



Kharazmi University

## On the generalization of evolutionary continuous model in random markets

Elyas Shivanian<sup>1</sup> , Mahdi Keshtkar<sup>2</sup> , Hamidreza Navidi<sup>3</sup> 

1. Department of Mathematics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran. ✉ E-mail: [shivanian@sci.ikiu.ac.ir](mailto:shivanian@sci.ikiu.ac.ir)
2. Department of Applied Mathematics, Buein Zahra University Qazvin, Iran. E-mail: [keshtkarmahdi@gmail.com](mailto:keshtkarmahdi@gmail.com)
3. Department of Applied Mathematics, Shahed University, Tehran, Iran. E-mail: [navidi@shahed.ac.ir](mailto:navidi@shahed.ac.ir)

---

### Article Info

**Article type:**  
Research Article

**Article history:**

Received: 22 June 2016  
Received in revised form:  
22 June 2016  
Accepted: 28 September 2016  
Published online:  
3 December 2023

**Keywords:**

Random markets,  
equilibrium fixed point,  
nonlinear operator,  
evolutionary continuous  
model,  
distribution of wealth.

---

### ABSTRACT

**Introduction**

A generalization of the continuous economic model is proposed for random markets. In this model, agents interact by pairs and exchange their money in a random way, in general, with possibly non-constant total amount of “money”. This model takes the form of an iterated nonlinear map of the distribution of wealth. We show the only way to reach equilibrium fixed point distribution is the agents to share their money without expansion or contraction factor. Furthermore, it is proved the higher momenta of the distribution exist and the iteration of higher momenta becomes stable under some specific conditions.

**Material and methods**

In this paper, we develop a general form of Z-model that is similar to the behavior of original model (Z-model) in which each of the two partners in a transaction have a random amount  $u$  and  $v$ . During the transaction, they put first the whole amount  $(u + v)$  in a basket and then share its content randomly.

**Results and discussion**

In this model at the time of the transaction between the two individuals, one of the individual puts  $au$  in the basket (instead of  $u$  in the Z-model) and the other puts  $bv$  in the basket, instead of  $v$ .

**Conclusion**

The following conclusions were drawn from this research.

- As it will be seen, this model is not conservative except when some special conditions hold for the coefficients  $a$  and  $b$ .
  - If we consider the symmetrical interaction for the pair of agents  $(v, u)$ , in this case the first agent will put  $av$  in the basket and the second one  $bu$ . For both trades, those of the pairs  $(u, v)$  and  $(v, u)$ , the total money to share in the basket is  $(a + b)(u + v)$ .
-

- 
- It is shown the only way to reach equilibrium fixed point distribution is the agents to share their money without expansion or contraction factor.
  - It is proved the higher momenta of the distribution exist and the iteration of higher momenta becomes stable under some specific conditions.

---

**How to cite:** Shivanian, Elyas., Keshtkar, Mahdi., & Navidi, Hamidreza. (2023). On the generalization of evolutionary continuous model in random markets. *Mathematical Researches*, 9 (2), 1-14.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## یک مدل تعمیم یافته از فرایند تکاملی پیوسته در بازارهای تصادفی

الیاس شیوانیان<sup>۱</sup> ✉، مهدی کشتکار<sup>۲</sup>، حمیدرضا نویدی<sup>۳</sup>

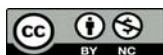
۱. دانشیار گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران. ✉ رایانامه: [shivanian@sci.ikiu.ac.ir](mailto:shivanian@sci.ikiu.ac.ir)

۲. استادیار گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی فنی مهندسی بوبین زهرا، بوبین زهرا، قزوین، ایران. رایانامه: [keshtkarmahdi@gmail.com](mailto:keshtkarmahdi@gmail.com)

۳. استاد گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران. رایانامه: [navidi@shahed.ac.ir](mailto:navidi@shahed.ac.ir)

اطلاعات مقاله	چکیده
<b>نوع مقاله:</b> مقاله پژوهشی	در این مقاله به تعمیم مساله Z-مدل، که یک مدل اقتصادی پیوسته در بازارهای تصادفی است می‌پردازیم. در این مدل عامل‌های اقتصادی دو به دو بطور تصادفی مبادله مالی دارند و این امکان وجود دارد که میزان کل دارایی سیستم در فرایند مالی ثابت نباشد. این مدل را به صورت یک عملگر غیرخطی تکراری از توزیع ثروت بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم تنها راه رسیدن به نقطه ثابت تعادلی، تبادل ثروت بدون ضریب انبساطی یا انقباضی بین عامل‌های اقتصادی است. سرانجام وجود گشتاورهای بالاتر توزیع را ثابت خواهیم کرد و تکرار گشتاورهای بالاتر تحت شرایط خاصی پایدار می‌شود.
<b>تاریخ دریافت:</b> ۱۳۹۹/۷/۶	
<b>تاریخ بازنگری:</b> ۱۴۰۰/۱/۲۷	
<b>تاریخ پذیرش:</b> ۱۴۰۰/۲/۱۱	
<b>تاریخ انتشار:</b> ۱۴۰۲/۹/۱۲	
<b>واژه‌های کلیدی:</b> نقطه تعادلی، مدل تکاملی، عملگر غیرخطی، بازارهای تصادفی.	

