Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Study and characterization of some classes of polymatroidal ideals

Somayeh Bandari[1]

1. Department of Mathematics, Buein Zahra Technical University, Buein Zahra, Qazvin, Iran.

E-mail: s.bandari@bzte.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
29 September 2020
Revised form:
19 December 2020
Accepted:
7 March 2021
Published online:
21 May 2022

Keywords:
Polymatroidal ideals;
Regular decomposition function;
Generic ideals;
Generalized Cohen-Macaulay ideals;
Linear quotients.

ABSTRACT

Introduction

Throughout this paper, we consider monomial ideals of the polynomial ring $S = K[x_1,...,x_n]$ over a filed K. We try to give some properties of the polymatroidal ideals, which are the special class of monomial ideals. Herzog and Takayama constructed explicit resolutions for all ideals with linear quotients which admit regular decomposition functions. They also shaw that this class contains all matroidal ideals. We generalize their result to the polymatroidal ideals. Therefore, we can give an explicit linear resolution for any polymatroidal ideal. We also characterize generic polymatroidal ideals. The author and Jafari [1] characterized generalized Cohen-Macaulay polymatroidal ideals. Finally, we characterize monomial ideals which all their powers are generalized Cohen-Macaulay polymatroidal ideals.

Material and methods

A monomial ideal I is said to be polymatroidal, if it is single degree and for any two elements $u,v \in G(I)$ such that $\deg_{x_i}(u) > \deg_{x_i}(v)$ there exists an index $j \in [n]$ with $\deg_{x_j}(u) < \deg_{x_j}(v)$ such that $x_j(\frac{u}{x_i}) \in I$. In the case that the polymatroidal ideal I is squarefree, it is called matroidal.

We know that the powers of a polymatroidal ideal are again polymatroidal and polymatroidal ideals have linear quotients. Therefore all powers of polymatroidal ideal have linear resolutions.

Let I has linear quotients with the order $u_1,\dots,u_t$ of elements of $G(I)$. We can associate a unique decomposition function, that is a function $g: M(I) \to G(I)$ which maps a monomial u to u_j, if j is the smallest index such that $u \in I_j$, where $I_j = (u_1,\dots,u_j)$. The decomposition function $g: M(I) \to G(I)$ is called regular, if $q(x_i u)) \subseteq q(u)$ for all $u \in G(I)$ and $x_i \in q(u)$.

We show that any polymatroidal ideal has a regular decomposition function. Therefore we can give an explicit linear resolution for any polymatroidal ideal. By an example, we show that our result can not be extended to the weakly polymatroidal ideals even if they are generated in a single degree.

Recall that, a monomial ideal $I=(m_1,\dots,m_r)$ is called generic if two distinct minimal generators m_i and m_j have the same positive degree in some variable x_s, there is a third generator m_l which $m_l \mid lcm(m_i,m_j)$ and $supp(\frac{lcm(m_i,m_j)}{m_l})=supp(lcm(m_i,m_j))$, where $lcm(m_i,m_j)$ is the least common multiple of m_i and m_j.

In the next result, we characterize generic polymatroidal ideals.

A monomial ideal I is called generalized Cohen-Macaulay, whenever I is equidimensional and monomial localization $I(P)$ is Cohen-Macaulay for all monomial prime ideals $P \neq m$, where m is unique homogenous maximal ideal of S.

Finally, we characterize monomial ideals which all their powers are generalized Cohen-Macaulay polymatroidal ideals.

Results and discussion

For the first result, we show that any polymatroidal ideal has a regular decomposition function. So we have an explicit linear resolution of any polymatrodal ideal.

In the next, we show that if $I \subset S=K[x_1,...,x_n]$ is a fully supported polymatroidal ideal generated in degree d. Then I is generic if and only if I is either a complete intersection or $n \leq 2$.

Finally, we prove that if I is a fully supported monomial ideal in $S=K[x_1,...,x_n]$ and generated in degree d. Then I^k is a generalized Cohen-Macaulay polymatroidal ideal for all $k \in \mathbb{N}$ if and only if $I=J \cap m^s$ where $s \in \{0,d\}$ and $J=p_1^{a_1} \cap \cdots \cap p_r^{a_r}$ for some integers $a_i > 0$ and one of the following statements holds true:

a) J is a principal ideal.

b) J is a Veronese ideal.

c) $J=p_1^{a_1} \cap \cdots \cap p_r^{a_r}$ is equidimensional and $p_i+p_j=m$ for all $i \neq j$.

d) J is an unmixed matroidal ideal of degree 2.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research:

- Any polymatroidal ideal has a regular decomposition function.
- characterization of generic ideals.
- characterization of monomial ideals which all their powers are generalized Cohen-Macaulay polymatroidal ideals.

