



Khurasani University

The Legendre-Picard Iteration Method for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind

M. Tafakkori-Bafghi ¹, M. Heydari ², G.B. Loghmani ³

1. Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran. E-mail: m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir

2. Corresponding Author, Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran.

E-mail: m.heydari@yazd.ac.ir

3. Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran. E-mail: loghmani@yazd.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 12 October 2020

Received in revised form:

15 June 2021

Accepted: 23 January 2023

Published online:

29 February 2024

Introduction

The theory and applications of integral equations have been the subject of many researches during the last decades. Fredholm integral equations have been widely used in applied science such as engineering and physics. In recent years, methods based on orthogonal basis functions, including collocation, Tau and Galerkin methods with Jacobi, Legendre and Chebyshev polynomials have attracted the attention of mathematicians. The most important advantage of using orthogonal basis functions is simplifying the mentioned methods by solving a linear/nonlinear algebraic system. But solving algebraic systems is time-consuming, especially in nonlinear problems. This study presents an efficient iterative semi-analytical method by employing the shifted Legendre polynomials for solving the Fredholm integral equations of the second kind.

Material and Methods

The proposed method is based on the Picard iteration method, the shifted Legendre polynomials, and the shifted Legendre-Gauss integration rule. According to the orthogonal property of Legendre polynomials, the proposed method uses an iterative scheme to update the coefficients of the series of approximate solution. Also, a vector-matrix form is introduced to increase the efficiency and reduce the computational time. The numerical results clearly indicate the feasibility and the accuracy of the proposed technique.

Results and discussion

In order to examine the validity of the proposed method, we employed it to find the numerical solution of several Fredholm integral equations of the second kind. The results for six examples are reported in this section. Also, a comparison study between the proposed iterative method and other existing methods is provided. The obtained numerical results show the accuracy and efficiency of the iterative method.

Conclusion

In this paper, we presented the Legendre-Picard iteration method for the numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind. To obtain this method, the Picard iteration scheme, the shifted Legendre polynomials and the shifted Legendre-Gauss quadrature formula play a fundamental role. The proposed method

-
- basically, is an iterative method, that we can implement easily and attain more accurate approximate solutions with higher iteration.
 - does not require integral computations, because the integration of the shifted Legendre polynomials is calculated analytically with an iterative formula when the coefficients are updated.
 - unlike spectral methods, does not require solving linear or nonlinear systems of algebraic equations and calculating the inverse of a matrix.
 - in vector-matrix form, implemented significantly faster than in the original iterative form.
-

How to cite: Tafakkori-Bafghi, M., Heydari, M., & Loghmani, G.B. (2023). The Legendre-Picard Iteration Method for The Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Mathematical Researches*, 9 (4), 80 – 110.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University



روش تکرار لزاندر-پیکارد برای حل عددی معادلات انتگرال فردھلم نوع دوم

محمد تفکری بافقی^۱، محمد حیدری^{۲*}، قاسم بریدلقمانی^۳

m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir

۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: m.heydari@yazd.ac.ir

۳. گروه ریاضی، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: loghmani@yazd.ac.ir

اطلاعات مقاله

چکیده

در این مقاله یک روش عددی کارا برای حل معادلات انتگرال فردھلم نوع دوم ارائه شده است. روش پیشنهادی بر اساس روش تکرار پیکارد، چندجمله‌ای‌های لزاندر انتقال‌یافته و قاعده‌ی انتگرال‌گیری لزاندر-گاووس انتقال‌یافته استوار است. با توجه به ویژگی تعامد چندجمله‌ای‌های لزاندر، روش پیشنهادی از یک رابطه‌ی تکراری برای به روزرسانی ضرایب بسط جواب تقریبی استفاده می‌کند. هم‌چنین یک ساختار برداری-ماتریسی برای افزایش کارایی و کاهش زمان محاسباتی روش معرفی می‌گردد. نتایج عددی به‌وضوح قابلیت اجرایی و دقیق روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۲۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۳/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۳

تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:

معادلات انتگرال فردھلم،
چندجمله‌ای‌های لزاندر،
قاعده‌ی انتگرال‌گیری
لزاندر-گاووس،
روش تکرار لزاندر-پیکارد.

استناد: تفکری بافقی، محمد؛ حیدری، محمد؛ و بریدلقمانی، قاسم (۱۴۰۲). روش تکرار لزاندر-پیکارد برای حل عددی معادلات انتگرال فردھلم نوع دوم.
پژوهش‌های ریاضی، ۹(۴)، ۸۰ - ۱۱۰.



© نویسنده‌ان

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیک، مهندسی، مکانیک سیالات، واکنش‌های الکتروشیمیایی و مدل‌های بیولوژیکی به صورت معادلات انتگرال ظاهر می‌شوند. یکی از مشهورترین آن‌ها، معادله‌ی انتگرال فردھلم نوع دوم است. در اینجا دو حالت خطی و غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

- حالت خطی:

$$u(x) = f(x) + \int_{\Lambda} K(x, t)u(t)dt, \quad x \in \Lambda = [a, b], \quad (1)$$

- حالت غیرخطی:

$$u(x) = f(x) + \int_{\Lambda} K(x, t)F(u(t))dt, \quad x \in \Lambda = [a, b], \quad (2)$$

که در آن $K(x, t) \in L^r(\Lambda \times \Lambda)$ و $f(x) \in L^r(\Lambda)$

معمولأً حل این معادلات از نظر تحلیلی دشوار است. تاکنون روش‌های بسیاری با رویکردهای عددی و نیمه‌تحلیلی برای حل آن‌ها ارائه شده است؛ از قبیل روش‌های نیستروم [۱]، قضیه‌ی مقدار میانی وزن دار [۲]، تربیع [۳]، موجک‌های چبیشف، لزاندر و هار [۴]، عناصر متناهی [۵]، تقریب کمترین مربعات [۶]، توابع بلاک-پالس [۷]، توابع پایه‌ای شعاعی [۸]، توابع کلاهی [۹]، تجزیه‌ی آدمیان [۱۰]، تکرار وردشی [۱۱]، اختلال هموتوپی [۱۲]، آنالیز هموتوپی [۱۳]، برون‌یابی [۱۴]، توابع سینک [۱۵]، چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۱۶]، توابع اسپلاین و بی-اسپلاین [۱۷] وغیره.

در سال‌های اخیر، روش‌های مبتنی بر توابع پایه‌ای متعامد، از جمله روش‌های هم محلی، تاو و گالرکین با چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، لزاندر و چبیشف مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است [۱۸-۲۰]. مهم‌ترین مزیت استفاده از توابع پایه‌ای متعامد، ساده‌سازی روش‌های ذکر شده به صورت حل یک دستگاه جبری خطی/غیرخطی است؛ اما حل دستگاه‌های جبری به‌ویژه در مسائل غیرخطی، زمان‌بر است.

هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش نیمه‌تحلیلی برای حل معادله‌ی انتگرال فردھلم نوع دوم با ترکیبی از روش تکرار پیکارد، چندجمله‌ای‌های لزاندر انتقال‌یافته و قاعده‌ی انتگرال گیری لزاندر-گاووس است. در روش پیشنهادی برای محاسبه‌ی قسمت انتگرالی معادله، از ویژگی تعامل چندجمله‌ای‌های لزاندر استفاده کرده و ضرایب بسط جواب تقریبی که به صورت یک سری قطع شده است، در هر مرحله به‌روزرسانی می‌شود. در ادامه برای افزایش سرعت محاسباتی روش، یک نمایش برداری-ماتریسی نیز ارائه می‌گردد، که کارایی روش پیشنهادی را به‌قدر قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد.