استناد: شیوانیان، الیاس؛ کشتکار، مهدی؛ و نویدی، حمیدرضا (۱۴۰۲). یک مدل تعمیم یافته از فرایند تکاملی پیوسته در بازارهای تصادفی. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۲)، ۱-۱۴.



### مقدمه

نظریه بازی تکاملی به دنبال ساختن دینامیکی برای رسیدن به رفتار تعادلی است و معروف ترین دینامیک های تکاملی، دینامیک ریپلیکیتور و لاگیت می باشد. یافتن یک استراتژی مناسب در یک بازی که از دو دسته افراد تشکیل شده و به صورت سازمانی عمل می کند و به دنبال تعادل می باشد نیز نوع دیگری از این بازی هاست. رویکرد معمول در این زمینه، در نظر گرفتن بازی هایی با تعداد متناهی استراتژی است که با دینامیک هایی به تعادل نش همگرا می شوند. فناوری ریزآرایه یک ابزار تحلیلی کوچک دیگری است که به کمک آن می توان ده ها هزار بازیکن را در جامعه ای که به طور همزمان با یکدیگر برخورد دارند مورد کاوش قرار داد. در سالهای اخیر روشها و مدل های مختلفی از فیزیک آماری برای تفسیر داده های اقتصادی به طور موفقیت آمیزی به کار گرفته شده است. به عنوان مثال براساس گزارش ارائه شده در جوامع غربی حدود ۹۵٪ جامعه که درآمدشان متوسط به پایین است از توزیع ثروت نمایی و درآمد بقیه افراد جامعه که ۵٪ جامعه را شامل می شود از توزیع قانون توان تبعیت می کنند [۱-۳]. یک نوع دیگر از مدل های تصادفی وابسته به بازار، مدل های شبه-گاز می باشد [۴]. این مدل های تصادفی تبادلات اقتصادی مالی بین عامل های اقتصادی را مشابه برخورد ذرات در گازها که تبادل انرژی دارند تفسیر می کنند.

اخیراً براساس ایده شبه-گازها یک پارامتر کنترلی که درجه تبادلات بین عامل های اقتصادی را نشان می دهد در بازه  $[0,1]$  در نظر گرفته شده است، یعنی اگر پارامتر مقدارش صفر باشد، بین عامل ها تعاملی صورت نمی گیرد و اگر یک باشد همه عامل ها تعامل دارند تحت این شرایط به این نتیجه دست یافته اند که توزیع نمایی گیبس برای بازه مذکور برقرار است [6]. در همین راستا برای مدل های بازار تصادفی با استفاده از قضیه  $H$  نشان داده شده است آنتروپی در حال افزایش است [7]. ارتباط و رفتار گشتاورها وقتی آنها همگرا نیستند بر روی  $-Z$  مدل بررسی شده است [8-10]. همچنین برای مشاهده همگرایی توزیع ثروت نمایی در بازارهای تصادفی گسسته و آنالیز کامل آنها می توان به مرجع [11] مراجعه کرد. یک مدل مشابه برای گازهای ایده آل مطرح شده که نشان می دهد به توزیع ماکسول همگراست که بر این اساس با شبیه سازی های انجام شده آن را به عنوان نقطه تعادلی عملگر در نظر گرفته اند [12]. رشد صعودی آنتروپی برای  $-Z$  مدل در بازارهای تصادفی اثبات شده است [13].

به دنبال کارهای صورت گرفته، در این مقاله یک مدل اقتصادی پیوسته برای بازارهای تصادفی پیشنهاد داده و سپس به ویژگیها و کاربردهای آن می پردازیم. سازماندهی بخش ها به این صورت است که در بخش بعد تعمیمی از  $-Z$  مدل را بیان می کنیم. سپس در بخش ۳ به ویژگی های عملگر  $T$  می پردازیم. در بخش ۴ مثال هایی را برای تشریح شبیه سازی عددی مدل ارائه شده بیان خواهیم کرد. در نهایت نتیجه گیری لازم صورت می گیرد.

### ۱. تعمیم $-Z$ مدل

در این مدل متغیرهایی که بیانگر میزان دارایی بدست آمده توسط افراد می باشد را مثبت فرض می کنیم و این میزان با گذشت زمان به خاطر تبادلات تصادفی که بین افراد در دوره های زمانی متعدد صورت می گیرد در حال تغییر است. بر همین اساس احتمال اینکه فردی در جامعه به طور تصادفی به میزان  $x$  واحد در دوره زمانی  $n$  دارایی بدست آورد را

با  $P_n(x)$  نشان می‌دهیم. در دوره زمانی بعدی یعنی  $n+1$  به خاطر تبادلات دودویی  $P_{n+1}(x)$  براساس قانون تکراری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_{n+1}(x) = TP_n(x) = \iint_{S_{a,b}(x)} dudv \frac{P_n(u)P_n(v)}{au + bv},$$

ضرایب  $a$  و  $b$  پارامترهای مثبت و حقیقی هستند و  $S_{a,b}(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_{a,b}(x) = \{(u, v), u, v > 0, x < au + bv\}$$

که در آن عامل اقتصادی اول به میزان  $au$  و عامل اقتصادی دوم به میزان  $bv$  در سبد قرار می‌هد و باتوجه به زوج‌های مرتب  $(u, v)$  و  $(v, u)$  که در  $S_{a,b}(x)$  وجود دارد مبلغ نهایی که در سبد قرار می‌گیرد برابر است با  $(a+b)(u+v)$  که بین آنها مبادله می‌شود.