How to cite: Bndari, S., (2022) Study and characterization of some classes of polymatroidal ideals. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-11

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مطالعه و دسته‌بندی برخی از کلاس‌های ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال

سمیه بندری[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، بوئین زهرا، قزوین، ایران. پست الکترونیکی: s.bandari@bzte.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۰۸
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۹/۲۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۱۷
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

چکیده

در این مقاله ردهٔ ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. به ویژه نشان می‌دهیم که هر ایده‌آل پلی‌ماترویدال، تابع تجزیهٔ منظم[۳] دارد و لذا می‌توانیم تحلیل خطی دقیق آن را بیان کنیم. همچنین ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال عام را دسته‌بندی می‌کنیم. در نهایت به دسته‌بندی ایده‌آل‌های یک‌جمله‌ای که همه توان‌هایشان پلی‌ماترویدال کوهن- مکالی تعمیم یافته هستند، می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی:
ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال،
تابع تجزیه منظم،
ایده‌آل‌های عام[۱]،
ایده‌آل‌های کوهن- مکالی تعمیم یافته[۲]،
خارج قسمت‌های خطی.

استناد: بندری، سمیه؛ (۱۴۰۱). مطالعه و دسته‌بندی برخی از کلاس‌های ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۱-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

[1] Generic ideals
[2] Generalized Cohen-Macaulay ideals
[3] Regular decomposition function

۱. مقدمه

فرض کنیم I یک ایده‌آل یک‌جمله‌ای از حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $S=K[x_1,...,x_n]$ روی میدان K باشد. ردهٔ ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال یکی از دسته رده‌های نادر از ایده‌آل‌های یک‌جمله‌ای است که دارای خواص جالبی هستند. همه توان‌های ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال، پلی‌ماترویدال هستند [۲] و هر ایده‌آل پلی‌ماترویدال خارج قسمت‌های خطی دارد [۶]. بنابراین از این‌که ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال از یک درجه تولید می‌شوند، نتیجه می‌شود که تحلیل خطی دارند [۲]. لذا بنابر آنچه بیان شد، همهٔ توان‌های ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال، تحلیل خطی دارند. در [۶] هرزوگ و تاکایاما به طور دقیق تحلیل آزاد مینیمال مدرج هر ایده‌آلی با خارج قسمت‌های خطی که تابع تجزیه منظم دارد را بیان کرده‌اند. آنها همچنین نشان داده‌اند که ایده‌آل‌های ماترویدال، ایده‌آل‌هایی با خارج قسمت‌های خطی هستند که تابع تجزیهٔ منظم دارند. در این مقاله نتیجهٔ هرزوگ و تاکایاما را به ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال توسیع می‌دهیم (قضیهٔ ۶). بنابراین می‌توانیم تحلیل خطی دقیق هر ایده‌آل پلی‌ماترویدال را بیان کنیم. در ادامه، در قضیهٔ ۱۳، ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال عام دسته‌بندی می‌شوند. همچنین در [۱] بندری و جعفری ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال کوهن-مکالی تعمیم یافته را دسته‌بندی کرده‌اند. در این مقاله ایده‌آل‌های یک‌جمله‌ای که همه توان‌هایشان پلی‌ماترویدال کوهن-مکالی تعمیم یافته هستند را دسته‌بندی می‌کنیم (قضیهٔ ۲۱).

تعاریف و نتایج اصلی

در سرتاسر این مقاله فرض می‌کنیم $S=K[x_1,...,x_n]$ حلقهٔ استاندارد مدرج چندجمله‌ای‌ها روی میدان K با ایده‌آل ماکزیمال همگن $m=(x_1,...,x_n)$ باشد. فرض کنیم $M(I)$ مجموعهٔ همهٔ یک‌جمله‌ای‌های موجود در I و $G(I)$ مجموعهٔ مولد مینیمال یکتا از مولدهای I باشد.

تعریف۱. گوئیم ایده‌آل یک‌جمله‌ای I خارج قسمت‌های خطی دارد، هرگاه ترتیب $u_1,...,u_t$ از اعضا $G(I)$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $2\le i\le t$، ایده‌آل $(u_1,...,u_{i-1}):u_i$ توسط زیرمجموعهٔ $q(u_i)$ از متغیرها تولید شود.