روند مقاله به‌شرح زیر است: در بخش ۱، روش تکرار پیکارد و ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های لزاندر انتقال‌یافته شرح داده شده است. فرمول‌بندی روش تکرار لزاندر-پیکارد در بخش ۲ ارائه می‌گردد. به‌منظور افزایش بهره‌وری و کاهش زمان محاسباتی، ساختار برداری-ماتریسی روش پیشنهادی در بخش ۳ به‌دست آورده شده است. بخش ۴ به تحلیل همگرایی روش

تکرار لزاندر-پیکارد اختصاص دارد. در بخش ۵ برای نشان دادن دقیق و کارایی روش پیشنهادی، چند مثال عددی بررسی شده است. این پژوهش در بخش ۶ با بیان ویژگی‌های روش و نتیجه‌گیری پایان می‌یابد.

۱. پیش‌نیازها

در این بخش برخی پیش‌نیازهای ریاضی، قضایا و روش‌هایی را بیان می‌کنیم که در بخش‌های بعدی این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ روش تکرار پیکارد

روش تقریب‌های متوالی (تکرار پیکارد)، یکی از مشهورترین روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات انتگرال است. دنباله‌ی روش تکرار پیکارد برای حل معادله انتگرال فردھلم خطی نوع دوم (۱) و (۲) به ترتیب به صورت‌های زیر است:

$$u^i(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u^{i-1}(t)dt, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (۱)$$

$$u^i(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)F(u^{i-1}(t))dt, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (۲)$$

پیکارد نشان داد که با درنظر گرفتنتابع تقریبی آغازین مناسب $\{u_i(x)\}_{i=0}^\infty$ ، تحت شرایط مناسب به جواب $u(x)$ همگرا است [۲۱]. لازم به ذکر است در صورتی که انتگرالde (۳) غیرخطی باشد، محاسبه‌ی انتگرال نظری ممکن است بسیار پیچیده یا زمان بر شود. از این رو، رفع این چالش موضوع مورد علاقه‌ی برخی پژوهشکران است [۲۲-۲۳].

۲.۱ چندجمله‌ای‌های لزاندر انتقال یافته

چندجمله‌ای‌های لزاندر، دسته‌ای از چندجمله‌ای‌های متعدد هستند که توسط ریاضیدان فرانسوی، ادین-ماری لزاندر^۱ معرفی شدند. این چندجمله‌ای‌ها که با $L_n(\tau)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ نشان داده می‌شوند، جواب‌های مسئله‌ی اشتروم-لیوویل تکین

$$(1 - \tau^r)L_n''(\tau) - 2\tau L_n'(\tau) + n(n+1)L_n(\tau) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (۴)$$

و حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به صورت

$$L_n(\tau) = J_n(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in I = [-1, 1], \quad (۵)$$

هستند [۲۴]. فرمول رودریگز چندجمله‌ای‌های لزاندر به صورت زیر است:

^۱ Adrien-Marie Legendre

$$L_n(\tau) = \frac{1}{\tau^n n!} \frac{d^n}{d\tau^n} [(\tau - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان از رابطه‌ی بازگشتی زیر نیز به دست آورد:

$$L_{n+1}(\tau) = \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \tau L_n(\tau) - \left(\frac{n}{n+1} \right) L_{n-1}(\tau), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

که در آن $L_0(\tau) = \tau$ و $L_1(\tau) = 1$

лем ۱.۱ [۲۴] چندجمله‌ای‌های لزاندر در ویژگی‌های زیر صدق می‌کنند:

$$(i) \quad L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad (18)$$

$$(ii) \quad L_n(\tau) = \frac{1}{\tau^{n+1}} (L'_{n+1}(\tau) - L'_{n-1}(\tau)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

چندجمله‌ای‌های لزاندر $L_n(\tau)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ روی I , نسبت به تابع وزن $w(\tau)$ یک دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند و داریم:

$$\int_I L_n(\tau) L_m(\tau) d\tau = \left(\frac{2}{n+1} \right) \delta_{nm}, \quad (9)$$

که در آن δ_{nm} تابع دلتای کرونکر است. با تغییر متغیر $\tau \in I$, $\tau = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}$ به $x \in \Lambda$ انتقال می‌یابد. بر این اساس، چندجمله‌ای‌های لزاندر انتقال یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_n^*(x) = L_n \left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a} \right), \quad x \in \Lambda. \quad (10)$$

مطلوب با (7) رابطه‌ی بازگشتی سه‌جمله‌ای زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} L_0^*(x) = 1, \\ L_1^*(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}, \\ L_{n+1}^*(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a} \right) L_n^*(x) - \left(\frac{n}{n+1} \right) L_{n-1}^*(x), \quad n = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (11)$$

مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های لزاندر انتقال یافته‌ی Λ , نسبت به تابع وزن $w(x)$ یک دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند. از این‌رو با توجه به (9) و (10) داریم:

$$\int_{\Lambda} L_n^*(x) L_m^*(x) dx = \left(\frac{b-a}{2n+1} \right) \delta_{nm}. \quad (12)$$

بنابراین به ازای هر $f(x) \in L_w^r(\Lambda)$ می‌توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i L_i^*(x), \quad (13)$$

$$f_i = \left(\frac{2i+1}{b-a} \right) \int_a^b f(x) L_i^*(x) dx, \quad i=0,1,2,\dots \quad (13b)$$

با استفاده از قاعده‌ی انتگرال گیری لزاندر-گاووس انتقال یافته، می‌توان (13b) را به صورت زیر به دست آورد [۶۴]:

$$f_i = \left(\frac{2i+1}{2} \right) \sum_{j=0}^N f(x_j) L_i^*(x_j) \omega_j, \quad i=0,1,\dots,N, \quad (14)$$

که در آن

$$x_j = \frac{b-a}{2} \tau_j + \frac{b+a}{2}, \quad j=0,1,\dots,N, \quad (15)$$

و $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ ریشه‌های $L_{N+1}(\tau)$ هستند. وزن‌های $\{\omega_j\}_{j=0}^N$ متناظر هستند که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند [۶۴]:

$$\omega_j = \frac{2}{(1-\tau_j)[L'_{N+1}(\tau_j)]^2}, \quad j=0,1,\dots,N. \quad (16)$$

در این صورت سری تقریب لزاندر-گاووس انتقال یافته‌ی مرتبه‌ی N -ام تابع $f(x)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{I}_N f(x) = \sum_{i=0}^N \tilde{f}_i L_i^*(x), \quad \tilde{f}_i = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j=0}^N f(x_j) L_i^*(x_j) \omega_j, \quad i=0,1,\dots,N, \quad (17)$$

که در آن

$$\gamma_i = \frac{2}{2i+1}, \quad i=0,1,\dots,N. \quad (18)$$

۲. فرمول‌بندی روش تکرار لزاندر-پیکارد

در این بخش، روش تکرار لزاندر-پیکارد را برای حل معادلات انتگرال فردholm خطی و غیرخطی (۱) و (۲) به دست می‌آوریم.

