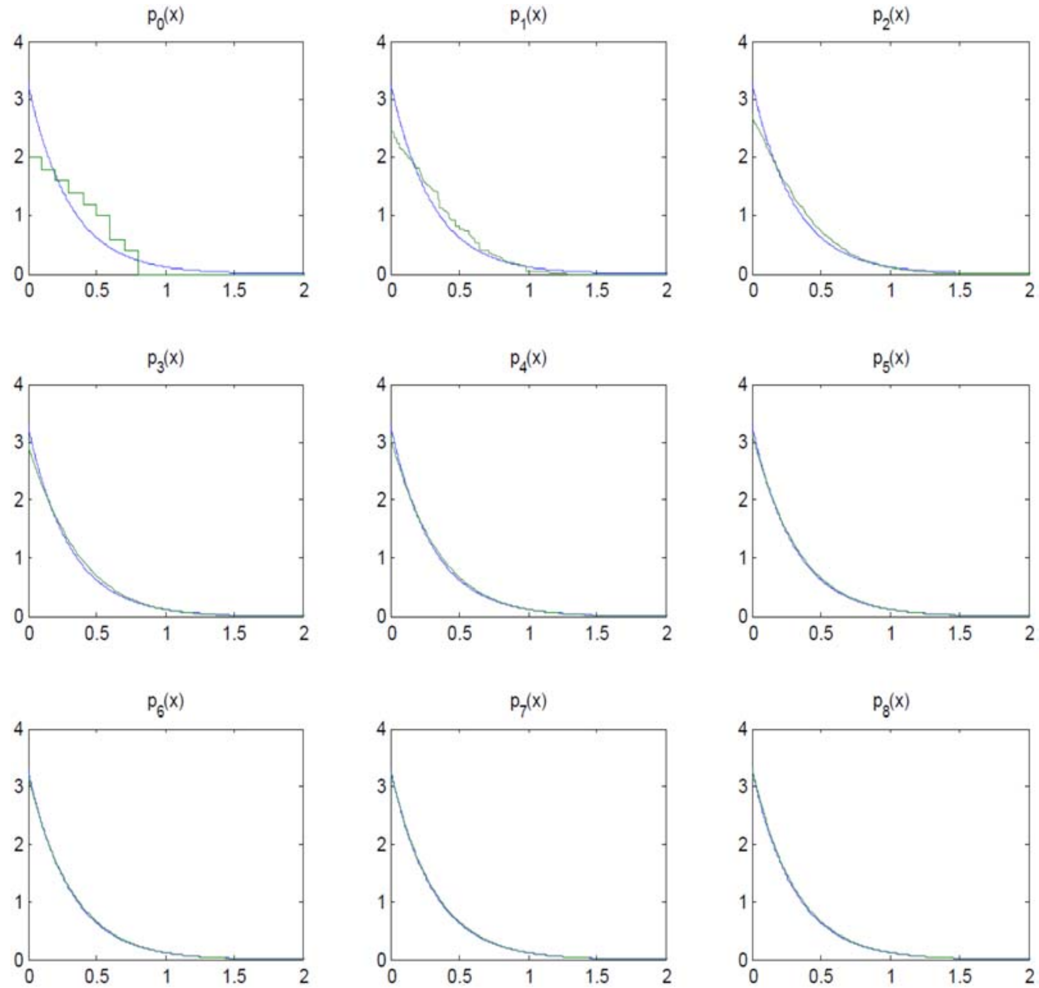
مثال ۳. فرض کنیم $p(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$p(x)=\begin{cases} 2 & 0<x\le 0.1,\\ 9/5 & 0.1<x\le 0.2,\\ 8/5 & 0.2<x\le 0.3,\\ 7/5 & 0.3<x\le 0.4,\\ 6/5 & 0.4<x\le 0.5,\\ 1 & 0.5<x\le 0.6,\\ 3/5 & 0.6<x\le 0.7,\\ 2/5 & 0.7<x\le 0.8,\\ 0 & x>0.8. \end{cases}$$

به ازای $a=1$ و $b=1$، از قضیه نقطه ثابت در Z-مدل انتظار داریم که

$$\lim_{n\to\infty}\left\| T^{n}p(x)-\frac{125}{38}e^{-\frac{125}{38}x}\right\|=0.$$

روند همگرایی در شکل ۳ تشریح شده و برای چند تکرار اول، این ویژگی نشان داده شده است.