به هر ایده‌آل یک‌جمله‌ای I که با ترتیب $u_1,...,u_t$ از اعضای $G(I)$، خارج قسمت‌های خطی دارد، می‌توان یک تابع تجزیه یکتای $g:M(I)\to G(I)$ وابسته کرد. تابع $g:M(I)\to G(I)$ یکجمله‌ای u را به u_j می‌برد که j کوچکترین اندیسی است که $u\in I_j$ و $I_j=(u_1,...,u_j)$. تابع تجزیهٔ $g:M(I)\to G(I)$ را منظم گوئیم، هرگاه برای هر $u\in G(I)$ و هر $x_i\in q(u)$ داشته باشیم $q(g(x_iu))\subseteq q(u)$.

تعریف ۲. گوئیم ایده‌آل یک‌جمله‌ای I، d-تحلیل خطی دارد، هرگاه تحلیل آزاد مینیمال مدرج I به صورت زیر باشد:

$$0\to S^{m_t}(-(d+t))\to\cdots\to S^{m_i}(-(d+i))\to$$
$$S^{m_{i-1}}(-(d+i-1))\to\cdots\to S^{m_1}(-(d+1))\to S^{m_0}(-d)\to I\to 0.$$

در [۲] کونکا و هرزوگ نشان داده‌اند که اگر ایده‌آل یک‌جمله‌ای I از درجه d تولید شده باشد و خارج قسمت‌های خطی داشته باشد، آن‌گاه I، d- تحلیل خطی دارد (لم ۴,۱، ۲).

تعریف ۳. ایده‌آل یک‌جمله‌ای I را پلی‌ماترویدال گوئیم، هرگاه I از یک درجه تولید شده باشد و ویژگی معاوضه‌ای زیر برقرار باشد:

برای هر $u,v \in G(I)$ که $\deg_{x_i}(u) > \deg_{x_i}(v)$، اندیس $j \in [n]$ موجود است به طوری‌که $\deg_{x_j}(u) < \deg_{x_j}(v)$ و $x_j(\frac{u}{x_i}) \in G(I)$.

ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال خالی از مربع را ماترویدال گوئیم.

تعریف ۴. یک ترتیب یک‌جمله‌ای روی حلقهٔ S، یک ترتیب تام $>$ روی یک‌جمله‌ای‌های S است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) برای هر یک‌جمله‌ای $1 \neq u \in S$ داریم $1 < u$.

۲) هرگاه یک‌جمله‌ای‌های $u,v \in S$ و $u < v$، آن‌گاه برای هر یک‌جمله‌ای $w \in S$ داریم $uw < vw$.

تعریف ۵. عکس ترتیب قاموسی روی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n} < x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$ اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{n} a_n < \sum_{i=1}^{n} b_n$ و یا اگر داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n} a_n = \sum_{i=1}^{n} b_n$، آن‌گاه آخرین مؤلفهٔ ناصفر $(a_1-b_1,\dots,a_n-b_n)$، مثبت باشد.

ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال با در نظر گرفتن عکس ترتیب قاموسی روی مجموعهٔ مولد مینیمالشان،خارج قسمت‌های خطی دارند [لم ۱,۳، ۶] و لذا تحلیل خطی دارند (لم ۴,۱، ۲).

در [۶] هرزوگ و تاکایاما ثابت کرده‌اند که ایده‌آل‌های ماترویدال ایده‌آل‌هایی با خارج قسمت‌های خطی هستند که تابع تجزیهٔ منظم دارند [قضیهٔ ۱,۱۰، ۶] و لذا می‌توان تحلیل خطی دقیق آنها را بیان کرد [قضیهٔ۱,۱۲،۶]. در قضیهٔ زیر نتیجه آنها را به ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال توسیع می‌دهیم.

قضیهٔ۶. هر ایده‌آل پلی‌ماترویدال $I \subset S$ تابع تجزیهٔ منظم دارد.

برهان. فرض کنیم $G(I)=\{u_1,\dots,u_t\}$ مجموعهٔ مولد مینیمال متشکل از یک‌جمله‌ای‌هایی از I با عکس ترتیب قاموسی طوری مرتب شده باشد که $u_1 > \cdots > u_t$. همچنین فرض کنیم $u \in G(I)$ و $x_i \in q(u)$. می‌خواهیم نشان دهیم که $q(g(x_iu)) \subseteq q(u)$. فرض کنیم $x_j \in q(g(x_iu))$. بنابراین $u_r \in G(I)$ موجود است به طوری‌که $u_r > g(x_iu)$ و $u_r = \frac{x_j\, g(x_iu)}{x_h}$ برای $h \in [n]$ای با فرض $j < h$. از طرفی از این‌که $x_i \in q(u)$، داریم $g(x_iu)=\frac{x_iu}{x_s}$ برای $s \in [n]$ای با فرض $i < s$. بنابراین $u_r = \frac{x_ix_ju}{x_sx_h}$.