۱.۰ حالت خطی

دباله‌ی روش تکرار پیکارد برای حل (۱) را در نظر بگیرید:

$$u^i(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) u^{i-1}(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

که در آن، $u^i(x)$ تابع تقریب آغازین است و معمولاً $f(x)$ در نظر گرفته می‌شود. نخستین گام روش تکرار لژاندر-پیکارد، تقریب توابع $f(x)$ و $K(x,t)$ با استفاده از $\{L_r^*(x)\}_{r=1}^N$ است. با توجه به (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$f(x) \approx \sum_{r=1}^N \tilde{f}_r L_r^*(x), \quad \tilde{f}_r = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=1}^N f(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

$$K(x,t) \approx \sum_{r=1}^N \sum_{n=1}^N \tilde{k}_m L_r^*(x) L_n^*(t), \quad (21)$$

$$\tilde{k}_m = \frac{1}{\gamma_r \gamma_n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N K(x_l, t_j) L_r^*(x_l) L_n^*(t_j) \omega_l \omega_j, \quad r, n = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

که در آن

$$x_j = t_j = \frac{b-a}{2} \tau_j + \frac{b+a}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (23)$$

$$\text{و } \{\tau_j\}_{j=1}^N \text{ در (۱۵) تعریف شده‌اند. با جای‌گذاری (۲۰) و (۲۱) در (۱۹) داریم:}$$

$$u^i(x) = \sum_{r=1}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \int_a^b \left(\sum_{r=1}^N \sum_{n=1}^N \tilde{k}_m L_r^*(x) L_n^*(t) \right) u^{i-1}(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

با فرض این‌که تقریب آغازین و جواب‌های تقریبی در مرحله‌ی $(i-1)^{\text{ام}}$ و $i^{\text{ام}}$ بهترتیب با $u^i(x)$ و $u^{i-1}(x)$ نشان داده شود، داریم:

$$u^i(x) \approx \sum_{r=1}^N \tilde{u}_r L_r^*(x), \quad \tilde{u}_r = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=1}^N u^i(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (25)$$

$$u^{i-1}(x) \approx \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^{i-1} L_k^*(x), \quad (26)$$

$$u^i(x) \approx \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^i L_k^*(x). \quad (27)$$

هدف، به دست آوردن ضرایب $\{\tilde{u}_k^i\}_{k=1}^N$ است که جواب تقریبی معادله‌ی (۱۹) را در تکرار $i^{\text{ام}}$ تولید می‌کند. با جای‌گذاری (۲۶) و (۲۷) در (۲۴) داریم:

$$\sum_{r=1}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=1}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \int_a^b \left(\sum_{r=1}^N \sum_{n=1}^N \tilde{k}_m L_r^*(x) L_n^*(t) \right) \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^{i-1} L_k^*(t) dt. \quad (24)$$

در نتیجه

$$\sum_{r=1}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=1}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \sum_{r=1}^N \sum_{n=1}^N \tilde{k}_m L_r^*(x) \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^{i-1} \int_a^b L_n^*(t) L_k^*(t) dt. \quad (25)$$

با توجه به ویژگی تعامد (۱۲) داریم:

$$\sum_{r=1}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=1}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \sum_{r=1}^N \sum_{n=1}^N \tilde{k}_m L_r^*(x) \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^{i-1} \left(\frac{b-a}{\gamma} \right) \gamma_r \delta_{kn}. \quad (26)$$

بعد از سادهسازی داریم:

$$\sum_{r=1}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=1}^N \left[\tilde{f}_r + \left(\frac{b-a}{\gamma} \right) \sum_{n=1}^N \tilde{k}_m \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{kn} \right] L_r^*(x). \quad (27)$$

حال ضرایب $\{\tilde{u}_k^i\}_{k=1}^N$ مستقیماً از برابر هم قرار دادن ضرایب چندجمله‌ای‌های لزاندر انتقال یافته در طرفین (۲۷) به صورت

زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left(\frac{b-a}{\gamma} \right) \sum_{n=1}^N \tilde{k}_m \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{kn}, \quad r = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (28)$$

با بسط سری‌های (۲۸) و تعریف تابع دلتای کرونکر داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^i &= \tilde{f}_r + \frac{b-a}{\gamma} \left(\tilde{k}_r \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{k,r} + \tilde{k}_{r1} \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{k,1} + \dots + \tilde{k}_{rN} \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{k,N} \right) \\ &= \tilde{f}_r + \frac{b-a}{\gamma} \left(\tilde{k}_r \tilde{u}_1^{i-1} \gamma_1 + \tilde{k}_{r1} \tilde{u}_1^{i-1} \gamma_1 + \dots + \tilde{k}_{rN} \tilde{u}_N^{i-1} \gamma_N \right), \quad r = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (29)$$

بعد از دسته‌بندی جملات، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left(\frac{b-a}{\gamma} \right) \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{rj} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j, \quad r = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (30)$$

به این ترتیب، فرمول ضرایب بسط جواب تقریبی در تکرار $i-1$ -ام، با یک ترکیب خطی از ضرایب بسط جواب تقریبی در تکرار

($i-1$ -ام) به دست می‌آید. در این رابطه، ضرایب $\{\tilde{u}_r^i\}_{r=1}^N$ ثابتاند و ضرایب $\{\tilde{k}_{rj}\}_{r=1}^N$ در هر مرحله

به روزرسانی می‌شوند. این روند تا زمانی که شرط توقف معینی برآورده گردد، ادامه می‌یابد. معمولاً از معیار توقف

$$\|u^i(x) - u^{i-1}(x)\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |u^i(x) - u^{i-1}(x)| < \varepsilon, \quad (31)$$

استفاده می شود که در آن ϵ ، دقت داده شده است. الگوریتم ۱ گامهای روش تکرار لزاندر-پیکارد را در حالت خطی نشان می دهد.

الگوریتم ۱ نمایش تکراری روش تکرار لزاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردヘルم خطی نوع دوم

و و دی: a, b ، تابع $f(x)$ ، هسته‌ی $K(x, t)$ ، دقت ϵ ، تقریب اولیه‌ی $u^0(x) = 0$ و $N \in \mathbb{N}$

۱: توابع پایه‌ای $\{L_k^*(x)\}_{k=0}^N$ را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.

۲: نقاط گرهی $\{x_j\}_{j=0}^N$ و وزن‌های نظری $\{t_j\}_{j=0}^N$ را به ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.

۳: محاسبه کن

$$\gamma_r = \frac{2}{r+1}, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad : ۴$$

$$\tilde{f}_r = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N f(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad : ۵$$

$$\tilde{k}_{rn} = \frac{1}{\gamma_r \gamma_n} \sum_{l=0}^N \sum_{j=0}^N K(x_l, t_j) L_r^*(x_l) L_n^*(t_j) \omega_l \omega_j, \quad r, n = 0, 1, \dots, N \quad : ۶$$

$$\tilde{u}_r^i = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N u^0(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad : ۷$$

برای $i = 1, 2, \dots$ انجام بده

$$m := m + i \quad : ۸$$

$$\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left(\frac{b-a}{\gamma_r} \right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{rj} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad : ۹$$

$$u^i(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) \quad : ۱۰$$

اگر $\epsilon < \|u^i(x) - u^{i-1}(x)\|_\infty$ ، آن‌گاه

خروج

پایان (الگوریتم)

پایان (برای)

خروجی: $u(x) \simeq \sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^m L_r^*(x)$

ملاحظه ۱.۲. در روند روش تکرار لزاندر-پیکارد، نیازی به تقریب سری تیلور، مشتق‌گیری عددی یا حل دستگاه معادلات خطی/غیرخطی نیست و تنها با یک دنباله‌ی تکراری از ضرایب تقریب‌ها به جواب مطلوب می‌رسیم. بنابراین سرعت اجرای روش، قابل قبول است و می‌توان در الگوریتم، مقادیر بزرگ‌تر N را برای به دست آوردن تقریب‌های بهتر نیز در نظر گرفت.

