






Kharazmi University

# Fundamental groupoid and Whisker topology

Ali Pakdaman<sup>1</sup>  , Fereshteh Shahini<sup>2</sup> 

1. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Golestan University, Gorgan, Iran.

✉E-mail: [a.pakdaman@gu.ac.ir](mailto:a.pakdaman@gu.ac.ir)

2. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Golestan University, Gorgan, Iran.

E-mail: [freshte.shahini@gmail.com](mailto:freshte.shahini@gmail.com)

---

---

## Article Info

## ABSTRACT

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:

27 September 2020

Received in revised form:

1 May 2021

Accepted:

11 July 2021

Published online:

20 June 2023

### Keywords:

Fundamental groupoid,  
Whisker topology,  
Topological groupoid.

### Introduction

Algebraic structures on topological spaces can't distinguish all the non-homeomorphic spaces. Recently, by equipping some of these algebraic structures with topology, one can separate the non-homeomorphic spaces with the same algebraic structures. Particularly, the fundamental group is equipped by the various types of topologies which some of them make it a topological group and some of them don't. Virk and Zastrow has studied the generalizations of the existing topologies on the fundamental group to the universal path space with a proper comparison. If we remove the condition  $\alpha(0) = x_0$  from the definition of the universal path space, we obtain an object that have been discussed in mathematical literatures under the name "fundamental groupoid". Indeed, fundamental groupoid denoted by  $\pi X$ , is the category of homotopy classes of paths in  $X$  as the morphisms and has the set  $X$  as the objects set. For any  $x, y \in X$ , the set  $\pi X(x, y)$  is the set of homotopy classes of paths in  $X$  from  $x$  to  $y$ . We can consider the object group at  $x$ ,  $\pi X(x)$ , as the well-known fundamental group  $\pi_1(X, x)$ .

In order to answer the question how these topologies can be generalized on the fundamental groupoids, the authors has introduced the Lasso topology on the fundamental groupoid of a locally path connected space in which makes it a topological groupoid. A topological groupoid is a groupoid  $G$  together with topologies on  $G$  and  $G_0$  such that the structure maps are continuous.

R. Brown and G. Danesh-Naruie were the first and only ones to take this step. They have defined a topology on a quotient of the fundamental groupoid such that it became

---

a topological groupoid when the given space  $X$  is locally path connected and semilocally simply connected.

Here, we introduce whisker topology on the fundamental groupoid of a locally path connected space  $X$  in which its basis is known and by some assumptions, we can consider it as a generalization of the whisker topology on the fundamental group.

### Material and methods

For a given topological space  $(X, \tau)$ , let  $[\alpha] \in \pi X(x, y)$  where  $x, y \in X$ . If  $V, W$  are open neighborhoods of  $x, y$ , respectively, one can define

$$N([\alpha], V, W) = \{[\beta] \in \pi X \mid \beta \simeq \gamma * \alpha * \lambda, \gamma(I) \subseteq V, \lambda(I) \subseteq W\},$$

where  $\gamma(1) = \alpha(0) = x$  and  $\alpha(1) = \lambda(0) = y$ .

Theorem: The family

$$\{N([\alpha], V, W); [\alpha] \in \pi X(x, y), x \in V \in \tau, y \in W \in \tau\}$$

forms a basis for a topology on fundamental groupoid.

The topology that is generated by this basis, is called Whisker topology.

### Conclusion

Based on the results that we presented in this paper:

If  $X$  is a small loop transfer space;

The multiplication map  $m: \pi^{wh} X \times \pi^{wh} X \rightarrow \pi^{wh} X$  is continuous.

The fundamental groupoid with the Whisker topology is a topological groupoid.

The inherited topology from fundamental groupoid  $\pi^{wh} X$  on the object group  $\pi^{wh} X(x)$  equals to the Whisker topology on  $\pi_1(X, x)$ .

---

**How to cite:** Pakdaman, A., Shahini, F. (2023). Fundamental groupoid and Whisker topology. *Mathematical Researches*, 9 (1), 55-71.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---



Kharazmi University

## گروه‌وار بنیادین و توپولوژی ویسکر

علی پاکدامن<sup>۱</sup>، فرشته شاهینی<sup>۲</sup>

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران. رایانامه: [a.pakdaman@gu.ac.ir](mailto:a.pakdaman@gu.ac.ir)

۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران. رایانامه: [freshte.shahini@gmail.com](mailto:freshte.shahini@gmail.com)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

این مقاله به معرفی توپولوژی ویسکر بر گروه‌وار بنیادین و ارتباط این توپولوژی با

توپولوژی ویسکر بر گروه بنیادین می‌پردازد. همچنین شرایطی را ارائه خواهد داد که از

گروه‌وار بنیادین یک گروه‌وار توپولوژیکی به دست آید.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۰۶

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۰

تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

### واژه‌های کلیدی:

گروه‌وار بنیادین،

توپولوژی ویسکر،

گروه‌وار توپولوژیکی.

استناد: پاکدامن، علی؛ شاهینی، فرشته؛ (۱۴۰۲). گروه‌وار بنیادین و توپولوژی ویسکر. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۱)، ۷۱-۵۵.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱- مقدمه

برای مطالعه بهتر و دقیق‌تر فضاهای توپولوژیکی، می‌توان ساختارهای جبری به این فضاها نسبت داد به طوری که فضاهای همسانریخت<sup>۱</sup>، ساختارهای جبری یکرخت داشته باشند. از جمله این ساختارها می‌توان به گروه بنیادین، گروه‌های هموتوپی، گروه‌های همولوژی<sup>۲</sup> و کوهمولوژی<sup>۳</sup> اشاره داشت. در این بین فضاهایی پیدا می‌شوند که تمامی ساختارهای جبری مربوط به آن‌ها یکرخت بوده و از این رو نمی‌توان غیرهمسانریخت بودن آنها را نتیجه گرفت. در سال‌های اخیر با تجهیز این ساختارهای جبری به توپولوژی، تابعگونی<sup>۴</sup> ساخته شده است که می‌تواند چنین فضاهایی را از یکدیگر تمیز دهند. عمده این تحقیقات بر گروه‌های هموتوپی و به‌طور ویژه بر گروه بنیادین<sup>۵</sup> انجام شده است [۲، ۳، ۸].

گروه بنیادین نخستین بار توسط دوگنجی<sup>۶</sup> [۷] به توپولوژی مجهز شده است. کار او به دلیل پرداختن به فضاهای به طور موضعی خوب و خاص، به عنوان ابزاری کارا مطرح نشد. اما برای فضاهای با رفتار موضعی پیچیده، توپولوژی‌هایی بر گروه بنیادین معرفی شد که توانستند فضاهای غیرهمسانریخت با گروه بنیادین یکرخت را تشخیص دهند. توپولوژی خارج قسمتی، توپولوژی لاسو<sup>۷</sup>، توپولوژی ویسکر<sup>۸</sup> و توپولوژی برازاس<sup>۹</sup> نمونه‌های مهم از این توپولوژی‌ها هستند. همواره بزرگترین چالش در مسیر معرفی توپولوژی بر گروه بنیادین پیوسته بودن عمل ضرب بوده است.