اگر $i = h$، آن‌گاه $u_r = \frac{x_ju}{x_s}$. از این‌که $u_r > g(x_iu) > u$ نتیجه می‌شود که $x_j \in q(u)$. در ادامه فرض کنیم $i \neq h$. بنابراین از فرض $i \neq s$ داریم $\deg_{x_i}(u_r) > \deg_{x_i}(u)$. حال از این‌که I ایده‌آلی پلی‌ماترویدال است، اندیس

$k \in [n]$ موجود است به طوری‌که $\deg_{x_k}(u) > \deg_{x_k}(u_r)$ و $\in G(I)$ $u_p := \frac{x_k u_r}{x_i} = \frac{x_j x_k u}{x_s x_h}$. اگر $k = s$، آن‌گاه از این‌که $j < h$ داریم $u_p = \frac{x_j u}{x_h} > u$، پس $x_j \in q(u)$. حال فرض کنیم $k \neq s$. بنابراین از این‌که $\deg_{x_k}(u) > \deg_{x_k}(u_r)$ و $u_r = \frac{x_i x_j u}{x_s x_h}$ نتیجه می‌شود $k = h$ و لذا $u_p = \frac{x_j u}{x_s}$.

- اگر $j < s$، آن‌گاه $u_p > u$ و بنابراین $x_j \in q(u)$.
- فرض کنیم $j \geq s$. از این‌که I ایده‌آلی پلی‌ماترویدالاست و $\deg_{x_k}(u) > \deg_{x_k}(u_r)$ خواهیم داشت $\frac{x_i u}{x_k} \in G(I)$ یا $\frac{x_j u}{x_k} \in G(I)$. اگر $\frac{x_i u}{x_k} \in G(I)$، آن‌گاه از این‌که $i < s \leq j < h = k$ نتیجه می‌شود $\frac{x_i u}{x_k} > u$. از طرفی از فرض $s < k$داریم $g(x_i u) = \frac{x_i u}{x_s} < \frac{x_i u}{x_k}$ که تناقض است. بنابراین $\frac{x_j u}{x_k} \in G(I)$. حال از این‌که $j < h = k$ داریم $\frac{x_j u}{x_k} > u$، لذا $x_j \in q(u)$.

تعریف ۷. ایده‌آل یک‌جمله‌ای I را به طور ضعیف پلی‌ماترویدال[۱] گوئیم، هرگاه برای هر $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in G(I)$ و $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \in G(I)$ با فرض $a_1 = b_1, \ldots, a_{t-1} = b_{t-1}$ و $a_t > b_t$، آن‌گاه $j > t$ موجود باشد به طوری‌که $x_t(\frac{v}{x_j}) \in I$.

نکتهٔ ۸. واضح است که هر ایده‌آل پلی‌ماترویدال، به طور ضعیف پلی‌ماترویدال است. همچنین از [قضیهٔ ۱٫۳، ۸] می‌دانیم هر ایده‌آل به طور ضعیف پلی‌ماترویدال، خارج قسمت‌های خطی دارد. لذا طبیعی است از خود بپرسیم آیا می‌توان قضیهٔ ۶ را به ایده‌آل‌های به طور ضعیف پلی‌ماترویدال توسیع داد؟ مثال زیر نشان می‌دهد که جواب حتی برای ایده‌آل‌های به طور ضعیف پلی‌ماترویدال تولید شده از درجهٔ یکسان نیز منفی است. فرض کنیم $I = (x_1x_3x_5, x_1x_3x_6, x_1x_4x_6, x_2x_4x_6)$. ایده‌آل I یک ایده‌آل به طور ضعیف پلی‌ماترویدال تولید شده از درجهٔ یکسان است . حال نشان خواهیم داد که I تابع تجزیهٔ منظم ندارد.