ملاحظه ۲.۲. با یک فرآیند مشابه، روش تکرار لزاندر-پیکارد را می‌توان برای حل دستگاه معادلات انتگرال فردヘルم نیز به کار برد. جزئیات آن به خوانندگان علاقه‌مند و اگذار می‌شود.

۲.۲ حالت غیرخطی

دنباله‌ی پیکارد متناظر برای معادله‌ی انتگرال (۲) به صورت زیر است:

$$u^i(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) F(u^{i-1}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots \quad (۳۲)$$

با جای‌گذاری (۲۰) و (۲۱) در (۳۲) داریم:

$$u^i(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \int_a^b \sum_{r=0}^N \sum_{n=0}^N (\tilde{k}_{rn} L_r^*(x) L_n^*(t)) F(u^{i-1}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots \quad (۳۳)$$

حال با جای‌گذاری (۲۲) و (۲۳) در (۳۳) داریم:

$$\sum_{r=1}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=1}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \int_a^b \left(\sum_{r=1}^N \sum_{n=1}^N \tilde{k}_m L_r^*(x) L_n^*(t) \right) \sum_{k=1}^N \tilde{F}_k^{i-1} L_k^*(t) dt, \quad (34)$$

که در آن

$$\tilde{F}_r^{i-1} = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=1}^N F(u^{i-1}(t_j)) L_r^*(t_j) \omega_j, \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (35)$$

در این صورت داریم:

$$\sum_{r=1}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=1}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \sum_{r=1}^N \sum_{n=1}^N \tilde{k}_m L_r^*(x) \sum_{k=1}^N \tilde{F}_k^{i-1} \int_a^b L_n^*(t) L_k^*(t) dt. \quad (36)$$

حال مشابه با روند (۲۶)- (۲۹) بعد از ساده‌سازی و دسته‌بندی جملات، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left(\frac{b-a}{2} \right) \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{rj} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

که در آن ضرایب $\{\tilde{F}_j^{i-1}\}_{j=1}^N$ ثابت‌اند و ضرایب $\{\tilde{k}_{rj}\}_{r,j=1}^N$ به روزرسانی می‌شوند.

الگوریتم ۲ گام‌های روش تکرار لزاندر-پیکارد را در حالت غیرخطی نشان می‌دهد.

الگوریتم ۲ نمایش تکراری روش تکرار لزاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردヘルم غیرخطی نوع دوم

وروودی: $a, b, a, f(x),$ تابع $f(x),$ هسته‌ی $K(x, t),$ دقت $\epsilon,$ تقریب اولیه‌ی $u^0(x)$ و $N \in \mathbb{N}$

- ۱: توابع پایه‌ای $\{L_k^*(x)\}_{k=1}^N$ را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.
- ۲: نقاط گرهی $\{x_j\}_{j=1}^N$ و وزن‌های نظیر $\{\omega_j\}_{j=1}^N$ را به ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.
- ۳: محاسبه کن

$$\gamma_r = \frac{\tau}{\tau r + 1}, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad (4)$$

$$\tilde{f}_r = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N f(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad (5)$$

$$\tilde{k}_m = \frac{1}{\gamma_r \gamma_m} \sum_{l=0}^N \sum_{j=0}^N K(x_l, t_j) L_r^*(x_l) L_m^*(t_j) \omega_l \omega_m, \quad r, m = 0, 1, \dots, N \quad (6)$$

$$\tilde{u}_r^0 = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N u^0(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad (7)$$

برای انجام بده $i = 1, 2, \dots, N$

$$m := m + i \quad (8)$$

$$\tilde{F}_r^{i-1} = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N F(u^{i-1}(t_j)) L_r^*(t_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad (9)$$

$$\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left(\frac{b-a}{\tau} \right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{rj} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j, \quad r = 0, 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

$$u^i(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) \quad (11)$$

اگر $\|u^i(x) - u^{i-1}(x)\|_\infty < \epsilon$ آن‌گاه

خروج

پایان (الگوریتم)

پایان (برای خروجی): $u(x) \simeq \sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^m L_r^*(x)$

۳. ساختار برداری-ماتریسی

از آنجایی که محاسبه‌ی جمله به جمله‌ی ضرایب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به‌ازای N ‌های بزرگ قدری زمان بر است، در این بخش یک نمایش فشرده‌ی برداری-ماتریسی برای افزایش کارایی روش تکرار لژاندر-پیکارد ارائه می‌دهیم. برای این‌منظور، ضرایب جواب تقریبی $(x^i)^T$ را به‌صورت برداری زیر درنظر می‌گیریم:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i = \left[\tilde{u}_1^i, \tilde{u}_2^i, \dots, \tilde{u}_N^i \right]^T. \quad (38)$$

همچنین مقادیر جواب تقریبی تکرار i -ام به‌ازای نقاط گرهی (۱۵) را به‌صورت برداری زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}^i = \left[u^i(x_1), u^i(x_2), \dots, u^i(x_N) \right]^T. \quad (39)$$

لهم برای $j=1, 2, \dots, N$ داریم:

$$L_n^*(x_j) = L_n(\tau_j).$$

برهان. با توجه به تعریف (۱۰)، به‌آسانی ثابت می‌شود.

باتوجه به (۲۳ج) و لем ۱.۳، بردار \mathbf{u}^i را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^i &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^i L_1^*(x_1) + \tilde{u}_2^i L_1^*(x_2) + \dots + \tilde{u}_N^i L_1^*(x_N) \\ \tilde{u}_1^i L_2^*(x_1) + \tilde{u}_2^i L_2^*(x_2) + \dots + \tilde{u}_N^i L_2^*(x_N) \\ \vdots \\ \tilde{u}_1^i L_N^*(x_1) + \tilde{u}_2^i L_N^*(x_2) + \dots + \tilde{u}_N^i L_N^*(x_N) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_1^*(x_1) & L_1^*(x_2) & \cdots & L_1^*(x_N) \\ L_2^*(x_1) & L_2^*(x_2) & \cdots & L_2^*(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_N^*(x_1) & L_N^*(x_2) & \cdots & L_N^*(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^i \\ \tilde{u}_2^i \\ \vdots \\ \tilde{u}_N^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_1(\tau_1) & L_1(\tau_2) & \cdots & L_1(\tau_N) \\ L_2(\tau_1) & L_2(\tau_2) & \cdots & L_2(\tau_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_N(\tau_1) & L_N(\tau_2) & \cdots & L_N(\tau_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^i \\ \tilde{u}_2^i \\ \vdots \\ \tilde{u}_N^i \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{u}}^i, \end{aligned} \quad (40)$$

که در آن

$$\mathbf{C}_u = \begin{bmatrix} L_1(\tau_1) & L_1(\tau_1) & \cdots & L_N(\tau_1) \\ L_1(\tau_2) & L_1(\tau_2) & \cdots & L_N(\tau_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(\tau_N) & L_1(\tau_N) & \cdots & L_N(\tau_N) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

یک ماتریس ثابت و مستقل از \mathbf{a} و \mathbf{b} است. حال روش تکرار لزاندر-پیکارد را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱.۳ حالت خطی

بر اساس (۳۰)، بردار $\tilde{\mathbf{u}}^i$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^i \\ \tilde{u}_2^i \\ \vdots \\ \tilde{u}_N^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 + \left(\frac{b-a}{\gamma} \right) \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{1j} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \\ \tilde{f}_1 + \left(\frac{b-a}{\gamma} \right) \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{2j} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \\ \vdots \\ \tilde{f}_N + \left(\frac{b-a}{\gamma} \right) \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{Nj} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_N \end{bmatrix} + \frac{b-a}{\gamma} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{1j} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \\ \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{2j} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{Nj} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{\gamma} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}}^{i-1}, \quad (42)$$