## ۲. ویژگی‌های عملگر تعمیم یافته

در ابتدای این بخش تعاریف و قضایای لازم برای عملگر تعمیم یافته بیان می‌گردد.

تعریف ۱. فضای  $L_1^+$  از توابع مثبت (توزیع ثروت) در بازه  $[0, \infty)$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L_1^+[0, \infty) = \{y : [0, \infty) \rightarrow R^+ \cup \{0\}, \|y\| < \infty\},$$

که

$$\|y\| = \int_0^\infty y(x) dx.$$

در حالت خاص، زیر مجموعه  $L_1^+[0, \infty)$ ، یعنی گوی واحد زیر را در نظر می‌گیریم

$$B = \{y \in L_1^+[0, \infty), \|y\| = 1\}$$

تعریف ۲. میانگین ثروت وابسته به توزیع  $y \in L_1^+[0, \infty)$  به صورت مقدار میانگین  $x$  نسبت به توزیع  $y$

تعریف می‌شود که با  $\langle x \rangle_y$  نشان می‌دهیم

$$\langle y \rangle \equiv \langle x \rangle_y = \|xy(x)\| = \int_0^\infty xy(x) dx$$

در ادامه،  $\langle x \rangle_y$  را با نماد  $\langle y \rangle$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۳. به ازای  $x \geq 0$  و  $y \in L_1^+[0, \infty)$  عملگر  $T$  روی  $y$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T(y(x)) = \iint_{S_{a,b}(x)} \frac{y(u)y(v)}{au + bv} dudv$$

که

$$S_{a,b}(x) = \{(u, v), u, v > 0, au + bv > x\}$$

دامنه تعریف جفت عامل‌های  $(u, v)$  است که دارایی  $\mathcal{X}$  را بعد از تبادلات مالی تعیین می‌کند.

**قضیه ۱.** به ازای هر  $y \in L_1^+[0, \infty)$  داریم  $\|Ty\| = \|y\|^2$ ، بخصوص وقتی  $y$  یک تابع چگالی احتمال باشد یعنی اگر  $\|y\| = 1$  آنگاه  $\|Ty\| = 1$ . این یعنی تعداد عامل‌های اقتصادی در دوره‌های مختلف حفظ می‌شود.

**برهان.** با توجه به اینکه  $y \in L_1^+[0, \infty)$  پس

$$\begin{aligned} \|Ty\| &= \int_0^\infty dx \iint_{S_{a,b}(x)} dudv \frac{y(u)y(v)}{au + bv} = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^{au+bv} dx \frac{y(u)y(v)}{au + bv} \\ &= \int_0^\infty y(u)du \int_0^\infty y(v)dv = \|y\|^2. \end{aligned}$$

**نتیجه ۱.** زیرمجموعه تابع چگالی احتمال در  $L_1^+[0, \infty)$ ، یعنی گوی واحد  $B := \{y \in L_1^+[0, \infty), \|y\| = 1\}$

را در نظر بگیرید. در این صورت اگر  $y \in B$  آنگاه  $Ty \in B$ . بنابراین ما می‌توانیم تحدید  $T_B$  از  $T$  به زیرمجموعه

$B$  را تعریف کنیم، یعنی  $T_B : B \rightarrow B$ .

**قضیه ۲.** عملگر  $T$  در گوی واحد  $B$  با ثابت کوچکتر مساوی ۲ پیوسته لیپ شیتس است.

**برهان.** فرض کنیم در این صورت

$$\begin{aligned} \|Ty - Tw\| &= \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^{au+bv} dx \frac{|y(u)y(v) - w(u)w(v)|}{au + bv} \\ &= \int_0^\infty du \int_0^\infty dv |y(u)y(v) - y(u)w(v) + y(u)w(v) - w(u)w(v)| \\ &\leq \int_0^\infty y(u)du \int_0^\infty dv |y(v) - w(v)| + \int_0^\infty w(v)dv \int_0^\infty du |y(u) - w(u)| \\ &= 2\|y - w\|. \end{aligned}$$

**قضیه ۳.** مقدار میانگین  $\langle y \rangle$  در حالت کلی حفظ نمی‌شود به عبارت دیگر به ازای هر  $y \in B$  لزوماً تساوی

$\langle Ty \rangle = \langle y \rangle$  برقرار نیست. این یعنی میانگین ثروت در دوره‌های مختلف حفظ نمی‌شود.

**برهان.** بنابر تعریف ۲ داریم:

$$\begin{aligned} \langle Ty \rangle &= \|x(Ty)(x)\| = \int_0^\infty xdx \iint_{S_{a,b}(x)} dudv \frac{y(u)y(v)}{au + bv} \\ &= \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^{au+bv} xdx \frac{y(u)y(v)}{au + bv} = \frac{1}{2} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv (au + bv)y(u)y(v) \\ &= \frac{a}{2} \int_0^\infty uy(u)du + \frac{b}{2} \int_0^\infty vy(v)dv = \frac{a+b}{2} \int_0^\infty xy(x)dx = \frac{a+b}{2} \langle y \rangle. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که مقدار میانگین حفظ نمی‌شود زیرا به مقادیر  $a$  و  $b$  بستگی دارد.