گروه‌وار بنیادین یک فضای توپولوژیکی نیز یکی از این ساختارهای جبری است که نخستین بار توسط براون<sup>۱۰</sup> و دانش ناروئی<sup>۱۱</sup> [۶] برای فضاهای همبند مسیری موضعی و همبند ساده نیم موضعی<sup>۱۲</sup> به توپولوژی تجهیز و به یک گروه‌وار توپولوژیکی تبدیل شده است تا بتواند فضاهای پوششی را با استفاده از زیرگروه‌های نرمال از گروه بنیادین طبقه‌بندی نماید. با ظهور زیرگروه‌های جدید از گروه بنیادین فضاهای پیچیده موضعی که نقشی اساسی در مطالعه گروه بنیادین توپولوژیکی داشته‌اند، به نظر می‌رسد که بتوان گروه‌وار بنیادین این فضاها را نیز به توپولوژی‌هایی مجهز نمود که از آن‌ها گروه‌وار بنیادین توپولوژیکی ساخت. برای فضای غیرهمبند ساده نیم موضعی  $X$ ، نویسندگان در تحقیقی [۱۰] با استفاده از زیرگروه‌های اسپنیر<sup>۱۳</sup> از گروه بنیادین، یعنی  $\pi_1(\mathcal{U}, X)$  که در آن پوششی باز از  $X$  است، توپولوژی لاسو را بر گروه‌وار بنیادین معرفی نموده‌اند که از گروه‌وار بنیادین یک گروه‌وار توپولوژیکی ساخته و تعمیمی از گروه بنیادین توپولوژیکی با توپولوژی لاسو می‌باشد. در اینجا، قصد داریم توپولوژی ویسکر را بر گروه‌وار بنیادین معرفی نماییم. برای زیرگروه  $G$  از  $\pi_1(X, X)$  ساختن نگاشت پوششی  $p: \tilde{X}_G \rightarrow X$  به طوری که  $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, x)) = G$  با استفاده از توپولوژی ویسکر انجام می‌گردد [۱۲] و همین موضوع باعث شده که مطالعه توپولوژی ویسکر نقشی مهم در طبقه‌بندی نگاشت‌های پوششی برای فضای  $\tilde{X}_G$  داشته باشد. این توپولوژی نخستین بار توسط برودسکی<sup>۱۴</sup> و همکاران [۴] بر گروه بنیادین نهاده شد. گروه بنیادین مجهز به این توپولوژی که با  $\pi_1^{wh}(X, X)$  نشان داده می‌شود یک گروه توپولوژیکی نیست زیرا نگاشت ضرب از راست برای  $\pi_1^{wh}(X, X)$  لزوماً پیوسته نمی‌باشد ([۴، گزاره ۱۰، ۴]). گروه‌وار بنیادین نیز با

1 Homeomorphic

2 Homology

3 Cohomology

4 Functor

5 Fundamental group

6 Dugundji

7 Lasso topology

8 Whisker topology

9 Brazas topology

10 Brown

11 Danesh\_ Naruie

12 Semilocally simply connected

13 Spanier

14 Brodskiy

توپولوژی ویسکر که بر آن تعریف خواهیم نمود یک گروه‌وار توپولوژیکی نخواهد شد و ما شرایطی را بر فضای  $X$  می‌یابیم که گروه‌وار بنیادین فضای  $X$  با توپولوژی ویسکر، یعنی  $\pi^{wh}X$  یک گروه‌وار توپولوژیکی شود. همچنین، در این مسیر به دنبال مهیا کردن شرایطی بر فضای  $X$  هستیم که تحت آن شرایط  $\pi^{wh}X(x, x)$  و  $\pi_1^{wh}(X, x)$  با هم یکسان باشند.

## ۲- تعاریف و قضایای مقدماتی

در سراسر این مقاله، بازه‌ی بسته‌ی  $[0, 1]$  را با  $I$  نشان داده و برای فضای توپولوژیکی  $X$  نگاشت پیوسته  $\alpha: I \rightarrow X$  را مسیری از  $x_0 = \alpha(0)$  به  $x_1 = \alpha(1)$  نامیده و در صورتی که  $\alpha(0) = \alpha(1)$  باشد، مسیر  $\alpha$  را مسیری بسته یا یک طوقه<sup>۱</sup> می‌نامیم. مسیر  $\alpha^{-1}$  تعریف شده به صورت  $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$  مسیر وارون  $\alpha$  از  $x_1$  به  $x_0$  است. برای هر  $x \in X$  منظور از  $G_x$  مسیر ثابت در  $X$  بوده و اگر  $\alpha, \beta: I \rightarrow X$  دو مسیر باشند که  $\alpha(1) = \beta(0)$  آنگاه  $\alpha * \beta$  حاصلضرب مسیری آن‌ها است. همچنین، تمامی هموتوپی‌هایی که بین دو مسیر هستند، هموتوپی مسیری نامیده می‌شود.

**تعریف ۱.۱.** [۹، بخش ۱، ۱] گروه‌وار  $(G, G_0)$ ، رشته‌ای با مجموعه ریخت‌های  $G$  و مجموعه اشیاء  $G_0$  به همراه پنج نگاشت ساختاری زیر است:

- نگاشت مبدأ<sup>۲</sup>  $S: G \rightarrow G_0$
- نگاشت هدف<sup>۳</sup>  $T: G \rightarrow G_0$
- نگاشت واحد  $1: G_0 \rightarrow G$  که  $1(x) = 1_x$
- نگاشت وارون  $i: G \rightarrow G$  که  $i(a) = a^{-1}$
- نگاشت ضرب  $m: G_2 \rightarrow G$  که  $m(a; b) = ab$  و  $G_2 = \{(a; b) \in G \times G \mid S(b) = T(a)\}$

این نگاشت‌ها در شرایطی که در زیر آمده صدق می‌کنند:

$$(۱) \text{ برای هر } (a; b) \in G_2 \text{ داریم } S(ab) = S(a) \text{ و } T(ab) = T(b)$$

$$(۲) \text{ برای هر } a, b, c \in G \text{ به طوری که } S(b) = T(a) \text{ و } S(c) = T(b) \text{ داریم } a(bc) = (ab)c$$

$$(۳) \text{ برای هر } x \in G_0 \text{ داریم } S(1_x) = T(1_x) = x$$

$$(۴) \text{ برای هر } a \in G \text{ داریم } a1_{T(a)} = a \text{ و } 1_{S(a)}a = a$$

$$(۵) \text{ هر } a \in G \text{ دارای یک وارون دوطرفه است به طوری که } \begin{cases} T(a^{-1}) = S(a), & S(a^{-1}) = T(a) \\ a^{-1}a = 1_{T(a)}, & aa^{-1} = 1_{S(a)} \end{cases}$$

1 Loop

2 Source map

3 Target map

اگر زوج  $(G, G_0)$  یک گروه‌وار باشد می‌گوییم  $G$  یک گروه‌وار بر  $G_0$  است. ریخت  $1_x$  متناظر با شیء  $x \in G_0$  همانی متناظر با  $x$  نامیده شده و مجموعه‌ی ریخت‌ها از شیء  $x$  به شیء  $y$  را با  $G(x, y)$  نشان می‌دهیم و در حالت خاص  $G(x, x) := G(x)$  را گروه شیء<sup>۱</sup> در  $x$  می‌نامیم. همچنین مجموعه همه ریخت‌ها با مبدا  $x$  را با  $G(x, -)$  و مجموعه همه ریخت‌ها با هدف  $y$  را با  $G(-, y)$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱.۲.** [۵، بخش ۲، ۶] اگر فضای توپولوژیکی باشد. گروه‌وار بنیادین  $\pi X$ ، اعضای  $X$  را به عنوان اشیاء داشته و برای هر  $x, y \in X$ ، مجموعه‌ی  $\pi X(x, y)$ ، مجموعه کلاس هموتوپیی همه‌ی مسیرها در  $X$  از  $x$  به  $y$  است. برای مسیرهای  $\alpha$  و  $\beta$  در  $X$  که  $\alpha(1) = \beta(0)$ ، ضرب ریخت‌های  $[\alpha]$  و  $[\beta]$  به صورت  $[\alpha * \beta]$  بوده و  $[C_x] = e_x$  عنصر همانی در  $\pi X(x, x)$  است. همچنین  $\pi X(x)$ ، گروه شیء در  $x$ ، همان گروه بنیادین  $\pi_1(X, x)$  می‌باشد.