- $I = (x_1x_3x_5, x_1x_3x_6, x_1x_4x_6, x_2x_4x_6)$ با ترتیب داده شده خارج قسمت خطی دارد. فرض کنیم $u = x_2x_4x_6$، آنگاه $q(u) = x_1$ و $q(g(x_1u) = x_3 \not\subset q(u)$.
- $I = (x_1x_3x_6, x_1x_3x_5, x_1x_4x_6, x_2x_4x_6)$ با ترتیب داده شده خارج قسمت خطی دارد. فرض کنیم $u = x_2x_4x_6$، آنگاه $q(u) = x_1$ و $q(g(x_1u) = x_3 \not\subset q(u)$.
- $I = (x_1x_4x_6, x_2x_4x_6, x_1x_3x_6, x_1x_3x_5)$ با ترتیب داده شده خارج قسمت خطی دارد. فرض کنیم $u = x_1x_3x_5$، آنگاه $q(u) = x_6$ و $q(g(x_6u) = x_4 \not\subset q(u)$.
- $I = (x_2x_4x_6, x_1x_4x_6, x_1x_3x_6, x_1x_3x_5)$ با ترتیب داده شده خارج قسمت خطی دارد. فرض کنیم $u = x_1x_3x_5$، آنگاه $q(u) = x_6$ و $q(g(x_6u) = x_4 \not\subset q(u)$.

در ادامه می‌خواهیم ایده‌آل‌های پلی‌ماترویدال عام را دسته‌بندی کنیم. در ابتدا مطالبی که در روند اثبات نیاز داریم را می‌آوریم.

1. Weakly polymatroidal

تعریف۹. برای یک‌جمله‌ای $u \in S$ قرار می‌دهیم $\operatorname{supp}(u) := \{x_i ; 1 \le i \le n,\ x_i \mid u\}$ و $\operatorname{supp}(I) := \bigcup_{u \in G(I)} \operatorname{supp}(u)$. گوئیم $I \subset S$ با محمل کامل است، هرگاه $\operatorname{supp}(I) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

تعریف۱۰. ایده‌آل یک‌جمله‌ای I را عام گوئیم، هرگاه برای دو مولد مینیمال m_1 و m_2 که در متغیر x درجهٔ مثبت یکسان دارند، مولد مینیمال سومی موجود باشد به طوری‌که

$$m_3 \mid lcm(m_1, m_2)\ ,\ \operatorname{supp}\left(\frac{lcm(m_1, m_2)}{m_3}\right) = \operatorname{supp}(lcm(m_1, m_2))$$

که در آن $lcm(m_1, m_2)$ کوچکترین مضرب مشترک m_1 و m_2 است.

تعریف۱۱. ایده‌آل یک‌جمله‌ای $I = (u_1, \dots, u_t)$ مقطع کامل است، هرگاه برای هر $1 \le i \ne j \le t$ داشته باشیم $\operatorname{supp}(u_i) \cap \operatorname{supp}(u_j) = \varnothing$.

نکتهٔ۱۲. هر ایده‌آل پلی‌ماترویدال مقطع کامل، یا یک ایده‌آل اصلی است یا توسط متغیرها تولید می‌شود.

قضیهٔ۱۳. فرض کنیم $I \subset S = K[x_1, \dots, x_n]$ یک ایده‌آل پلی‌ماترویدال با محمل کامل و از درجهٔ d باشد. آن‌گاه I یک ایده‌آل عام است اگر و تنها اگر I مقطع کامل باشد یا $n \le 2$.

برهان.اگر I مقطع کامل باشدیا $n \le 2$، آنگاه واضح است که I یک ایده‌آل عام است. حال فرض کنیم I یک ایده‌آل عام باشد که مقطع کامل نیست و همچنین فرض کنیم $n \ge 3$. بنابراین $d > 1$ و I ایده‌آل اصلی نیست. فرض کنیم دو مولد مینیمال $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ و v از I موجود باشند به طوری که در متغییر x_s داشته باشیم $\deg_{x_s}(u) = \deg_{x_s}(v) > 0$.فرض کنیم $\deg_{x_i}(u) > \deg_{x_i}(v)$. از این‌که I پلی‌ماترویدال است، لذا اندیس $j \in [n]$ وجود دارد به طوری‌که $\deg_{x_j}(u) < \deg_{x_j}(v)$ و $w = \frac{u}{x_i} x_j \in G(I)$. بنابراین

$$l := lcm(u, w) = x_1^{a_1} \cdots x_{j-1}^{a_{j-1}} x_j^{a_j + 1} x_{j+1}^{a_{j+1}} \cdots x_n^{a_n}.$$

لذا از این‌که I عام است، نتیجه می‌شود که $z \in G(I)$ موجود است به طوری که $z \mid l$ و $\operatorname{supp}\left(\frac{l}{z}\right) = \operatorname{supp}(l)$. از طرفی داریم

$$\deg(z) = d,\ \deg(l) = d + 1,\ \deg_{x_j}(l) > 0,\ \deg_{x_s}(l) > 0$$

که این تناقض است. بنابراین نشان دادیم که هر دو مولد مینیمال متفاوت از I نمی‌توانند در متغیری، درجهٔ مثبت یکسانی داشته باشند. لذا از این‌که I پلی‌ماترویدال است، نتیجه می‌شود که برای هر $u \in G(I)$، $|\operatorname{supp}(u)| \nleq 2$. زیرا اگر برای $u \in G(I)$ای داشته باشیم $|\operatorname{supp}(u)| > 2$، آن‌گاه از این‌که I ایده‌آل اصلی نیست، با در نظر گرفتن ویژگی معاوضه‌ای بین u و مولد مینیمال دیگری از I، آن‌گاه مولد $v \in G(I)$یافت می‌شود که با u در متغیری هم درجه هستند.