نتیجه ۲. میانگین ثروت سیستم اقتصادی در دوره‌های زمانی با شرط  $a + b = 2$  حفظ می‌شود. در ادامه قضیه ای را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد ثروت نهایی با شرط  $a + b > 2$  صعودی و با شرط  $a + b < 2$  نزولی است.

### ۳.۱. مطالعه و بررسی گشتاورهای مربوطه

در این بخش به اثبات پایداری گشتاورهای مربوط به عمگر تکاملی می‌پردازیم.

قضیه ۴. به ازای هر  $a, b \in \mathbb{R}^+$  و  $n \in \mathbb{N}$ ،  $y \in L_+^1[0, \infty]$  داریم:

$$\langle T^n y \rangle - \langle y \rangle = \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^n - 1 \right) \langle y \rangle.$$

برهان. براساس قضیه قبل می‌توان گفت

$$\langle Ty \rangle - \langle y \rangle = \left( \frac{a+b}{2} - 1 \right) \langle y \rangle.$$

به طور مشابه برای تکرارهای بعدی داریم

$$\langle T^2 y \rangle - \langle Ty \rangle = \left( \frac{a+b}{2} - 1 \right) \langle Ty \rangle = \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left( \frac{a+b}{2} \right) \right) \langle y \rangle,$$

$$\langle T^3 y \rangle - \langle T^2 y \rangle = \left( \frac{a+b}{2} - 1 \right) \langle T^2 y \rangle = \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^3 - \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \langle y \rangle.$$

در حالت کلی برای تکرارهای مرتبه‌های بالاتر

$$\langle T^n y \rangle - \langle T^{n-1} y \rangle = \left( \frac{a+b}{2} - 1 \right) \langle T^{n-1} y \rangle = \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^n - \left( \frac{a+b}{2} \right)^{n-1} \right) \langle y \rangle.$$

حال با جمع دو طرف روابط بالا نتیجه می‌گیریم

$$\langle T^n y \rangle - \langle y \rangle = \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^n - 1 \right) \langle y \rangle.$$

نتیجه ۳. اگر ارزش برد سیستم و ارزش باخت سیستم را به ترتیب با VSW و VSL نشان دهیم تحت شرایطی

ویژگی‌های زیر بعد از  $n$  تکرار نتیجه می‌شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b > 2 \quad VSW = \left( \left( \frac{a+b}{2} \right)^n - 1 \right) \langle y \rangle, \langle T^n y \rangle \rightarrow +\infty, \\ a+b = 2 \quad VSW = VSL = 0, \langle T^n y \rangle = \langle y \rangle, \\ a+b < 2 \quad VSL = \left( 1 - \left( \frac{a+b}{2} \right)^n \right) \langle y \rangle, \langle T^n y \rangle \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

تبصره ۱. نتیجه فوق نشان می‌دهد اگر  $a+b < 2$  یا  $a+b > 2$  نقطه ثابت وجود ندارد.

تبصره ۲. براساس مشاهدات حتی وقتی  $a+b = 2$  اما  $a \neq 1$  ( $b \neq 1$ ) نقطه ثابت وجود ندارد، تنها حالتی که نقطه ثابت وجود دارد  $a=b=1$  است که در مثال‌های بخش بعد این را خواهیم دید [8]. در حقیقت در تکرارهای متوالی توزیع ثروت به سمت نقطه ثابت بدیهی سیستم میل می‌کند. یعنی  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n y(x) = 0$  در حالیکه میانگین ثروت حفظ شده است.

تعریف ۴. گشتاورهای  $p_t(x)$  را به صورت

$$m_k(t) = \int dx x^k p_t(x)$$

تعریف می‌کنیم. اگر  $m_0 = 1$  مشابه  $Z$ -مدل رابطه تکراری (۱) که تعمیم  $Z$ -مدل است نیز در قیود حافظ  $m_0$  صدق می‌کند. و در نتیجه  $m_0(t+1) = m_0(t)^2$  بنابراین گشتاور اول ثابت است. همچنین خواهیم داشت

$$m_1(t+1) = \frac{a+b}{2} m_0(t) m_1(t) = \frac{1}{2} (a+b) m_1(t)$$

و در حالت کلی

$$m_1(t) = \frac{1}{2^t} (a+b)^t m_1(0) = \frac{1}{2^t} (a+b)^t \langle y \rangle$$

بنابراین همانطور که قبلاً ذکر شده بود، وقتی  $a+b > 2$  ثروت نهایی افزایش و  $a+b < 2$  ثروت نهایی کاهش می‌یابد.

رابطه تکراری برای گشتاور دوم به صورت

$$m_2(t+1) = \frac{1}{3} \left[ (a^2 + b^2) m_2(t) + 2ab m_1(t) \right],$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد وقتی  $a=1$  و  $b=1$  فرمول معتبر است.

گشتاور  $k$ ام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$m_k(t+1) = \frac{1}{k+1} \left[ (a^k + b^k) m_k(t) + l.o.t(t) \right],$$

در این معادله بیانگر جملات مرتبه پایین تر است که مربوط به گشتاورهای کمتر از مرتبه  $k$  است. بنابراین اگر  $a^k + b^k \leq k+1$  گشتاور  $k$ ام پایدار باقی می‌ماند. همچنین به ازای  $a \leq 1$  و  $b \leq 1$  گشتاورها از هر مرتبه‌ای پایدار هستند.