**تعریف ۱.۳.** [۹، بخش ۲، ۱] فرض کنید  $G$  و  $G'$  دو گروه‌وار به ترتیب بر  $G_0$  و  $G'_0$  باشند. یک همریختی گروه‌واری، زوج  $(F, f)$  است به طوری که  $F: G \rightarrow G'$  و  $f: G_0 \rightarrow G'_0$  به گونه‌ای تعریف می‌شوند که هر شیء  $x$  از گروه‌وار  $G$  را به شیء  $f(x)$  از گروه‌وار  $G'$  و هر ریخت  $a \in G(x, y)$  را به ریخت  $F(a) \in G'(f(x), f(y))$  می‌برند و برای هر  $(a, b) \in G_2$  داریم  $F(ab) = F(a)F(b)$  همچنین  $FoF = foT$  و  $SoF = foS$

**تعریف ۱.۴.** [۵، صفحه ۳۸۶] اگر مجموعه اشیاء و ریخت‌های گروه‌وار  $(G, G_0)$  مجهز به توپولوژی‌هایی باشند که نگاشت‌های ساختاری بیان شده در تعریف گروه‌وار پیوسته باشند، آن‌گاه  $(G, G_0)$  را گروه‌وار توپولوژیکی می‌نامیم. به منظور سادگی در نوشتار، گاهی فقط می‌نویسیم  $G$  یک گروه‌وار توپولوژیکی است.

در گروه‌وار توپولوژیکی  $G$  برای هر  $a \in G(x, y)$  نگاشت انتقال از راست<sup>۲</sup>  $R_a: G(-, x) \rightarrow G(-, y)$  با ضابطه  $R_a(b) = ba$  و نگاشت انتقال از چپ<sup>۳</sup>  $l_a: G(y, -) \rightarrow G(x, -)$  با ضابطه  $l_a(b) = ab$  همسانریختی می‌باشند [۹، بخش ۱، ۱]

**تعریف ۱.۵.** [۱۱، تعریف ۱۰] گروه  $G$  به همراه یک توپولوژی بر آن را یک گروه شبه توپولوژیکی<sup>۴</sup> می‌گوییم هرگاه نگاشت وارون و نگاشت‌های انتقال از راست و انتقال از چپ پیوسته باشند.

### ۳- نتایج اصلی

برای فضای توپولوژیکی نقطه دار  $(X, \mathcal{X})$  و زیرگروه دلخواه  $H \leq \pi_1(X, x)$  رابطه‌ی  $\sim_H$  بر فضای  $P(X, \mathcal{X})$  (مجموعه همه مسیرها در  $X$  که از نقطه  $x$  شروع می‌شوند به همراه توپولوژی فشرده-باز) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha \sim_H \beta \iff \alpha(1) = \beta(1), [\alpha * \beta^{-1}] \in H.$$

1 Object group  
2 Right translation  
3 Left translation

4 Quasitopological group

کلاس هم‌ارزی مسیری مانند  $\alpha$  را با  $\langle \alpha \rangle_H$  نمایش داده و فضای خارج قسمتی حاصل از رابطه هم‌ارزی  $\sim_H$  را با نماد  $\tilde{X}_H = \frac{P(X, x)}{\sim_H}$  نمایش می‌دهند.

نگاشت  $P_H: (\tilde{X}_H, e_H) \rightarrow (X, x)$  که با ضابطه  $\langle \alpha \rangle_H \mapsto \alpha(1)$  تعریف شده و  $e_H$  کلاس هم‌ارزی مسیر ثابت در  $x$  است، نگاشت تصویر نقطه انتها نامیده می‌شود. زمانی که  $H = \{e\}$  زیر گروه بدیهی از گروه بنیادین باشد، آن را فضای مسیری جهانی<sup>۱</sup> برای فضای  $X$  خوانده و با نماد  $\tilde{X}_e$  نمایش می‌دهند. در این صورت نگاشت  $f: \pi_1(X, x) \rightarrow p_e^{-1}(x)$  که هر عضو مانند  $[\alpha]$  را به  $\langle \alpha \rangle_H$  انتقال می‌دهد، دوسویی است [۱۲، صفحه ۸۲].

نخستین بار اسپنیر [۱۲، بخش ۲، ۵] با استفاده از ادامه یک مسیر در یک همسایگی دلخواه از نقطه انتهای آن، یک توپولوژی طبیعی بر فضای  $\tilde{X}_H$  را به صورت زیر تعریف کرد.

برای کلاس هم‌ارزی  $\langle \alpha \rangle_H$  مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی ادامه‌های  $\alpha$  در همسایگی  $U$  از  $\alpha(1)$  را با نماد  $N(\langle \alpha \rangle_H, U)$  نمایش می‌دهیم. یعنی

$$N(\langle \alpha \rangle_H, U) = \{ \langle \beta \rangle_H \in \tilde{X}_H \mid \beta \simeq \alpha * \lambda; \lambda: (I, 0) \rightarrow (U, \alpha(1)) \}.$$

گردایه همه  $N(\langle \alpha \rangle_H, U)$  برای هر  $\langle \alpha \rangle_H \in \tilde{X}_H$  و هر همسایگی باز  $U$  از  $\alpha(1)$  یک پایه توپولوژی بر  $\tilde{X}_H$  تشکیل می‌دهد [۱۲، بخش ۲، ۵] که بعدها برودسکی و همکارانش در [۴] آن را توپولوژی ویسکر نامیدند.

با استفاده از نگاشت  $f: \pi_1(X, x) \rightarrow p_e^{-1}(x)$  می‌توان توپولوژی ویسکر را به گروه بنیادین انتقال داد. گروه بنیادین توپولوژی دار شده توسط این روش را با  $\pi_1^{wh}(X, x)$  نمایش می‌دهند [۴، تعریف ۴، ۲].

از آنجایی که انتقال‌های راست در  $\pi_1^{wh}(X, x)$  پیوسته نیستند [۴، گزاره ۱۰، ۴]  $\pi_1^{wh}(X, x)$  یک گروه شبه توپولوژیکی و در نتیجه یک گروه توپولوژیکی نیست. اما اگر انتقال‌های راست در  $\pi_1^{wh}(X, x)$  پیوسته باشند آن‌گاه  $\pi_1^{wh}(X, x)$  یک گروه توپولوژیکی است [۱].

اگر چه ممکن است  $\pi_1^{wh}(X, x)$  یک گروه توپولوژیکی نباشد ولی برخی از خواص گروه‌های توپولوژیکی را دارد، از جمله اینکه هر زیر گروه باز از  $\pi_1^{wh}(X, x)$  بسته نیز می‌باشد [۱].

در ادامه با الهام از توپولوژی ویسکر بر گروه بنیادین، یک توپولوژی بر گروه وار بنیادین معرفی خواهیم نمود.