که در آن

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \cdots & \tilde{k}_{1N} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \cdots & \tilde{k}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{k}_{N1} & \tilde{k}_{N2} & \cdots & \tilde{k}_{NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \gamma_2 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \gamma_N \end{bmatrix}. \quad (43)$$

بدین صورت بردار ضرایب جواب تقریبی $\tilde{\mathbf{u}}^i$ بر اساس بردار ضرایب $\tilde{\mathbf{u}}^{i-1}$ به دست می‌آید. مشابه با نمایش تکراری روش تکرار لزاندر-پیکارد، بردار ضرایب $\tilde{\mathbf{u}}^i$ تا برقراری شرایط معینی بروزرسانی می‌شود. معیار توقف را به صورت

$$\|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u^i(x_j) - u^{i-1}(x_j)| < \varepsilon, \quad (44)$$

یا

$$\|\tilde{\mathbf{u}}^i - \tilde{\mathbf{u}}^{i-1}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |\tilde{u}_j^i - \tilde{u}_j^{i-1}| < \varepsilon, \quad (45)$$

در نظر می‌گیریم، که در آن ε دقیق داده شده است. الگوریتم ۳ گام‌های نمایش برداری-ماتریسی روش تکرار لزاندر-پیکارد را در حالت خطی نشان می‌دهد.

الگوریتم ۳ نمایش برداری-ماتریسی روش تکرار لزاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردھلم خطی نوع دوم

ورودی: a, b , تابع $f(x)$, هسته‌ی $K(x, t)$, دقت ϵ , تقریب اولیه‌ی $u^0(x)$ و $N \in \mathbb{N}$

۱: توابع پایه‌ای $\{L_k^*(t)\}_{k=0}^N$ را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.

۲: نقاط گرهی $\{x_j\}_{j=0}^N$ و وزن‌های نظیر $\{\omega_j\}_{j=0}^N$ را به ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.

۳: تعریف کنید $\mathbf{u}^0 = [u^0(x_0), u^0(x_1), \dots, u^0(x_N)]^T$.

۴: بردار $\tilde{\mathbf{f}}$ و ماتریس‌های $\tilde{\mathbf{K}}$ و \mathbf{G} را به ترتیب با توجه به (۴۳) تعریف کنید.

۵: برای $i = 1, 2, \dots$ انجام بده

$$m := m + i$$

۶: بردار ضرایب را با توجه به $\tilde{\mathbf{u}}^i = \tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{2} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}}^{i-1}$ محاسبه کنید.

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{C}_0 \tilde{\mathbf{u}}^i$$

۷: محاسبه کنید $\|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}\|_\infty < \epsilon$ آن‌گاه

۸: خروج

۹: پایان (اگر)

۱۰: پایان (برای)

۱۱: خروجی: $u(x) \simeq \sum_{r=0}^N \mathbf{u}_r^m L_r^*(x)$

ملاحظه ۱، ۲. چون بردار $\tilde{\mathbf{f}}$ و ماتریس‌های ضرایب $\tilde{\mathbf{K}}$ و \mathbf{G} در هر تکرار ثابت‌اند، می‌توانیم آن‌ها را تنها یک مرتبه قبل از حلقه‌ی الگوریتم محاسبه نماییم؛ بنابراین ساختار برداری-ماتریسی روش از نظر محاسباتی سریع‌تر از نمایش تکراری استاندارد است.

۲.۳ حالت غیرخطی

در این حالت نخست مشابه با روند (۴۱)-(۳۸) عمل می‌کنیم. سپس با توجه به (۳۷) بردار $\tilde{\mathbf{u}}^i$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i = \begin{bmatrix} \tilde{u}_0^i \\ \tilde{u}_1^i \\ \vdots \\ \tilde{u}_N^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{j,0} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j \\ \tilde{f}_1 + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{1,j} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j \\ \vdots \\ \tilde{f}_N + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{N,j} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j \end{bmatrix}. \quad (46)$$

مشابه با روند (۴۲)، بعد از ساده‌سازی داریم:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i = \tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{2} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}}^{i-1}, \quad (47)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{f}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$ و \mathbf{G} در (۴۳) تعریف شده‌اند و

$$\tilde{\mathbf{F}}^{i-1} = [\tilde{F}_0^{i-1}, \tilde{F}_1^{i-1}, \dots, \tilde{F}_N^{i-1}]^T = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}_u^T \mathbf{W} \mathbf{F}^{i-1}, \quad (48)$$

که در آن

$$\mathbf{F}^{i-1} = \left[F(\mathbf{u}_1^{i-1}), F(\mathbf{u}_2^{i-1}), \dots, F(\mathbf{u}_N^{i-1}) \right]^T.$$

بدین صورت بردار ضرایب جواب تقریبی $\tilde{\mathbf{u}}^i$ به دست می‌آید. با این فرمول، الگوریتم حالت غیرخطی را می‌توان مشابه با الگوریتم ۳ به صورت زیر نوشت.

الگوریتم ۴ نمایش برداری-ماتریسی روش تکرار لزاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردھلم غیرخطی نوع دوم

ورودی: a, b ، تابع $f(x)$ ، تابع $F(x)$ ، دقت ϵ ، هسته‌ی $K(x, t)$ ، $m = 0$ و $N \in \mathbb{N}$

۱: توابع پایه‌ای $\{L_k^*(t)\}_{k=0}^N$ را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.

۲: نقاط گرهی $\{t_j\}_{j=0}^N$ و وزن‌های نظری $\{\omega_j\}_{j=0}^N$ را به ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.

۳: تعریف کنید $\mathbf{u}^0 = [u^0(x_0), u^0(x_1), \dots, u^0(x_N)]^T$.

۴: بردار $\tilde{\mathbf{f}}$ و ماتریس‌های $\tilde{\mathbf{K}}$ و \mathbf{G} را به ترتیب با توجه به (۴۳) تعریف کنید.

۵: برای $i = 1, 2, \dots$ انجام بده

۶: $m := m + i$

$$\mathbf{F}^{i-1} = [F(\mathbf{u}_1^{i-1}), F(\mathbf{u}_2^{i-1}), \dots, F(\mathbf{u}_N^{i-1})]^T$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{i-1} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{W} \mathbf{F}^{i-1}$$

۷: بردار ضرایب را با توجه به $\tilde{\mathbf{u}}^i = \tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{\tau} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}}^{i-1}$ محاسبه کنید.

۸: $\mathbf{u}^i = \mathbf{C}_{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}^i$

۹: اگر $\epsilon < \|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}\|_{\infty}$ آن‌گاه

۱۰: خروج

۱۱: پایان (اگر)

۱۲: پایان (برای)

۱۳: خروجی: $\mathbf{u}(x) \simeq \sum_{r=0}^N \mathbf{u}_r^m L_r^*(x)$

۴. تحلیل همگرایی روش

به خاطر انباشتگی خطای گرد کردن و استفاده از سری قطع شده لزاندر مرتبه‌ی N در گام‌های روش، نتایج همگرایی روش تکرار لزاندر-پیکارد با روش پیکارد کلاسیک تفاوت دارد. برای حصول همگرایی روش، در این بخش نشان می‌دهیم که روش تکرار لزاندر-پیکارد تحت شرایط مناسب و کافی برای حل عددی معادلات انتگرال فردھلم غیرخطی همگرا خواهد بود.

قضیه ۱.۴. برای معادله‌ی انتگرال (۲)، روش تکرار لزاندر-پیکارد همگراست، هرگاه

$$b - a < \frac{2}{L \|\mathbf{C}_{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{W}\|}, \quad (49)$$

که در آن L ثابت لیپشیتز برای تابع F است.