## ۴. مثالهای عددی

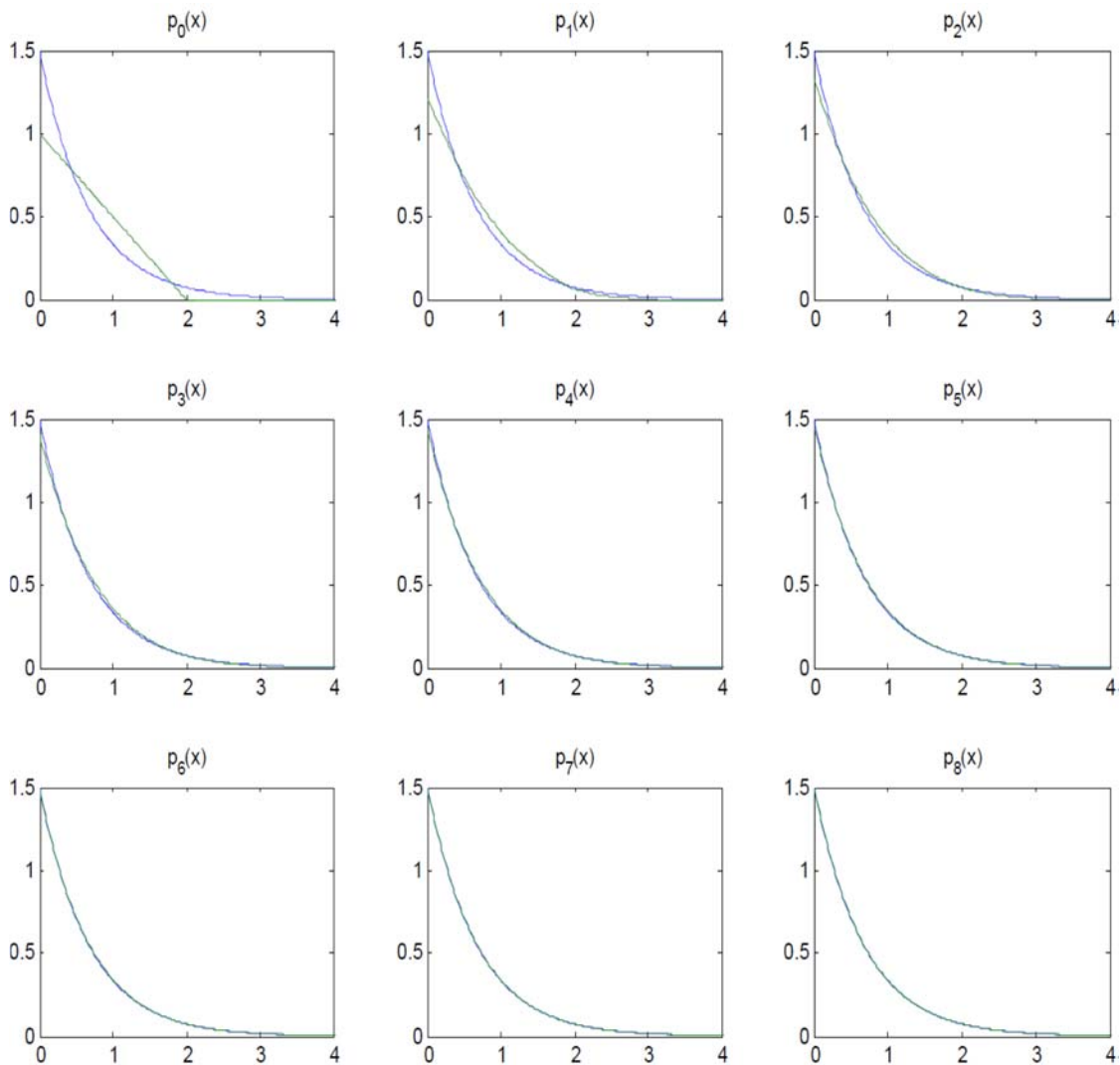
مثال ۱. فرض کنیم  $p(x)$  به صورت زیر تعریف شده باشد

$$p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & 0 < x < 2, \\ 0 & x \geq 2. \end{cases}$$

به ازای  $a = 1$  و  $b = 1$ ، از قضیه نقطه ثابت در  $Z$ -مدل انتظار داریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| T^n p(x) - \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}x} \right\| = 0.$$

روند همگرایی در شکل ۱ شبیه سازی شده و نشان داده شده است.