**تعریف ۱، ۲.** اگر  $x$  و  $y$  نقاطی دلخواه در فضای مفروض  $X$  باشند و  $[\alpha] \in \pi X(x, y)$ ، برای همسایگی‌های باز  $V$  و  $W$  از  $X$  که به ترتیب شامل  $x$  و  $y$  می‌باشند، زیرمجموعه  $N([\alpha], V, W)$  از  $\pi X$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N([\alpha], V, W) = \{ [\beta] \in \pi X \mid \beta \simeq \gamma * \alpha * \lambda, \gamma(I) \subseteq V, \lambda(I) \subseteq W \}$$

1 Universal path space

به طوری که  $\alpha(1) = \lambda(0) = y$  و  $\gamma(1) = \alpha(0) = x$

گزاره ۲،۲. اگر  $V$  و  $V'$  همسایگی‌های باز  $\alpha(0)$  و  $W$  و  $W'$  همسایگی‌های باز از  $\alpha(1)$  باشند به طوری که  $V \subseteq V'$  و  $W \subseteq W'$  آن‌گاه  $N([\alpha], V, W) \subseteq N([\alpha], V', W')$

برهان. به آسانی از تعاریف به دست می‌آید.

لم ۳،۲. فرض کنید  $[\alpha] \in \pi X(x, y)$  و  $V$  و  $W$  به ترتیب همسایگی‌های باز از  $\alpha(0)$  و  $\alpha(1)$  باشند. اگر  $[\beta] \in N([\alpha], V, W) = N([\alpha], V', W')$  آن‌گاه

برهان. چون  $[\beta] \in N([\alpha], V, W)$ ، طبق تعریف  $\beta \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$  که  $\lambda$  و  $\lambda'$  به ترتیب مسیرهایی در  $V$  و  $W$  هستند. عضو دلخواه  $[z] \in N([\alpha], V, W)$  را در نظر می‌گیریم در این صورت  $z \simeq \mu * \alpha * \mu'$  به طوری که  $\mu$  و  $\mu'$  به ترتیب مسیرهایی در  $W$  و  $V$  هستند. بنابراین داریم

$$z \simeq (\mu * \lambda^{-1}) * (\lambda * \alpha * \lambda') * (\lambda'^{-1} * \mu').$$

از آن‌جا که  $\lambda$  و  $\mu$  هر دو مسیرهایی در  $V$  هستند واضح است که  $(\mu * \lambda^{-1})$  نیز مسیری در  $V$  است. همچنین چون  $\lambda'$  و  $\mu'$  هر دو مسیرهایی در  $W$  هستند،  $(\lambda'^{-1} * \mu')$  نیز مسیری است که در  $W$  واقع است. از این‌رو با توجه به تعریف داریم  $[z] \in N([\beta], V, W)$  که ایجاب می‌کند  $N([\alpha], V, W) \subseteq N([\beta], V, W)$  اکنون اگر  $[z] \in N([\beta], V, W)$  دلخواه باشد، آن‌گاه

$$z \simeq \gamma * \beta * \gamma' \simeq \gamma * \lambda * \alpha * \lambda' * \gamma'.$$

از این‌که  $\lambda$  و  $\gamma$  مسیرهایی در  $V$  هستند، نتیجه می‌شود که  $(\gamma * \lambda)$  مسیری در  $V$  بوده و به دلیل مشابه،  $(\lambda' * \gamma')$  نیز مسیری در  $W$  است. بنابراین داریم  $[z] \in N([\alpha], V, W)$  که ایجاب می‌کند  $N([\beta], V, W) \subseteq N([\alpha], V, W)$  و به این ترتیب نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

گزاره‌ی زیر با تلفیق گزاره ۲،۲ و لم ۳،۲ ثابت می‌شود.

گزاره ۴،۲. برای فضای توپولوژیکی  $(X, \tau)$ ، خانواده زیر تشکیل یک توپولوژی بر گروه‌وار بنیادین می‌دهد:

$$\{N([\alpha], V, W); [\alpha] \in \pi X(x, y), x \in V \in \tau, y \in W \in \tau\}.$$

برهان. برای هر  $[\alpha] \in \pi X(x, y)$  قرار می‌دهیم  $V = W = X$ . چون  $\alpha \simeq c_x * \alpha * c_y$ ، داریم

$$[\alpha] \in N([\alpha], V, W) \text{ اگر } [\alpha] \in N([\beta], V, W) \cap N([\beta'], V', W')$$

$$N([\alpha], V, W) = N([\beta], V, W), \quad N([\alpha], V', W') = N([\beta'], V', W'),$$



به طوری که  $\alpha(0) \in V \cap V'$  و  $\alpha(1) \in W \cap W'$ . در این صورت  $N([\alpha], V \cap V', W \cap W')$  همسایگی شامل  $[\alpha]$  است و چون

$$N([\alpha], V \cap V', W \cap W') \subseteq N([\alpha], V, W) \cap N([\alpha], V', W').$$

پس  $N([\alpha], V \cap V', W \cap W')$  همان همسایگی مورد نظر ماست.

از این پس گروه‌وار بنیادین مجهز به توپولوژی فوق را با نماد  $\pi^{wh}X$  نمایش می‌دهیم.

با توجه به ضابطه نگاشت  $f: \pi_1(X, x) \rightarrow p_e^{-1}(x)$ ، بازهای پایه‌ای توپولوژی ویسکر بر گروه بنیادین به شکل زیر هستند [۱].

$$N([\alpha], U) = \{[\beta] \in \pi X; \beta \simeq \alpha * \delta, \delta(I) \subset U, \delta(0) = \delta(1) = \alpha(0)\},$$

که  $\alpha \in \pi_1(X, x)$  و  $U$  یک همسایگی از  $\alpha(0)$  است.

برای فضای توپولوژیکی  $(X, \mathcal{X})$ ، زیرمجموعه  $\pi X(x, x)$  از  $\pi^{wh}X$  را می‌توان به توپولوژی زیرفضایی مجهز نمود و با  $\pi^{wh}X(x, x)$  نمایش داد. اکنون به طور طبیعی این سوال مطرح می‌شود که چه ارتباطی بین این دو توپولوژی وجود دارد؟ در مثال زیر نشان خواهیم داد که لزوماً این دو توپولوژی با هم معادل نمی‌باشند.

**مثال ۵.۲.** گروه‌وار بنیادین مجهز با توپولوژی ویسکر برای فضای گوشواره هاوایی<sup>۱</sup> (که به اختصار با  $HE$  نشان داده می‌شود) را در نظر بگیرید. فرض کنید  $g_i$  مسیری باشد که دایره  $C_i$  (دایره‌ای به مرکز  $(\frac{1}{i}, 0)$  و شعاع  $\frac{1}{i}$  در فضای  $R^2$  برای هر عدد طبیعی  $i$ ) را در جهت مثلثاتی یک دور کامل می‌پیماید. اگر  $U$  گوی باز به مرکز  $(0, 0) := o$  و شعاع  $\frac{1}{2}$  باشد، آن‌گاه  $N([g_1], U)$  یک همسایگی پایه‌ای در  $\pi_1^{wh}(HE, o)$  شامل  $[g_1 * g_5]$  است و نشان خواهیم داد هیچ همسایگی پایه‌ای در  $\pi^{wh}HE(o, o)$  که شامل  $[g_1 * g_5]$  است نمی‌تواند مشمول در  $N([g_1], U)$  باشد. به برهان خلف فرض کنید  $N([\beta], V, W) \cap \pi^{wh}HE(o, o)$  همسایگی پایه‌ای در  $\pi^{wh}HE(o, o)$  شامل  $[g_1 * g_5]$  و مشمول در  $N([g_1], U)$  باشد. چون  $N([\beta], V, W) \subseteq N([\beta], V \cap U, W \cap U)$  می‌توان فرض کرد که  $V, W \subseteq U$ . از طرفی  $[g_1 * g_5] \in N([\beta], V, W)$  ایجاب می‌کند که

$$N([\beta], V, W) = N([g_1 * g_5], V, W).$$

پس هر عضو دلخواهی از  $N([\beta], V, W) \cap \pi^{wh}HE(o, o)$  به صورت  $[\lambda * g_1 * g_5 * \lambda']$  می‌باشد که در آن داریم  $\lambda(I) \subseteq W$  و  $\lambda(I) \subseteq V$  و  $\lambda'(I) \subseteq W$  که چون  $[\lambda * g_1 * g_5 * \lambda'] \in \pi^{wh}HE(o, o)$  است، داریم