برهان. از (۴۰)، (۴۷) و (۴۸) داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1} &= \mathbf{C}_u (\tilde{\mathbf{u}}^i - \tilde{\mathbf{u}}^{i-1}) \\
&= \mathbf{C}_u \left[\left(\tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{\gamma} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}}^{i-1} \right) - \left(\tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{\gamma} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}}^{i-1} \right) \right] \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} (\tilde{\mathbf{F}}^{i-1} - \tilde{\mathbf{F}}^{i-1}) \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}_u^T \mathbf{W} (\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-1}) \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_u^T \mathbf{W} (\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-1}) \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \mathbf{Q} (\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-1}),
\end{aligned} \tag{۵۰}$$

که در آن

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_u^T \mathbf{W}. \tag{۵۱}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}\| &= \frac{b-a}{\gamma} \|\mathbf{Q} (\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-1})\| \\
&\leq \frac{b-a}{\gamma} \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-1}\| \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \|\mathbf{Q}\| \max_{1 \leq k \leq N} |F(\mathbf{u}_k^{i-1}) - F(\mathbf{u}_k^{i-1})| \\
&\leq \frac{b-a}{\gamma} \|\mathbf{Q}\| \max_{1 \leq k \leq N} L |\mathbf{u}_k^{i-1} - \mathbf{u}_k^{i-1}| \\
&= \frac{b-a}{\gamma} L \|\mathbf{Q}\| \max_{1 \leq k \leq N} |\mathbf{u}_k^{i-1} - \mathbf{u}_k^{i-1}| \\
&= \frac{b-a}{\gamma} L \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{u}^{i-1} - \mathbf{u}^{i-1}\|,
\end{aligned} \tag{۵۲}$$

که در آن L ثابت لیپشیز تابع F است. حال با استفاده مکرر از (۵۲) داریم:

$$\begin{aligned}
 \|u^i - u^{i-1}\| &\leq \frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \|u^{i-1} - u^{i-\gamma}\| \\
 &\leq \left(\frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \right)^\gamma \|u^{i-\gamma} - u^{i-\gamma}\| \\
 &\leq \left(\frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \right)^{\gamma-1} \|u^{i-\gamma} - u^{i-\gamma}\| \\
 &\leq \dots \\
 &\leq \left(\frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \right)^{i-1} \|u^1 - u^1\|.
 \end{aligned} \tag{۵۳}$$

در نتیجه

$$\|u^i - u^{i-1}\| \leq \left(\frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \right)^{i-1} \|u^1 - u^1\|. \tag{۵۴}$$

حال اگر $\frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| < 1$, آن‌گاه

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u^i - u^{i-1}\| = 0, \tag{۵۵}$$

که برهان را کامل می‌کند.

۵. مثال‌های عددی

در این بخش نتایج حاصل از روش تکرار لزاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردھلم نوع دوم گزارش شده است. الگوریتم‌ها با نرم افزار میپل نسخه‌ی $2016.2a$ با دقت 64 رقم بر روی رایانه‌ی شخصی با پردازنده‌ی چهار هسته‌ای و هشت گیگابایت رم، تحت سیستم عامل ویندوز 7 نسخه‌ی 64 بیتی، بر روی چند مثال اجرا گردیده‌اند. برای ارزیابی دقت روش پیشنهادی، با درنظر گرفتن

$$\begin{aligned}
 L_\gamma &= \|u_{\text{ext}}(x) - u_{\text{app}}(x)\|_\gamma, \\
 L_\infty &= \|u_{\text{ext}}(x) - u_{\text{app}}(x)\|_\infty,
 \end{aligned}$$

که در آن $(x) u_{\text{ext}}$ و $(x) u_{\text{app}}$ به ترتیب جواب‌های دقیق و تقریبی هستند، نتایج به دست آمده را با روش‌های دیگر مقایسه نمودیم.

مثال ۱.۵ معادله‌ی انتگرال خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{12} \int_0^1 \frac{xt-1}{1+x} u(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{۵۶}$$

که در آن $f(x)$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود تا جواب دقیق $u(x) = \sin(x+1)$ بددست آید. با درنظر گرفتن $N = 3$ داریم:

$$\mathbf{C}_u = \begin{bmatrix} 1 & -0.86114 & 0.61233 & -0.30475 \\ 1 & -0.33998 & -0.32662 & 0.41173 \\ 1 & 0.33998 & -0.32662 & -0.41173 \\ 1 & 0.86114 & 0.61233 & 0.30475 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -0.051010 & 0.014441 & 9.2500 \times 10^{-11} & 1.6082 \times 10^{-11} \\ 0.033389 & 0.010327 & -5.7000 \times 10^{-11} & -6.7200 \times 10^{-11} \\ -0.0015643 & -0.0042647 & 1.5000 \times 10^{-11} & -5.2500 \times 10^{-12} \\ -0.0021834 & 0.00018771 & -7.8750 \times 10^{-12} & -1.4700 \times 10^{-11} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0.66667 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0.4000 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0.28571 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 1.5321 \\ 0.37771 \\ -0.036351 \\ -0.0040749 \end{bmatrix}.$$

در این صورت جواب تقریبی روش پیشنهادی بعد از ۲۰ تکرار به صورت زیر بددست می‌آید:

$$u(x) \approx 0.9998 + 1.0040x - 0.0184x^2 - 0.1447x^3. \quad (58)$$

برای بررسی کارایی روش پیشنهادی، جدول ۱ را آمده کرده‌ایم، که ماکریم خطا روش پیشنهادی را به‌ازای مقادیر مختلف N ، نشان می‌دهد. جدول ۲ به مقایسه‌ی زمان محاسباتی حلقه‌ی تکرار f or \mathbf{f} مابین نمایش تکراری و برداری-ماتریسی اختصاص دارد. با ملاحظه نتایج این جدول در می‌باییم که نمایش برداری-ماتریسی روش، به‌قدر قابل ملاحظه‌ای سریع‌تر است؛ بنابراین در مثال‌های بعدی، روش پیشنهادی را با ساختار برداری-ماتریسی اجرا می‌کنیم. خطا مطلق به صورت نقطه به نقطه نیز با خطای حاصل از روش درونیاب اسپلاین طبیعی (NSI) و روش درونیاب شباهاسپلاین (SQI) [۱-۲۵] در جدول ۳ مقایسه شده است. شکل ۱ نمودارهای جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق نظیر را به‌ازای $N = 20$ و $N = 10$ نشان می‌دهد. نمودار لگاریتم خطای حاصل از روش تکرار لزاندر-پیکارد در شکل ۲ به‌ازای مقادیر متفاوت N رسم شده است. جدول‌ها و شکل‌های ارائه شده، دقت و کارایی روش این پژوهش را تأیید می‌کند.