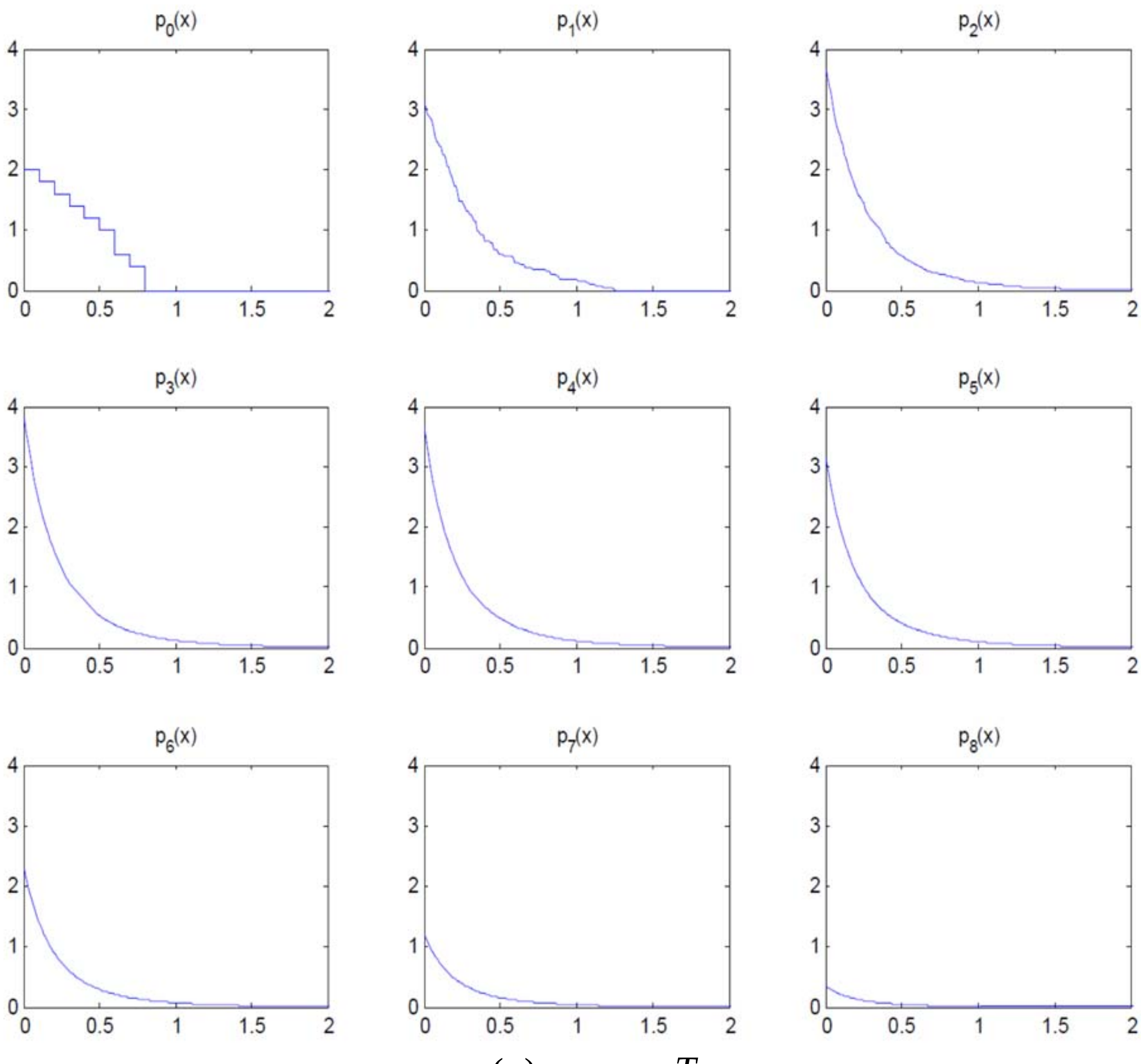


شکل۳. تکرارهای عملگر T مثال ۳ بر روی $p_0(x)$ که به $\frac{125}{38}e^{-\frac{125}{38}x}$ میل می‌کند.