$$\lambda(0) = \lambda(1) = \lambda'(0) = \lambda'(1) = o.$$

<sup>1</sup> Hawaiian earring

اگر  $[\lambda * g_1 * g_5 * \lambda'] \in N([g_1], U)$  آن‌گاه طوقه  $\gamma$  در  $U$  وجود دارد به طوری که  $\lambda * g_1 * g_5 * \lambda' \simeq \gamma * g_1$  و این ایجاب می‌کند

$$g_5 \simeq \lambda^{-1} * g_1 * \gamma * \lambda'^{-1} * g_5^{-1}$$

که تناقض است زیرا  $\lambda^{-1} * g_1 * \gamma * \lambda'^{-1} * g_5^{-1}$  با هیچ مسیری با شعاع کمتر از یک هموتوپ مسیری نمی‌باشد. برهان قضیه ۴،۱۰ از [۴] را ببینید.

اکنون با این پرسش مواجه می‌شویم که برای چه فضاهایی توپولوژی‌های  $\pi_1^{wh} X(x, x)$  و  $\pi_1^{wh}(X, x)$  معادل هستند؟ گزاره زیر بیان می‌کند در صورتی که  $X$  فضای انتقالی طوقه کوچک<sup>۱</sup> باشد، توپولوژی‌های معرفی شده بر  $\pi_1^{wh} X(x, x)$  و  $\pi_1^{wh}(X, x)$  معادل هستند.

فضای انتقالی طوقه کوچک برای اولین بار توسط برودسکی و همکاران وی در [۴] معرفی شد. آنها ثابت کردند اگر  $X$  فضای انتقالی طوقه کوچک باشد، توپولوژی ویسکر و توپولوژی خارج قسمتی حاصل از توپولوژی فشرده- باز بر فضای مسیر جهانی  $\tilde{X}_e$  بر هم منطبق می‌شوند.

**تعریف ۶،۲.** [۴] فرض کنید  $X$  یک فضای توپولوژیکی باشد. مسیر  $\alpha: I \rightarrow X$  یک مسیر انتقالی طوقه کوچک نامیده می‌شود هرگاه برای هر همسایگی باز  $U$  از  $\alpha(0)$  در  $X$ ، همسایگی باز  $V$  از  $\alpha(1)$  در  $X$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر طوقه داده شده  $\gamma: (I, 0) \rightarrow (V, \alpha(1))$  طوقه  $\gamma: (I, 0) \rightarrow (U, \alpha(0))$  موجود باشد به گونه‌ای که  $\gamma' \simeq \alpha * \gamma * \alpha^{-1}$  یا به طور معادل  $[\gamma'] = [\alpha * \gamma * \alpha^{-1}]$ . فضای  $X$  را یک فضای انتقالی طوقه‌ی کوچک در  $x$  (به اختصار یک فضای SLT در  $x$ ) می‌نامند هرگاه هر مسیر  $\alpha$  با شروع از  $x$  یک مسیر SLT باشد. همچنین،  $X$  را یک فضای انتقالی طوقه کوچک می‌نامند هرگاه فضایی SLT در هر نقطه‌اش باشد.

به عنوان مثال فضاهای طوقه‌ای کوچک<sup>۲</sup> [۴] و گروه‌های توپولوژیکی [۱۳] فضاهای SLT می‌باشند.

**گزاره ۷،۲.** فرض کنید  $X$  فضای انتقالی طوقه‌ی کوچک بوده و  $x \in X$  در این صورت توپولوژی‌های معرفی شده بر  $\pi_1^{wh} X(x, x)$  و  $\pi_1^{wh}(X, x)$  با هم معادلند.

**برهان.** اگر  $[\eta]$  عضو دلخواهی در  $N([\alpha], V, W) \cap \pi X(x, x)$  باشد آن‌گاه  $\eta \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$  که در آن  $[\alpha] \in \pi X(y, z)$  که  $y, z \in X$  و  $\lambda$  و  $\lambda'$  به ترتیب مسیرهایی در  $V$  و  $W$  می‌باشند به طوری که  $\lambda(0) = \lambda'(1) = x$ . قرار می‌دهیم  $U := V \cap W$ . چون  $c_x := \lambda * \alpha * \lambda'$ ، با قرار دادن  $\eta \simeq (\lambda * \alpha * \lambda') * c_x$ ، داریم  $\eta \simeq \gamma * c_x$  و در نتیجه  $[\eta] \in N([\gamma], U)$ .

نشان می‌دهیم  $N([\eta], U) \subseteq N([\alpha], V, W) \cap \pi X(x, x)$

1 Small loop transfer space

2 Small loop space

اگر  $[\beta] \in N([\eta], U)$  دلخواه باشد آن گاه  $\beta \simeq \lambda * \alpha * \lambda' * \delta$  که  $\delta$  مسیری در  $U$  است و  $\delta(0) = \delta(1) = x$ . از طرفی با توجه به اینکه  $\delta(I) \subseteq U = V \cap W$  و  $W$  مسیری در  $W$  است،  $(\lambda' * \delta)$  نیز مسیری در  $W$  می باشد، از این رو  $[\beta] \in N([\alpha], V, W) \cap \pi X(x, x)$ .

برعکس فرض کنید  $N([\alpha], U)$  همسایگی باز از  $[\xi]$  در  $\pi_1^{wh}(X, x)$  باشد. در این صورت طوقه ای مانند  $\gamma$  در  $U$  موجود است به طوری که  $\xi \simeq \alpha * \gamma$  می توانیم  $\xi$  را به صورت  $\xi \simeq c_x * \alpha * \gamma$  در نظر بگیریم. به این ترتیب  $[\xi] \in N([\alpha], U, U) \cap \pi^{wh} X(x, x)$ .

اکنون نشان می دهیم  $N([\xi], U, U) \cap \pi^{wh} X(x, x) \subseteq N([\alpha], U)$ . برای هر عضو دلخواه  $[\beta]$  در  $N([\xi], U, U) \cap \pi^{wh} X(x, x)$  مسیره های  $\lambda$  و  $\lambda'$  در  $U$  واقعند به طوری که  $\beta \simeq \lambda * \xi * \lambda'$  در این صورت  $\lambda(0) = \lambda'(1) = x$  با توجه به تعریف  $\xi$  داریم

$$\beta \simeq \lambda * \alpha * \gamma * \lambda' \simeq \alpha * (\alpha^{-1} * \lambda * \alpha) * \gamma * \lambda'.$$

از آن جا که  $X$  فضای انتقالی طوقه ای کوچک است مسیر  $\delta$  در  $U$  موجود است که  $\delta \simeq \alpha^{-1} * \lambda * \alpha$ . بنابراین  $\beta \simeq \alpha * \delta * \gamma * \lambda'$  و چون  $\delta$  و  $\gamma$  و  $\lambda'$  هر سه مسیره هایی در  $U$  هستند،  $(\delta * \gamma * \lambda')$  یک مسیر بسته در همسایگی  $U$  است و این یعنی  $[\beta] \in N([\alpha], U)$ .

تعریف گروه شبه توپولوژیکی را می توان به صورت زیر برای گروه وارها گسترش داد.

**تعریف ۲.۸.** گروه وار  $G$  بر  $G_0$  را یک گروه وار شبه توپولوژیکی گوئیم هر گاه همه نگاشت های ساختاری به جز ضرب پیوسته باشند.