جدول ۱. ماتریس قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$. (تعداد تکرارها = ۲۰)

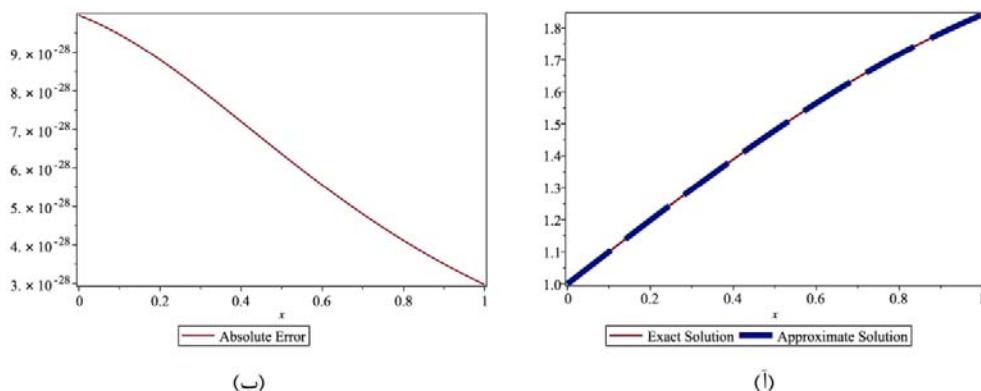
N	Δ	10	15	20	25
L_∞	8.085189×10^{-7}	3.169133×10^{-14}	$4.00111477 \times 10^{-17}$	$9.9845071 \times 10^{-21}$	$8.3579784 \times 10^{-23}$

جدول ۲. مقایسه‌ی زمان محاسباتی (ثانیه) نمایش تکراری (IF) و برداری-ماتریسی (VMF) روش تکرار لزاندر-پیکارد با شرط تعقوف $\epsilon^{-2.5}$.

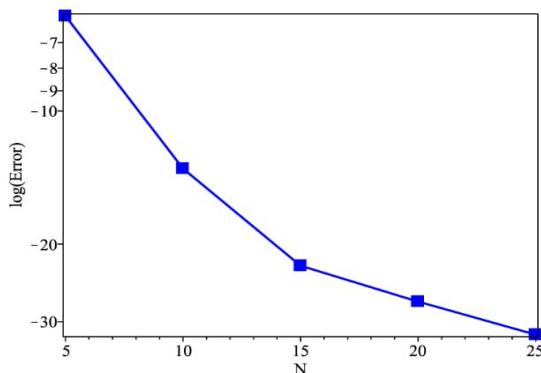
N	ω	10	15	20	25
IF	.766	1.672	2.937	4.828	6.234
VMF	.120	.107	.230	.309	.531

جدول ۳. مقایسه‌ی خطای مطلق نقطه‌ی نقطه‌ی روش پیشنهادی با ۱۰ تکرار و روش‌های ارائه شده در [۲۵].

	NSI[۲۵]	SQI1[۲۵]	SQI2[۲۵]	روش پیشنهادی
X	N = ۲۰	N = ۲۰	N = ۲۰	N = ۲۰
۰.۰	4.6×10^{-4}	5.3×10^{-9}	1.0×10^{-8}	$1.6881394 \times 10^{-12}$
۰.۱	5.0×10^{-4}	1.2×10^{-8}	3.1×10^{-7}	1.643341×10^{-12}
۰.۲	6.1×10^{-4}	2.9×10^{-8}	5.3×10^{-8}	1.492668×10^{-12}
۰.۳	6.5×10^{-4}	4.7×10^{-8}	1.6×10^{-7}	$1.36180.3 \times 10^{-12}$
۰.۴	6.8×10^{-4}	6.4×10^{-8}	2.8×10^{-7}	$1.220.996 \times 10^{-12}$
۰.۵	6.8×10^{-4}	8.0×10^{-8}	3.0×10^{-7}	1.078677×10^{-12}
۰.۶	6.6×10^{-4}	9.5×10^{-8}	2.6×10^{-7}	9.414238×10^{-12}
۰.۷	6.4×10^{-4}	1.0×10^{-7}	1.9×10^{-7}	8.136422×10^{-12}
۰.۸	6.0×10^{-4}	1.2×10^{-7}	1.2×10^{-7}	$6.9777545 \times 10^{-12}$
۰.۹	5.6×10^{-4}	1.3×10^{-8}	6.6×10^{-8}	5.946452×10^{-12}
۱.۰	5.1×10^{-4}	1.0×10^{-9}	2.2×10^{-8}	5.041491×10^{-12}



شکل ۱. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، بهارای $N = 20$ و شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$.



شکل ۲. لگاریتم ماقزیم خطا مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$.

مثال ۲.۵. معادله انتگرال خطی زیر موسوم به لاو^۱ [۲۶]

$$u(x) = 1 + \frac{1}{\pi} (\arctan(x-1) - \arctan(x+1)) - \frac{\delta}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\delta + (x-t)} u(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (59)$$

را درنظر بگیرید، که در آن $\delta = -1$. جواب دقیق این معادله $u(x) = 1$ است. با درنظر گرفتن $N=5$ بعد از ۲۰ تکرار، روش پیشنهادی جواب تقریبی زیر را به دست می‌دهد:

(60)

$$u(x) \approx 1.000 - 4.476 \times 10^{-17} x - 0.0008731 x^3 + 1.891 \times 10^{-126} x^5 + 0.0007964 x^7 - 1.487 \times 10^{-126} x^9.$$

جدول ۴ نشان‌دهنده‌ی خطا مطلق روش ارائه شده در این مقاله به‌ازای مقادیر مختلف N است؛ از طرفی خطا در جدول ۵ با خطا چند روش کارا مقایسه گردیده است. این جدول نشان می‌دهد روش پیشنهادی از روش‌های ارائه شده در [۲۷-۳۳] دقیق‌تر است. شکل ۳ نمودار لگاریتم خطا به‌ازای مقادیر متفاوت N را نشان می‌دهد.

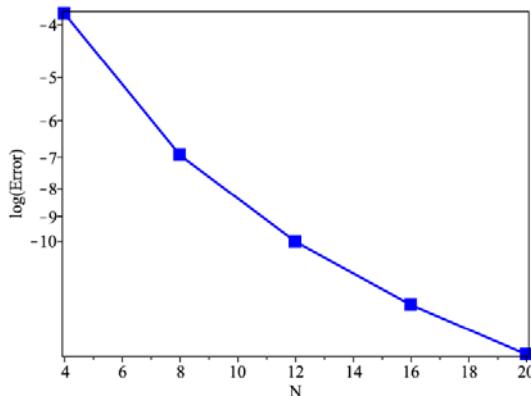
جدول ۴. ماقزیم قدر مطلق خطا روش تکرار لیاندر-پیکارد با شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$. (تعداد تکرارها = ۷۲)

N	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
L_∞	1.540884×10^{-4}	1.138048×10^{-7}	9.486453×10^{-11}	8.080532×10^{-14}	6.949124×10^{-17}

^۱ Love's integral equation

جدول ۵. مقایسهٔ خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$ و روش‌های ارائه شده در [۲۷-۳۳].

روش	L_4
[۲۷] (موجک هار $2M = 32$)	4.45168×10^{-3}
(توابع هار کسری [۲۸]) ($m = 64$)	1.89036×10^{-3}
(موجک هارمونیک [۲۹]) ($M = 32$)	8.24901×10^{-4}
(شبه درونیابی [۳۰]) ($N = 5, d = \dots, 1$)	9.75676×10^{-4}
(موجک هار بهبودیافته [۳۱]) ($2M = 32$)	3.29179×10^{-5}
(نیستروم بهبودیافته [۳۲]) ($N = 32, \gamma = -0.5, h = 1$)	5.16371×10^{-6}
(توابع پایه‌ای مثلثاتی سینوسی [۳۳]) ($d = 16, M = 2, m = 8$)	3.05403×10^{-8}
(تکرار لزاندر-پیکارد) ($N = 10$)	3.27617×10^{-9}
(تکرار لزاندر-پیکارد) ($N = 16$)	8.08053×10^{-14}
(تکرار لزاندر-پیکارد) ($N = 32$)	1.07912×10^{-25}

شکل ۳. لگاریتم ماکریم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$.