مثال۴. فرض کنیم $p_0(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$p_0(x)=\begin{cases} 2 & 0<x\le 0.1,\\ 9/5 & 0.1<x\le 0.2,\\ 8/5 & 0.2<x\le 0.3,\\ 7/5 & 0.3<x\le 0.4,\\ 6/5 & 0.4<x\le 0.5,\\ 1 & 0.5<x\le 0.6,\\ 3/5 & 0.6<x\le 0.7,\\ 2/5 & 0.7<x\le 0.8,\\ 0 & x>0.8. \end{cases}$$

به ازای $a=\frac{8}{5}$ و $b=\frac{2}{5}$، انتظار داریم توزیع به سمت صفر میل کند. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود توزیع اولیه $p_0(x)$ به سمت صفر میل می‌کند.



شکل۴. تکرارهای عملگر T مثال ۴ بر روی $p_0(x)$ که به صفر میل می‌کند.

۵. نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل اقتصادی پیوسته تعمیم داده شد که در آن افراد جامعه دو به دو برحسب ضرایب a و b سرمایه‌هایشان را به طور تصادفی مبادله می‌کنند. براین اساس اثر ضرایب a و b را بر روی وجود وضعیت تعادل و حفظ سرمایه کل مورد بررسی قرار دادیم. در نهایت پی بردیم که بازارهای تصادفی تحت شرایط خاصی به سمت تعادل تکامل می‌یابند.

References

1. A. Dragulescu, and V. M. Yakovenko, Exponential and power-law proba-bility distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States, Physica A **299** (2001), 213–221.

2. B. K. Chakrabarti, A. Chatterjee, A. Chakraborti and S. Sinha, Econophysics: An Introduction, Willey-VCH Verlag GmbH, 2010.

3. M. Levy and S. Solomon, New evidence for the power-law distribution of wealth. Physica A **242**, (1997), 90-94.

4. V. M. Yakovenko, Econophysics, Statistical Mechanic Approach to, in Encyclopedia of Complexity and System ScienceMeyers, R.A. (Ed.), Springer, Germany, 2009.

5. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, Statistical mechanics of money, Eur. Phys. J. B. **17** (2000), 723-729.

6. R. Lopez-Ruiz, E. Shivanian, S. Abbasbandy and J.R. Lopez, A Generalized Continuous Model for Random Markets, Mathematica Aeterna, **3** (2013), 317-328.

7. R. Lopez-Ruiz, E. Shivanian and J. L. Lopez, Random market models with an H-theorem, arXiv:1307.2169v3 [q-fin.TR].

8. J. L. Lopez, R. Lopez-Ruiz and X. Calbet, Exponential wealth distribution in a random market: A rigorous explanation, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 195-204.

9. R. Lopez-Ruiz, J. L. Lopez and X. Calbet, Exponential wealth distribution: A new approach from functional iteration theory, ESAIM: Proceedings (ofECIT-2010 Conference), **36** (2012), 183-190.

10. Y. Pomeau and R. Lopez-Ruiz, Study of a model for the distribution of wealth, arXiv:1407.7447v1 [nlin.AO].

11. G. Kutriel, Convergence to the exponential wealth distribution in a discrete-time random market model, Applicable Analysis, **93** (2014), 1256-1263.

12. E. Shivanian and R. Lopez-Ruiz, A new model for ideal gases, Decay to the Maxwellian distribution, Physica A, **391** (2012), 2600-2607.

13. S. M. Apenko, Monotonic entropy growth for a nonlinear model of random exchanges, Phys. Rev. E, **87** (2013), 024101.