**گزاره ۲.۹.** گروه وار بنیادین فضای همبند مسیری موضعی  $X$  مجهز به توپولوژی ویسکر یک گروه وار شبه توپولوژیکی است.

**برهان.** ثابت می کنیم همه نگاشت های ساختاری به جز ضرب پیوسته اند. نخست پیوستگی نگاشت مبدا  $(S)$  را بررسی می کنیم. برای هر  $[\alpha] \in \pi X(x, y)$  و هر همسایگی باز  $U$  از  $x$ ، قرار دهید  $O := N([\alpha], U, X)$  به وضوح  $[\alpha] \in O$  و برای هر  $[\beta] \in O$ ، مسیره های  $\lambda$  و  $\lambda'$  به ترتیب در  $U$  و  $X$  موجودند به طوری که  $\beta \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$  و  $\lambda(0) \in U$  بنابراین  $S([\beta]) = \beta(0) = \lambda(0) \in U$ . از این رو  $S(O) \subseteq U$ . با برهانی مشابه می توان نشان داد که نگاشت هدف نیز پیوسته است.

**پیوستگی نگاشت واحد ۱:** برای  $x \in X$  فرض کنید  $N([\alpha], U, W)$  همسایگی پایه ای دلخواه از  $[1_x]$  باشد. بنابراین  $1_x \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$  که در آن  $\lambda$  و  $\lambda'$  به ترتیب مسیره هایی در  $U$  و  $W$  می باشند. همچنین  $\lambda(0) = \lambda'(1) = x$  به این ترتیب  $U \cap W \neq \emptyset$ . فرض کنید  $M$  مولفه ی همبند مسیری از  $U \cap W$  باشد که شامل  $x$  است. چون  $X$  همبند

مسیری موضعی است،  $M$  باز بوده و نشان می‌دهیم  $1(M) \subseteq N([\alpha], U, W)$ . برای هر  $x \neq x' \in M$  مسیر  $\varphi$  از  $x'$  به  $x$  در  $M$  موجود است و داریم

$$1_{x'} \simeq \varphi * 1_x * \varphi^{-1} \simeq (\varphi * \lambda) * \alpha * (\lambda' * \varphi^{-1}).$$

که نتیجه می‌شود  $[1_{x'}] \in N([\alpha], U, W)$ .

**پیوستگی نگاشت وارون  $i$ :** فرض کنید  $O := N([\alpha^{-1}], U, W)$  همسایگی پایه‌ای دلخواه از  $[\alpha^{-1}]$  در  $\pi^{wh} X$  باشد. نشان می‌دهیم که  $O' := N([\alpha], W, U)$  همسایگی مورد نظر ما است به طوری که  $i(O') \subseteq O$ . اگر  $[\beta] \in N([\alpha], W, U)$  دلخواه باشد، آن‌گاه  $\beta \simeq \delta * \alpha * \delta'$  که  $\delta$  و  $\delta'$  به ترتیب مسیرهایی در  $W$  و  $U$  می‌باشند. چون  $i([\beta]) = [\beta^{-1}]$  و  $\delta^{-1} \simeq \delta'^{-1} * \alpha^{-1} * \delta^{-1}$  که  $\delta^{-1}(I) \subset W$  و  $\delta'^{-1}(I) \subset U$  پس  $i(O') \subset O$  که نتیجه می‌شود  $[\beta^{-1}] \in N([\alpha^{-1}], U, W)$ .

در گروه بنیادین با توپولوژی ویسکر نگاشت‌های انتقال از چپ پیوسته‌اند ولی نگاشت‌های انتقال از راست در آن لزوماً پیوسته نمی‌باشند [۱، اثبات گزاره ۳،۱]. در ادامه نشان خواهیم داد که در گروه‌وار بنیادین با توپولوژی ویسکر هیچ یک از انتقال‌های راست و چپ پیوسته نیستند. این تفاوت البته ناشی از نوع تعریف توپولوژی ویسکر بر گروه‌وار بنیادین می‌باشد که به دو طرف از یک مسیر، امتدادهایی را اضافه می‌کنیم درحالی‌که در گروه بنیادین فقط از سمت راست امتدادهایی را به طوقه‌ها اضافه می‌نماییم.

مثال زیر ادعایی روشن است بر اینکه نگاشت انتقال راست در گروه‌وار بنیادین با توپولوژی ویسکر لزوماً پیوسته نیست.

**مثال ۱۰.۲.** گروه‌وار بنیادین مجهز با توپولوژی ویسکر برای فضای گوشواره هاوایی یک گروه‌وار توپولوژیکی نیست. در واقع نگاشت انتقال راست در  $\pi^{wh} X(o)$  زمانی که  $o$  نقطه مماس دایره‌ها با هم باشند، پیوسته نمی‌باشد. به برهان خلف فرض کنید نگاشت انتقال راست  $r_{[g_1]}: \pi^{wh} X(o) \rightarrow \pi^{wh} X(o)$  که  $r_{[g_1]}([g]) = [g * g_1]$  پیوسته است. اگر  $U$  همسایگی بازی از  $o$  باشد که  $Im(g_1)$  را شامل نیست، در این صورت برای همسایگی پایه‌ای  $N([g_3 * g_1], U, U)$  از  $[g_3 * g_1]$ ، همسایگی‌های  $W'$  و  $W$  شامل  $o$  و مشمول در  $U$  یافت می‌شوند به طوری که

$$r_{[g_1]}(N([g_3], W, W')) \subseteq N([g_3 * g_1], U, U).$$

چون  $W \cap W'$  همسایگی باز شامل  $o$  است، پس  $k > 2$  وجود دارد به طوری که

$$[g_k * g_3 * g_k] \in N([g_3], W, W') \text{ لذا } g_k \in W \cap W',$$

و در نتیجه

$$r_{[g_1]}([g_k * g_3 * g_k]) \in N([g_3 * g_1], U, U).$$

بنابراین  $[g_k * g_3 * g_k * g_1] \in N([g_3 * g_1], U, U)$  پس طوقه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  در  $U$  موجودند به طوری که

$$g_k * g_3 * g_k * g_1 \simeq \alpha * g_3 * g_1 * \beta$$

و لذا داریم  $g_3^{-1} * \alpha^{-1} * g_k * g_3 * g_k \simeq g_1 * \beta * g_1^{-1}$

از آنجایی که  $\alpha$ ،  $g_3$  و  $g_k$  مسیرهایی در  $U$  هستند، داریم  $g_1 * \beta * g_1^{-1} \in i_* \pi_1(U, x)$  اما این تناقض است زیرا  $g_1 * \beta * g_1^{-1}$  با هیچ مسیری با شعاع کمتر از یک هموتوپ مسیری نمی‌باشد. برهان قضیه ۴،۱۰ از [۴] را ببینید.

به طریقی مشابه می‌توان ثابت کرد که نگاشت‌های انتقال چپ در  $\pi^{wh} HE(o)$  زمانی که  $o$  نقطه مشترک دایره‌ها باشد، پیوسته نیستند.

در ادامه به دنبال یافتن شرایطی هستیم که پیوستگی نگاشت ضرب را به منظور ساختن یک گروه وار توپولوژیکی با استفاده از توپولوژی ویسکر فراهم نماید.

گزاره ۲.۱۱. اگر نگاشت انتقال راست در  $\pi^{wh} X$  پیوسته باشد، آن‌گاه نگاشت ضرب نیز پیوسته است.