اکنون دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) فرض کنیم برای هر $u \in G(I)$ داریم $|\operatorname{supp}(u)|=1$. از این‌که I ایده‌آل اصلی نیست، نتیجه می‌شود که حداقل دو مولد مینیمال $v = x_i^d$ و $v' = x_j^d$ وجود دارند. از آن‌جا که I پلی‌ماترویدال است، داریم $w = \frac{v}{x_i} x_j \in G(I)$. بنابراین از فرض $d > 1$ خواهیم داشت $|\operatorname{supp}(w)| > 1$ که تناقض است.

ب) فرض کنیم $u = x_i^{a_i} x_j^{a_j} \in G(I)$ موجود باشد به طوری‌که $a_i, a_j > 0$. از این‌که I با محمل کامل است و $n \geq 3$، نتیجه می‌شود که $v \in G(I)$ موجود است به طوری‌که $x_k \mid v$ با فرض $k \in [n]$ و $k \neq i, j$. از آن‌جا که I پلی‌ماترویدال است، بنابر [قضیهٔ ۱,۴,۱۲، ۳]، I در ویژگی معاوضه‌ای متقارن صدق می‌کند. پس $\frac{u}{x_i} x_k \in G(I)$ یا $\frac{u}{x_j} x_k \in G(I)$ که هرکدام از آنها با u در متغیری درجهٔ یکسان دارند و این تناقض است.

در ادامه می‌خواهیم ایده‌آل‌های یک‌جمله‌ای که همه توان‌هایشان پلی‌ماترویدال کوهن- مکالی تعمیم یافته هستند را دسته‌بندی کنیم. در ابتدا تعاریف و گزاره‌های اولیه‌ای که مورد نیاز است را می‌آوریم.

تعریف۱۴. ایده‌آل $I \subset S$ را خالص[1] گوئیم، اگر همهٔ ایده‌آل‌های اول $Ass(\frac{S}{I})$ ارتفاع یکسان داشته باشند. همچنین اگر همهٔ ایده‌آل‌های اول مینیمال I، ارتفاع یکسانی داشته باشند، آن‌گاه I را هم‌بعد[2] گوئیم. واضح است که هر ایده‌آل خالص، هم‌بعد است و عکس آن زمانی برقرار است که داشته باشیم $Ass(\frac{S}{I}) = Min(I)$.

همچنین ایده‌آل $I \subset S$ را کوهن- مکالی گوئیم، هرگاه $\operatorname{depth}(\frac{S}{I}) = \dim(\frac{S}{I})$.

تعریف۱۵. فرض کنیم p یک ایده‌آل اول یک‌جمله‌ای از حلقهٔ چندجمله‌ای‌های S باشد. لذا از این‌که p توسط متغیرها تولید شده است، می‌توان آنرا با نماد $p = p_{\{i_1,\dots,i_t\}}$ نمایش داد، به طوری‌که $\{i_1,\dots,i_t\} = [n] \setminus \{i \mid x_i \in \operatorname{supp}(p)\}$. همچنین داریم $IS_p = JS_p$ که در آن J یک ایده‌آل یکجمله‌ای است که از I با قرار دادن ۱ به جای همه متغیرهای x_{i_j} با فرض $j \in [t]$ به دست می‌آید. ایده‌آل J را موضعی‌سازی یک‌جمله‌ای I نسبت به p گوئیم و آن را با نماد $I(p)$ نمایش می‌دهیم. $I(p)$ ایده‌آلی از حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $S(p) := K[x_i \mid x_i \in p]$ است.

تعریف۱۶. [**لم ۱,۴، ۱**]: ایده‌آل یک‌جمله‌ای I را کوهن- مکالی تعمیم یافته گوئیم، هرگاه I هم‌بعد باشد و برای هر ایده‌آل اول یک‌جمله‌ای $p \neq m$، $I(p)$ کوهن- مکالی باشد.