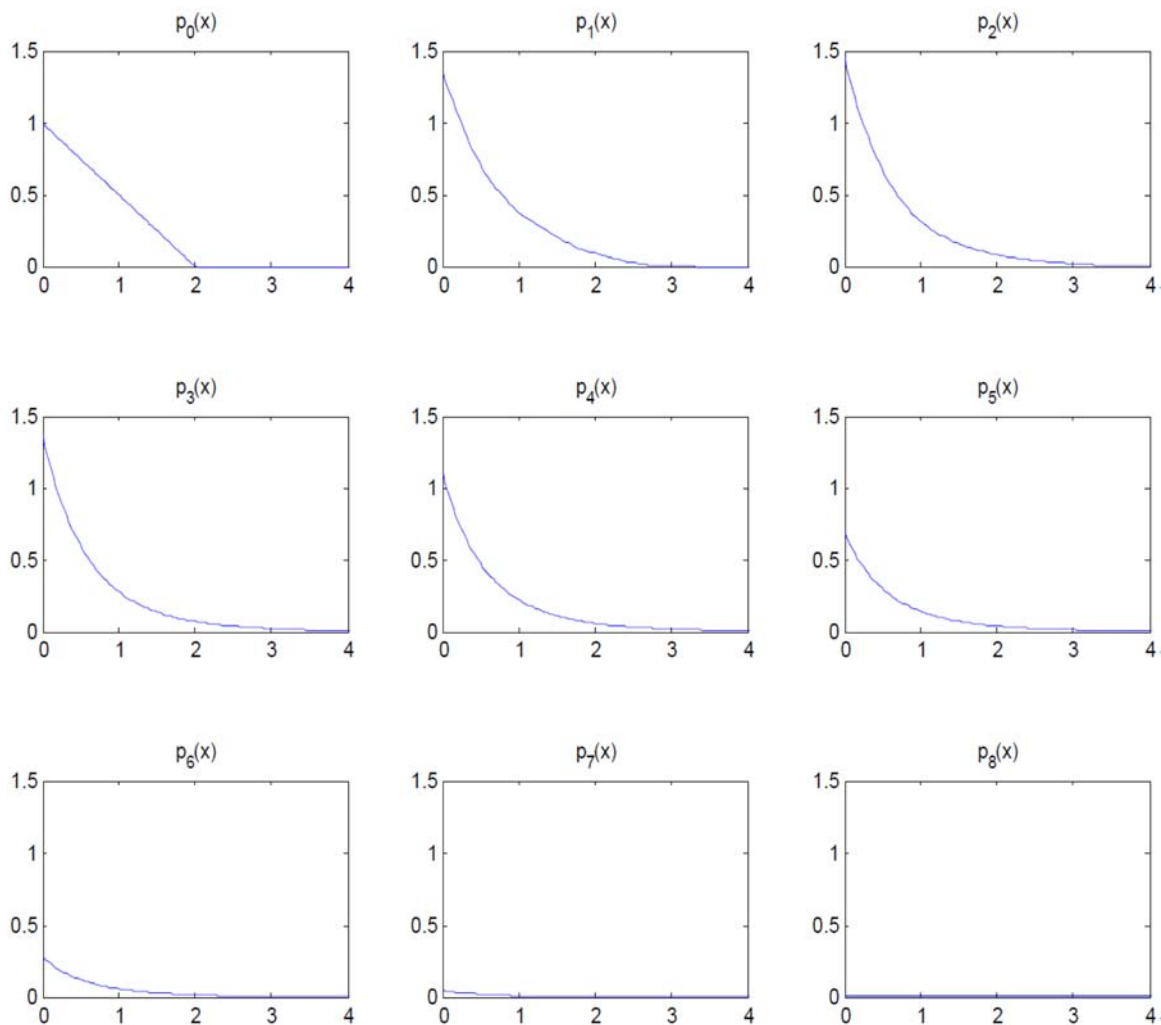
شکل ۱. تکرارهای عملگر  $T$  در مثال ۱ بر روی  $p_0(x)$  که به  $\frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}x}$  میل می کند.

مثال ۲. فرض کنیم  $p(x)$  به صورت زیر تعریف شده باشد

$$p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & 0 < x < 2, \\ 0 & x \geq 2. \end{cases}$$

به ازای  $a = \frac{3}{2}$  و  $b = \frac{1}{2}$ ، انتظار داریم توزیع به سمت صفر میل کند همانطور که در شکل ۲ دیده می‌شود توزیع

اولیه  $p_0(x)$  به سمت صفر میل می‌کند.