برهان. فرض کنید  $[g] \in \pi X$  و نگاشت انتقال راست پیوسته است. برای عضو دلخواه  $[\alpha]$  و هر همسایگی پایه‌ای  $N([\alpha * g], U, V)$  از  $R_{[g]}([\alpha]) = [\alpha * g]$  همسایگی پایه‌ای  $O = N([\alpha], U', V')$  از  $[\alpha]$  موجود است به طوری که  $R_{[g]}(N([\alpha], U', V')) \subseteq N([\alpha * g], U, V)$  از این‌رو برای هر عضو از  $N([\alpha], U', V')$  مانند  $[\lambda * \alpha * \lambda']$  که  $\lambda'(1) = g(0)$  داریم

$$R_{[g]}([\lambda * \alpha * \lambda']) = [\lambda * \alpha * \lambda' * g] \in N([\alpha * g], U, V).$$

بنابراین مسیره‌های  $\mu$  و  $\mu'$  در  $U$  و  $V$  موجودند به طوری که  $\lambda * \alpha * \lambda' * g \simeq \mu * \alpha * g * \mu'$

اکنون فرض کنید  $[\alpha], [\beta] \in \pi X$  باشند که  $\alpha(1) = \beta(0)$  و  $N([\alpha * \beta], U, V)$  همسایگی پایه‌ای از  $[\alpha * \beta]$  باشد. با توجه به پیوستگی  $R_{[\beta]}$  و توضیحات بالا، همسایگی‌های باز دلخواه  $W_1$  و  $W_2$  به ترتیب از  $\alpha(0)$  و  $\alpha(1)$  موجودند به طوری که برای هر مسیر  $\delta$  در  $W_1$  و هر طوقه  $\delta'$  در  $W_2$  (به دلیل تعریف شدن ضرب مسیری باید  $\alpha(1) = \delta'(0)$  و  $\delta'(1) = \beta(0)$  باشند)، مسیره‌های  $\eta$  و  $\eta'$  به ترتیب در  $U$  و  $V$  موجودند که

(۱)

$$\delta * \alpha * \delta' * \beta \simeq \eta * \alpha * \beta * \eta'.$$

قرار می‌دهیم  $O_1 := N([\alpha], U \cap W_1, W_2)$  و  $O_2 := N([\beta], W_2, V)$

اگر  $[\alpha'] \in O_1$  و  $[\beta'] \in O_2$  در این صورت  $\alpha' \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$  و  $\beta' \simeq \gamma * \beta * \gamma'$  و  $\lambda'$  و  $\lambda$  به ترتیب مسیرهایی هابی در  $U \cap W_1$  و  $W_2$  و همچنین  $\gamma$  و  $\gamma'$  به ترتیب مسیرهایی در  $W_2$  و  $V$  می‌باشند. از طرفی

$$[\alpha'] * [\beta'] = [\alpha' * \beta'] = [\lambda * \alpha * (\lambda' * \gamma) * \beta * \gamma'].$$

چون  $\lambda'$  و  $\gamma$  هر دو مسیرهایی در  $W_2$  هستند  $(\lambda' * \gamma)$  نیز طوقه‌ای در  $W_2$  بوده و با توجه به رابطه (۱) مسیرهایی  $\eta$  و  $\eta'$  به ترتیب در  $U$  و  $V$  موجودند که

$$\lambda * \alpha * (\lambda' * \gamma) * \beta * \gamma' \simeq \eta * \alpha * \beta * \eta' * \gamma'.$$

بنابراین با قرار دادن  $\eta'' = \eta' * \gamma'$  که مسیری در  $V$  است داریم  $[\alpha' * \beta'] = [\eta * \alpha * \beta * \eta'']$  این ایجاب می‌کند  $[\alpha' * \beta'] \in N([\alpha * \beta], U, V)$  و پیوستگی نگاشت ضرب نتیجه می‌شود.

**ملاحظه ۲.۱۲.** اگر نگاشت انتقال چپ در  $\pi^{wh}X$  پیوسته باشد، با استدلالی مشابه می‌توان نتیجه گرفت که نگاشت ضرب پیوسته است.

با توجه به گزاره قبل، یافتن فضاهایی که در آن‌ها نگاشت انتقال راست پیوسته باشد به ما در شناسایی رده‌ای از فضاها که گروه‌وار بنیادین آنها با توپولوژی ویسکر تشکیل یک گروه‌وار توپولوژیکی می‌دهد، کمک خواهد کرد.

**گزاره ۲.۱۳.** اگر  $X$  فضای انتقالی طوقه‌ی کوچک باشد، نگاشت انتقال راست در  $\pi^{wh}X$  پیوسته است.

**برهان.** فرض کنید  $x, y \in X$  و  $[\beta]$  عضوی دلخواه از  $\pi X(x, y)$  باشد. نگاشت انتقال از راست  $R_{[\beta]}: \pi^{wh}X(-, x) \rightarrow \pi^{wh}X(-, y)$  را در نظر بگیرید. برای هر  $z \in X$  و هر  $[\alpha] \in \pi X(z, x)$ ، فرض کنید  $N([\alpha * \beta], U, V)$  یک همسایگی پایه‌ای از  $[\alpha * \beta]$  است که در آن  $U$  و  $V$  به ترتیب همسایگی‌های بازی از  $z$  و  $y$  می‌باشند. از آن‌جا که  $X$  فضای انتقالی طوقه‌ی کوچک است، برای همسایگی باز  $V$  از  $y$ ، همسایگی باز  $V_1$  از  $x$  موجود است به طوری که برای هر طوقه  $\gamma_2$  بر پایه  $x$  در  $V_1$ ، طوقه  $\gamma_2'$  بر پایه  $y$  در  $V$  وجود دارد به طوری که

$$\gamma_2 * \beta \simeq \beta * \gamma_2' \text{ یعنی } \beta^{-1} * \gamma_2 * \beta \simeq \gamma_2'$$

همسایگی باز  $N([\alpha], U, V_1) \cap \pi^{wh}X(-, x)$  از  $[\alpha]$  را در نظر بگیرید. اگر  $[\lambda]$  عضو دلخواهی از  $N([\alpha], U, V_1) \cap \pi^{wh}X(-, x)$  باشد، آن‌گاه  $\lambda \simeq \lambda_1 * \alpha * \lambda_2$  که  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  به ترتیب مسیرهایی در  $U$  و  $V_1$  می‌باشند و  $\lambda_2$  طوقه‌ای بر پایه‌ی  $x = \beta(0) = \alpha(1)$  است. در این صورت:

$$R_{[\beta]}([\lambda]) \simeq \lambda_1 * \alpha * \lambda_2 * \beta \simeq \lambda_1 * \alpha * \beta * \lambda_2'$$

که در آن  $\lambda_2'$  طوقه‌ای در  $V$  است. این نتیجه می‌دهد  $R_{[\beta]}([\lambda]) \in N([\alpha * \beta], U, V)$  که همان نتیجه مطلوب ما است.

**ملاحظه ۱۴.۲.** با برهانی مشابه می توان نشان داد که اگر  $X$  فضای انتقالی طوقه کوچک باشد نگاشت انتقال از چپ پیوسته است.

با توجه به گزاره های ۱۱.۲ و ۱۳.۲ پیوستگی نگاشت ضرب در  $\pi^{wh}X$  را وقتی فضای  $X$  انتقالی طوقه کوچک باشد، داریم و همچنین پیوستگی سایر نگاشت های ساختاری را نیز در گزاره ۹.۲ داشتیم. از این رو قضیه مهم و اساسی زیر اثبات شده است.

**قضیه ۱۵.۲.** اگر  $X$  فضایی همبند مسیری موضعی و انتقالی طوقه ی کوچک باشد آن گاه گروه وار توپولوژیکی است.

در ادامه رفتارهای رسته ای  $\pi^{wh}$  را مورد مطالعه قرار می دهیم.