تعریف۱۷. اعداد طبیعی $a_1,\dots,a_n$ و d داده شده‌اند. ایده‌آل $I_{(d;a_1,\dots,a_n)} \subset S = K[x_1,\dots,x_n]$ ایده‌آل یک‌جمله‌ای تولید شده توسط یک‌جمله‌ای‌های $u \in S$ است به طوری‌که $\deg(u) = d$ و برای هر $i = 1,\dots,n$، $\deg_{x_i}(u) \leq a_i$.
این ایده‌آل یک‌جمله‌ای را ایده‌آل از نوع ورونزه می‌نامیم.

به‌وضوح هر ایده‌آل از نوع ورونزه، پلی‌ماترویدال است.

1. Unmixed
2. Equidimensional

ایده‌آل ورونزه (خالی از مربع) از درجهٔ d با متغیرهای $x_{i_1},\dots,x_{i_t}$، ایده‌آلی از حلقهٔ S است که توسط همهٔ یک‌جمله‌ای‌های (خالی از مربع) از درجهٔ d با متغیرهای $x_{i_1},\dots,x_{i_t}$ تولید شده است.

گزارهٔ ۱۸. [**قضیهٔ ۴,۲، ۴**]: ایده‌آل پلی‌ماترویدال I کوهن- مکالی است اگر و تنها اگر I یا ایده‌آل اصلی یا ایده‌آل ورونزه یا ایده‌آل ورونزه خالی از مربع باشد.

گزارهٔ ۱۹. [**گزارهٔ ۵، ۷**]: فرض کنیم $I \subset S$ یک ایده آل پلی‌ماترویدال با فرض $Ass(\frac{S}{I}) = \{p_1,\dots,p_r\} \setminus \mathrm{m}$ باشد. آن‌گاه اعداد صحیح $a_i > 0$ و $s \geq 0$ موجود هستند به طوری‌که $I = p_1^{a_1} \cap \cdots \cap p_r^{a_r} \cap m^s$. اگر $s > 0$، آن‌گاه I از درجهٔ s تولید شده است.

گزارهٔ ۲۰. [**قضیهٔ ۴,۸، ۱**]: فرض کنیم $I = J \cap m^s$ یک ایده‌آل یک‌جمله‌ای با محمل کامل در حلقهٔ S و تولید شده از درجهٔ d باشد به طوری‌که $s \in \{0,d\}$. آن‌گاه I پلی‌ماترویدال کوهن- مکالی تعمیم یافته است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

الف) J ایده‌آل پلی‌ماترویدال کوهن- مکالی است.

ب) $J = p_1^{a_1} \cap \cdots \cap p_r^{a_r}$ هم‌بعد است و همچنین برای هر $i \neq j$، $p_i + p_j = m$.

ج) J ایده‌آل ماترویدال خالص تولید شده از درجهٔ ۲ است.

اکنون می‌توانیم یکی از نتایج اصلی خود را بیان کنیم.

قضیهٔ ۲۱. فرض کنیم $I \subset S$ یک ایده‌آل یک‌جمله‌ای با محمل کامل و از درجهٔ d باشد. آن‌گاه برای هر $k \in \mathbb{N}$، I^k پلی‌ماترویدال کوهن-مکالی تعمیم یافته است اگر و تنها اگر $I = J \cap m^s$ که در آن $s \in \{0,d\}$ و $J = p_1^{a_1} \cap \cdots \cap p_r^{a_r}$ با فرض $a_i \in \mathbb{N}$ و یکی از شرایط زیر برقرار است:

الف) J ایده‌آل اصلی است.

ب) J ایده‌آل ورونزه است.

ج) $J = p_1^{a_1} \cap \cdots \cap p_r^{a_r}$ هم‌بعد است و همچنین برای هر $i \neq j$، $p_i + p_j = m$.

د) J ایده‌آل ماترویدال خالص تولید شده از درجهٔ ۲ است

برهان. فرض کنیم به ازای هر k، I^k پلی‌ماترویدال کوهن-مکالی تعمیم یافته باشد. از این‌که I پلی‌ماترویدال کوهن- مکالی است، از گزاره‌های ۱۹ و ۲۰ خواهیم داشت که $I = J \cap m^s$ که در آن $s \in \{0,d\}$ و J یاپلی‌ماترویدال کوهن- مکالی است یا در شرط (ج) و یا در شرط (د) صدق می‌کند. حال کافی است که نشان دهیم اگر J ایده‌آل ورونزه خالی از مربع باشد، آن‌گاه یا اصلی است یا ورونزه است یا در شرط (ج) صدق می‌کند. اگر $r = 1$، آن‌گاه J ورونزه است. حال فرض کنیم $r > 1$ و $J = p_1^{a_1} \cap \cdots \cap p_r^{a_r}$ ایده‌آل ورونزه خالی از مربعی باشد که اصلی نیست. همچنین فرض