که به صفر میل می‌کند.  $p_0(x)$  مثال ۲ بر روی  $T$  شکل ۲. تکرارهای عملگر

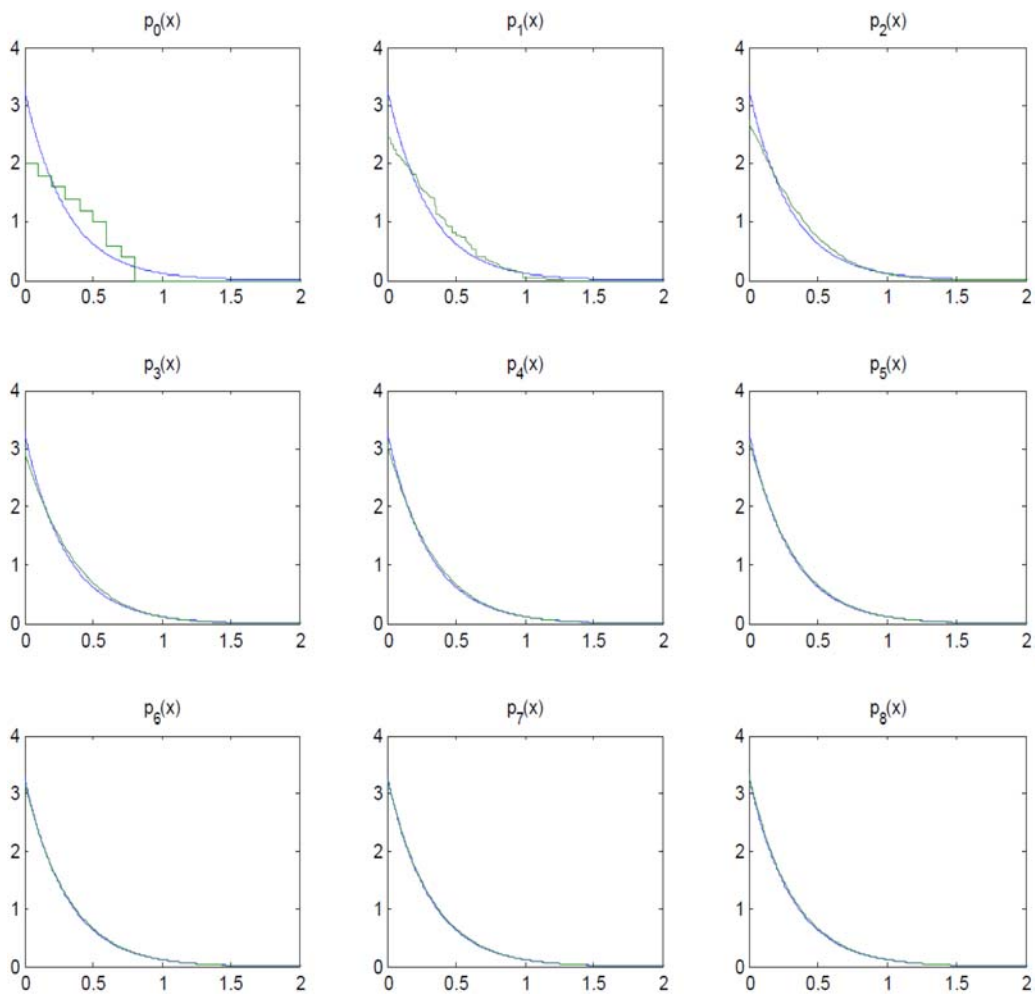
مثال ۳. فرض کنیم  $p(x)$  به صورت زیر تعریف شده باشد

$$p(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x \leq 0.1, \\ 9/5 & 0.1 < x \leq 0.2, \\ 8/5 & 0.2 < x \leq 0.3, \\ 7/5 & 0.3 < x \leq 0.4, \\ 6/5 & 0.4 < x \leq 0.5, \\ 1 & 0.5 < x \leq 0.6, \\ 3/5 & 0.6 < x \leq 0.7, \\ 2/5 & 0.7 < x \leq 0.8, \\ 0 & x > 0.8. \end{cases}$$

به ازای  $a = 1$  و  $b = 1$ ، از قضیه نقطه ثابت در  $Z$ -مدل انتظار داریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| T^n p(x) - \frac{125}{38} e^{-\frac{125}{38}x} \right\| = 0.$$

روند همگرایی در شکل ۳ تشریح شده و برای چند تکرار اول، این ویژگی نشان داده شده است.



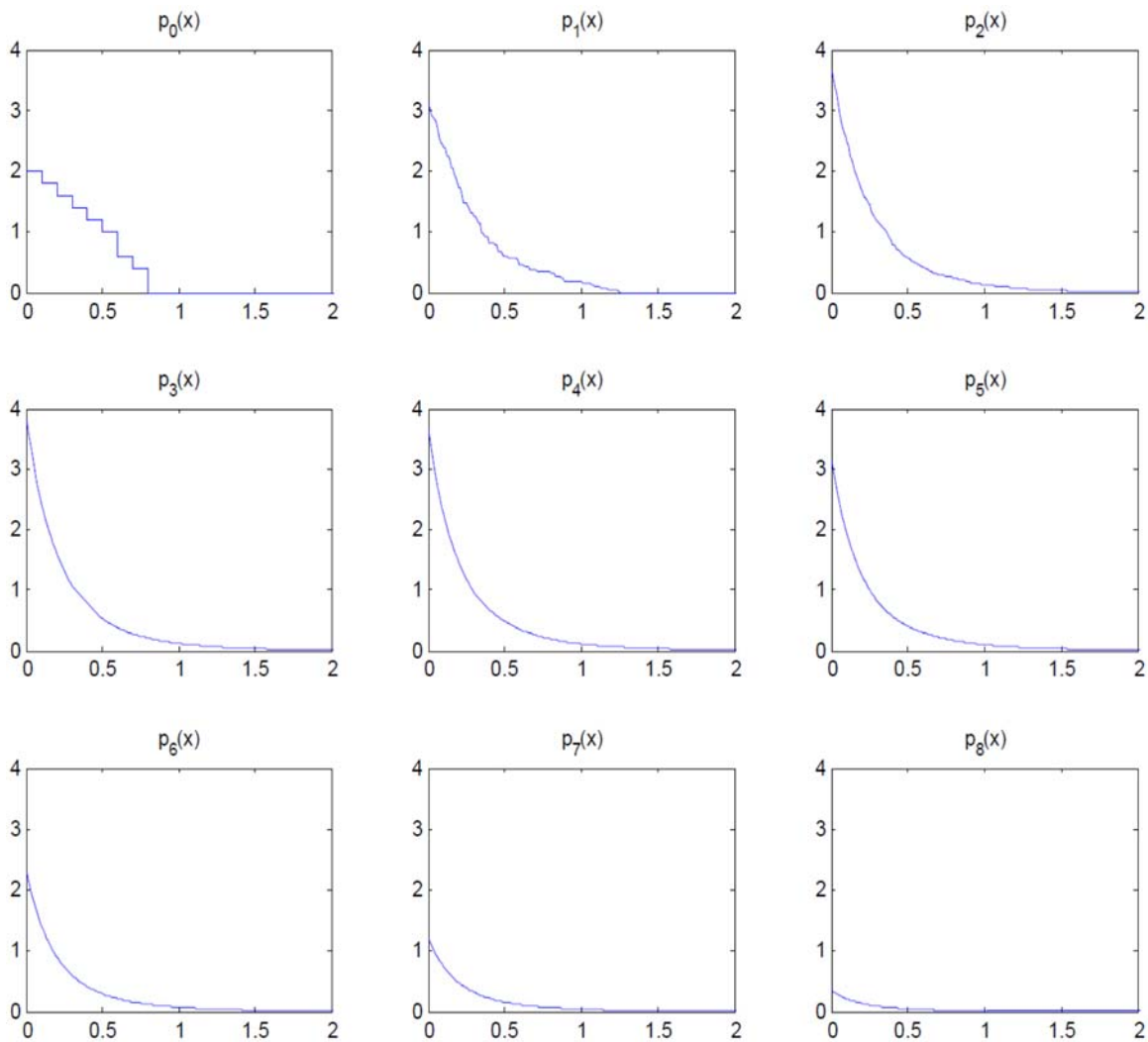
شکل ۳. تکرارهای عملگر  $T$  مثال ۳ بر روی  $p_0(x)$  که به  $\frac{125}{38} e^{-\frac{125}{38}x}$  میل می کند.