**گزاره ۱۶.۲.** اگر  $X$  و  $Y$  فضاهای توپولوژیکی و  $f: X \rightarrow Y$  نگاشت پیوسته باشد؛ آن گاه نگاشت  $\pi f: \pi^{wh}X \rightarrow \pi^{wh}Y$  که به صورت  $\pi f([\alpha]) = [fo\alpha]$  تعریف می شود پیوسته است.

**برهان.** فرض کنید  $O := N([fo\alpha], V, W)$  همسایگی پایه ای از  $[fo\alpha]$  در  $\pi^{wh}Y$  باشد به طوری که  $V$  و  $W$  به ترتیب همسایگی های باز از  $fo\alpha(0)$  و  $fo\alpha(1)$  می باشند. با قرار دادن  $U = f^{-1}(V)$  همچنین  $U' = f^{-1}(W)$ ، نشان می دهیم  $O' := N([\alpha], U, U')$  همسایگی پایه ای مورد نظر ما از  $[\alpha]$  در  $\pi^{wh}X$  می باشد به طوری که  $\pi f(O') \subseteq O$ . برای این منظور عضو دلخواه  $[\beta]$  را در  $O'$  در نظر می گیریم. در این صورت  $\beta \simeq \lambda' * \alpha * \lambda'$  که در آن  $\lambda(I) \subset U$  و  $\lambda'(I) \subset U'$  از آنجایی که  $(fo\lambda)$  مسیری در  $V$  و  $(fo\lambda')$  مسیری در  $W$  بوده و  $fo\beta \simeq (fo\lambda) * (fo\alpha) * (fo\lambda')$  داریم  $[fo\beta] \in O$  که ایجاب می کند  $\pi f([\beta]) \in O$ .

**نتیجه ۱۷.۲.** نگاشت  $\pi^{wh}$  یک تابع گون از رسته فضاهای توپولوژیکی همبند مسیری موضعی و انتقالی طوقه کوچک و نگاشت های پیوسته به رسته گروه وارهای توپولوژیکی است.

**برهان.** با توجه به قضیه ۱۵.۲ و گزاره ۱۶.۲ و این حقیقت که  $\pi$  یک تابع گون از رسته فضاهای توپولوژیکی و نگاشت های پیوسته به رسته گروه وارها است، ادعای مورد نظر ثابت می شود.

هنگامی که  $X$  یک فضای همبند ساده نیم موضعی است، همه توپولوژی های تعریف شده بر گروه بنیادین گسسته می باشند [۱۱]. اما این موضوع ممکن است برای گروه وار توپولوژیکی مورد نظر ما اتفاق نیفتد. زیرا برای همسایگی پایه ای دلخواه  $N([\alpha], U, V)$  از  $[\alpha]$ ، اعضای به شکل  $[\lambda * \alpha * \lambda'] \in N([\alpha], U, V)$  وجود دارند که نقاط آغازی و پایانی مسیر  $\lambda * \alpha * \lambda'$  با  $\alpha$  برابر نبوده و لذا  $[\alpha] \neq [\lambda * \alpha * \lambda']$ . این باعث می شود که  $N([\alpha], U, V) \neq \{[\alpha]\}$ . گزاره زیر نشان می دهد که وقتی نقاط انتهایی را ثابت نگه داریم، یعنی به جای  $\pi^{wh}X$  با  $\pi^{wh}X(x, y)$  کار کنیم، شرط انتقالی طوقه کوچک بودن فضا باعث گسسته شدن  $\pi^{wh}X(x, y)$  خواهد شد.

گزاره ۲. ۱۸. فضای توپولوژیکی انتقالی طوقه کوچک  $X$  را در نظر بگیرید. فضای همبند ساده نیم موضعی است اگر و تنها اگر برای هر  $x, y \in X$   $\pi^{wh}X(x, y)$  گسسته باشد.

برهان. برای فضای توپولوژیکی همبند ساده نیم موضعی  $X$  نشان می‌دهیم که برای هر  $x, y \in X$  و برای هر  $[\alpha] \in \pi X(x, y)$  مجموعه  $\{[\alpha]\}$  در  $\pi^{wh}X(x, y)$  باز است. به یاد بیاورید که در فضای همبند ساده نیم موضعی، برای هر  $x \in X$  همسایگی باز  $U_x$  از  $x$  موجود است به طوری که هر مسیر بسته در  $U_x$  حول  $x$ ، در  $X$  پوچ هموتوپیک می‌شود. اکنون اگر  $[\beta] \in N([\alpha], U_x, V_y) \cap \pi^{wh}X(x, y)$  اختیار شود،  $\beta \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$  خواهد شد که در آن  $U_x$  و  $V_y$  به ترتیب همسایگی‌های باز از  $x$  و  $y$  بوده و داریم  $\lambda(I) \subseteq U_x$  و  $\lambda'(I) \subseteq V_y$  از طرفی

$$\lambda(0) = \beta(0) = x = \lambda(1), \quad \lambda'(0) = \beta(1) = y = \lambda'(1).$$

بدین ترتیب  $\lambda$  و  $\lambda'$  مسیرهای بسته در  $U_x$  و  $V_y$  می‌باشند و با توجه به نحوه انتخاب  $U_x$  و  $V_y$ ،  $\lambda$  و  $\lambda'$  طوقه‌هایی پوچ هموتوپیک‌اند.<sup>۱</sup> از این رو  $[\lambda] = e_x$  و  $[\lambda'] = e_y$  که ایجاب می‌کند  $\beta \simeq \alpha$  و این یعنی

$$N([\alpha], U_x, V_y) \cap \pi^{wh}X(x, y) = \{[\alpha]\}.$$

برای اثبات لزوم، دقت شود که گسسته بودن  $\pi_1^{wh}(X, x)$  همبند ساده نیم موضعی بودن  $X$  را ایجاب می‌کند (نتیجه ۳. ۳ از [۴]). اکنون از برابری  $\pi_1^{wh}(X, x) = \pi^{wh}X(x, x)$  نتیجه حاصل می‌شود.

## References

1. M. Abdollahi-Rashid, S. Z. Pashaei, B. Mashayekhy and H. Torabi, On the whisker topology on fundamental groups, 46<sup>th</sup> Annual Mathematics conference, yazd university, 25-28 August (2015).
2. D. Biss, The topological fundamental group and generalized covering spaces, Topology Appl. 124 (2002) 355–371.
3. J. Brazas, The fundamental group as a topological group, Topology Appl. 160 (2013) 170–188.
4. N. Brodskiy, J. Dydak, B. Labuz, A. Mitra, Topological and uniform Structures on universal covering space, arxiv: 1206.0071.
5. R. Brown, Topology and Groupoids. Deganwy, United kingdom: Booksurgellc, 2006.

<sup>1</sup> Nullhomotopic



6. R. Brown and G. Danesh\_Naruie, Topological fundamental groupoid as topological groupoid. Proc. Endiburg Math. Soc. 19(1975) 237-244.
7. J. Dugundji, A topologized fundamental group, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950) 141–143.
8. H. Ghane, Z. Hamed, B. Mashayekhy, H. Mirebrahimi, Topological homotopy groups, Bull. Belg. Math. Soc. 15 (2008) 455–464.
9. K. Mackenzie, Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry London Mathematical society lecture Note series, (124) 1987.
10. A. Pakdaman and F. Shahini, The Fundamental Groupoid as a Topological Groupoid: Lasso Topology, Topology and its Applications. 302 (2021) 1--8..
11. Z. Virk and A. Zastrow, A new topology on the universal path space, Topology and its Applications. 231 (2017), 186-196.
12. E. H. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, 1966.
13. H. Torabi, On topologized fundamental groups and covering groups of topological groups, Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science. 44(6) (2020), 1731-1737.