کنیم به ازای $i, j \in [r]$ای با فرض $i \neq j$، داریم $p_i + p_j \neq m$. در ادامه برای سهولت فرض می‌کنیم J ایده‌آل ورونزه خالی از مربع از درجهٔ t با متغیرهای $x_1,\dots,x_h$ باشد و $p_i + p_j = (x_1,\dots,x_f) \neq m$ که در آن $f \le h$ عدد طبیعی $k > 1$ را در نظر می‌گیریم. از [لم ۵٫۱، ۵] داریم.

$$L := I^k(p_i + p_j) = (I(p_i + p_j))^k = J^k(p_i + p_j) = I_{(tk;k,\dots,k)}(p_i + p_j) = I_{(tk-(h-f)k;k,\dots,k)}.$$

از این‌که I^k پلی‌ماترویدال کوهن- مکالی تعمیم یافته است از [نتیجهٔ ۳٫۲، ۵] داریم L پلی‌ماترویدال کوهن- مکالی است. بنابراین از گزارهٔ ۱۸نتیجه می‌شود که L یا ایده‌آل اصلی یا ایده‌آل ورونزه یا ایده‌آل ورونزه خالی از مربع است. اگر L اصلی باشد، آن‌گاه $tk-(h-f)k = fk$ و لذا $t = h$. بنابراین J ایده‌آلی اصلی است که تناقض است. از طرفی از این‌که $k > 1$، L نمی‌تواند ورونزه خالی از مربع باشد. در نهایت فرض کنیم L ایده‌آل ورونزه باشد، آن‌گاه $tk-(h-f)k = k$و لذا $f = h-t+1$. بنابراین از [گزارهٔ ۵٫۲، ۵] نتیجه می‌شود که $p_i + p_j \in Ass(\frac{S}{J})$ که تناقض است.

حال برای اثبات عکس قضیه، با توجه به گزارهٔ ۲۰، هر یک از شرایط (الف)، (ب)، (ج)، یا (د) نتیجه می‌دهد که I پلی‌ماترویدال است. لذا از[قضیهٔ ۵٫۳، ۲] داریم به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ I^k پلی‌ماترویدال است. فرض کنیم $p \neq m$ یک ایده‌آل اول و $k \in \mathbb{N}$، لذاداریم

$$I^k(p) = (I(p))^k = (J(p))^k = J^k(p).$$

- اگر (الف) برقرار باشد، آن‌گاه $I^k(p)$ اصلی است و لذا $I^k(p)$کوهن- مکالی است.
- اگر (ب) برقرار باشد، $I^k(p)$ایده‌آل ورونزه است و لذا $I^k(p)$ کوهن- مکالی است.
- اگر (ج) برقرار باشد، آن‌گاه از این‌که برای هر $i \neq j$، $p_i + p_j = m$، خواهیم داشت $I^k(p) = S$ یا برای $i \in [r]$ای، $I^k(p) = p_i^{ka_i}$. لذا $I^k(p)$ کوهن- مکالی است.
- اگر (د) برقرار باشد، آن‌گاه $J(p) = S$یا $J(p)$ توسط متغیرها تولید می‌شود. لذا $I^k(p)$ کوهن- مکالی است.

References

1. Bandari S., Jafari R.,"On certain equidimensional polymatroidal ideals", Manuscripta Math., 149(1-2) (2016) 223-233.

2. Conca A., Herzog J., "Castelnuovo–Mumford regularity of products of ideals", Collect. Math. 54(2) (2003) 137–152.

3. Herzog J., Hibi T., "Monomial Ideals", Graduate Texts in Mathematics, 260,

Springer-Verlag, London, (2011).

4. Herzog J., Hibi T., "Cohen-Macaulay polymatroidal ideals", European J. Combin., 27(4) (2006) 513-517.

5. Herzog J., Rauf A., Vladoiu M., "The stable set of associated prime ideals of a polymatroidal ideal", J. Algebraic Combin., 37(2) (2013) 289-312.

6. Herzog J., Takayama Y., "Resolutions by mapping cones", Homology, Homotopy Appl., 4(2) (2002) pp. 277-294.

7. Herzog, J., Vladoiu, M."Monomial ideals with primary components given by powers of monomial prime ideals", Electron. J. Comb., 21(1) (2014), # P1.69.

8. Mohammadi F., Moradi S., "Weakly polymatroidal ideals with applications to vertex cover ideals", Osaka J. Math., 47 (2010) 627-636.