مثال ۴. فرض کنیم  $p_0(x)$  به صورت زیر تعریف شده باشد

$$p_0(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x \leq 0.1, \\ 9/5 & 0.1 < x \leq 0.2, \\ 8/5 & 0.2 < x \leq 0.3, \\ 7/5 & 0.3 < x \leq 0.4, \\ 6/5 & 0.4 < x \leq 0.5, \\ 1 & 0.5 < x \leq 0.6, \\ 3/5 & 0.6 < x \leq 0.7, \\ 2/5 & 0.7 < x \leq 0.8, \\ 0 & x > 0.8. \end{cases}$$

به ازای  $a = \frac{8}{5}$  و  $b = \frac{2}{5}$ ، انتظار داریم توزیع به سمت صفر میل کند. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود توزیع

اولیه  $p_0(x)$  به سمت صفر میل می‌کند.



شکل ۴. تکرارهای عملگر  $T$  مثال ۴ بر روی  $p_0(x)$  که به سمت صفر میل می‌کند.

## ۵. نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل اقتصادی پیوسته تعمیم داده شد که در آن افراد جامعه دو به دو برحسب ضرایب  $a$  و  $b$  سرمایه‌هایشان را به طور تصادفی مبادله می‌کنند. براین اساس اثر ضرایب  $a$  و  $b$  را بر روی وجود وضعیت تعادل و حفظ سرمایه کل مورد بررسی قرار دادیم. در نهایت پی بردیم که بازارهای تصادفی تحت شرایط خاصی به سمت تعادل تکامل می‌یابند.

## References

1. A. Dragulescu, and V. M. Yakovenko, Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States, *Physica A* **299** (2001), 213–221.
2. B. K. Chakrabarti, A. Chatterjee, A. Chakraborti and S. Sinha, *Econophysics: An Introduction*, Willey-VCH Verlag GmbH, 2010.
3. M. Levy and S. Solomon, New evidence for the power-law distribution of wealth. *Physica A* **242**, (1997), 90-94.
4. V. M. Yakovenko, *Econophysics, Statistical Mechanic Approach to*, in *Encyclopedia of Complexity and System Science* Meyers, R.A. (Ed.), Springer, Germany, 2009.
5. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, Statistical mechanics of money, *Eur. Phys. J. B.* **17** (2000), 723-729.
6. R. Lopez-Ruiz, E. Shivanian, S. Abbasbandy and J.R. Lopez, A Generalized Continuous Model for Random Markets, *Mathematica Aeterna*, **3** (2013), 317-328.
7. R. Lopez-Ruiz, E. Shivanian and J. L. Lopez, Random market models with an H-theorem, arXiv:1307.2169v3 [q-fin.TR].
8. J. L. Lopez, R. Lopez-Ruiz and X. Calbet, Exponential wealth distribution in a random market: A rigorous explanation, *J. Math. Anal. Appl.* **386** (2012), 195-204.
9. R. Lopez-Ruiz, J. L. Lopez and X. Calbet, Exponential wealth distribution: A new approach from functional iteration theory, *ESAIM: Proceedings (of ECIT-2010 Conference)*, **36** (2012), 183-190.
10. Y. Pomeau and R. Lopez-Ruiz, Study of a model for the distribution of wealth, arXiv:1407.7447v1 [nlin.AO].
11. G. Kutrieli, Convergence to the exponential wealth distribution in a discrete-time random market model, *Applicable Analysis*, **93** (2014), 1256-1263.
12. E. Shivanian and R. Lopez-Ruiz, A new model for ideal gases, Decay to the Maxwellian distribution, *Physica A*, **391** (2012), 2600-2607.

13. S. M. Apenko, Monotonic entropy growth for a nonlinear model of random exchanges, Phys. Rev. E, **87** (2013), 024101.