مثال ۳.۵. معادلهٔ انتگرال غیرخطی

$$u(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{\Delta} \int_0^1 \cos(\pi x) \sin(\pi t) (u(t))^r dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (61)$$

را که جواب دقیق آن به صورت $u(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{3}(20 - \sqrt{391}) \cos(\pi x)$ است، درنظر بگیرید. با انتخاب $N=5$ ، روش پیشنهادی بعد از ۱۲ تکرار جواب تقریبی زیر را به دست می‌دهد:

$$u(x) \approx 0.7671 + 3.086x + 0.1756x^3 - 7.302x^5 + 4.067x^7 - 0.1774x^9. \quad (62)$$

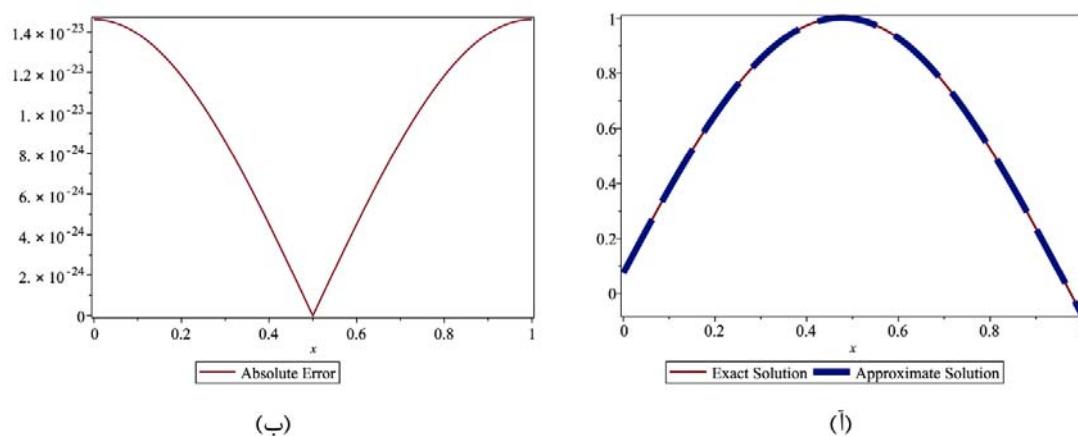
جدول ۶ ماکزیمم خطای مطلق روش تکرار لزاندر-پیکارد را به ازای $N = 5, 10, 15, 20, 25$ نشان می‌دهد. به ازای $N = 10$ خطای مطلق نقطه به نقطه‌ی روش تکرار لزاندر-پیکارد با خطای حاصل از روش‌های اختلال هموتوپی (HPM) [۳۴]، آنالیز هموتوپی (HAM) [۳۵]، کوادراتور نیوتون-کانتروویچ (NKQ) [۳۶]، هم محلی (CM) [۳۷] و قضیه‌ی مقدار میانی برای انتگرال‌ها (IMVT) [۳۸] در جدول ۷ مقایسه شده است. شکل ۴ جواب تقریبی و جواب دقیق را به همراه خطای مطلق روش به ازای $N = 25$ و $N = 10$ نشان می‌دهد. به ازای مقادیر متفاوت N ، نمودار لگاریتم خطای مطلق روش به ازای $N = 25$ و $N = 10$ رسم شده است. ملاحظه می‌شود با افزایش N ، خطابه صورت نمایی کاهش می‌یابد.

جدول ۶. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لزاندر-پیکارد با شرط توقف $\epsilon = 10^{-7}$. (تعداد تکرارها = ۱۲)

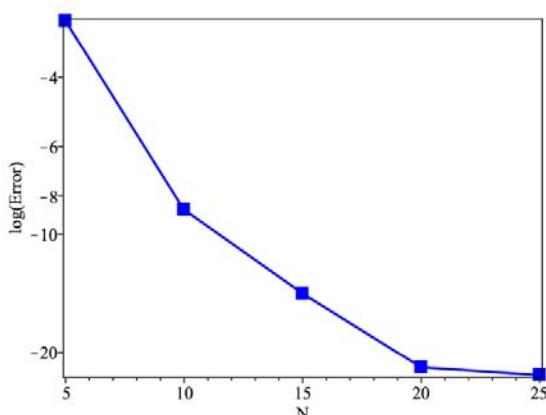
N	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
L_∞	1.313885×10^{-3}	2.048109×10^{-9}	6.930992×10^{-15}	$1.0575682 \times 10^{-22}$	1.462283×10^{-23}

جدول ۷. مقایسه‌ی خطای مطلق نقطه به نقطه‌ی روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-7}$ و روش‌های ارائه شده در [۳۴-۳۸].

x	HPM [۳۴]	HAM [۳۵]	NKQ [۳۶] $m = 1, N = 20$	CM [۳۷] $N = 20$	IMVT [۳۸] $N = 25$	روش پیشنهادی $N = 20$
	$N=5$	$N=15$				
۰.۰	1.189762×10^{-6}	2.561865×10^{-8}	0.049838	.	3.19×10^{-16}	1.836510×10^{-23}
۰.۱	1.131531×10^{-6}	2.533099×10^{-8}	0.047399	1.84×10^{-7}	1.740151×10^{-23}	
۰.۲	9.625379×10^{-7}	2.194322×10^{-8}	0.040320	1.56×10^{-7}	1.765822×10^{-23}	
۰.۳	6.9932245×10^{-7}	1.4550291×10^{-8}	0.029194	1.14×10^{-7}	3.33×10^{-16}	1.305899×10^{-23}
۰.۴	3.678568×10^{-7}	1.064762×10^{-8}	0.010401	0.99×10^{-8}		5.111558×10^{-24}
۰.۵	.	1.840237×10^{-8}	.	1.11×10^{-16}		.
۰.۶	3.678568×10^{-7}	6.849763×10^{-9}	0.010401	6.90×10^{-8}	1.11×10^{-16}	9.621255×10^{-24}
۰.۷	6.9932247×10^{-7}	6.087238×10^{-9}	0.029194	1.14×10^{-7}		1.851838×10^{-23}
۰.۸	9.625379×10^{-7}	3.551072×10^{-9}	0.040320	1.57×10^{-7}		3.306153×10^{-23}
۰.۹	1.131531×10^{-6}	2.819651×10^{-9}	0.047399	1.84×10^{-7}	3.89×10^{-16}	3.942025×10^{-23}
۱.۰	1.189762×10^{-6}	4.163761×10^{-10}	0.049838	1.94×10^{-7}		$1.0575682 \times 10^{-22}$



شکل ۴. (آ) مقایسه جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، بهازی $N = 25$ و شرط توقف $\epsilon = 10^{-20}$.



شکل ۵. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-20}$.

مثال ۴,۵. معادله انتگرال غیرخطی

$$u(x) = -x^2 - \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)x + 2 + \int_0^x t\sqrt{u(t)}dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (63)$$

را با جواب دقیق $u(x) = 2 - x^2$ در نظر بگیرید. روش پیشنهادی بهازی $N = 4$ بعد از ۲۰ تکرار، جواب تقریبی زیر را می‌دهد:

$$u(x) \approx 2.0000 + 1.9431 \times 10^{-7}x - 1.0000x^2 + 2.3132 \times 10^{-12}x^3 - 9.5329 \times 10^{-12}x^4. \quad (64)$$

ماکزیمم خطای مطلق به دست آمده توسط روش تکرار لزاندر-پیکارد را بهازی مقادیر مختلف N در جدول ۸ گزارش نموده‌ایم. هم‌چنین این خط را با خطای حاصل از روش‌های موجک هار (HWM) [۲۷, ۳۹]، موجک هار کسری

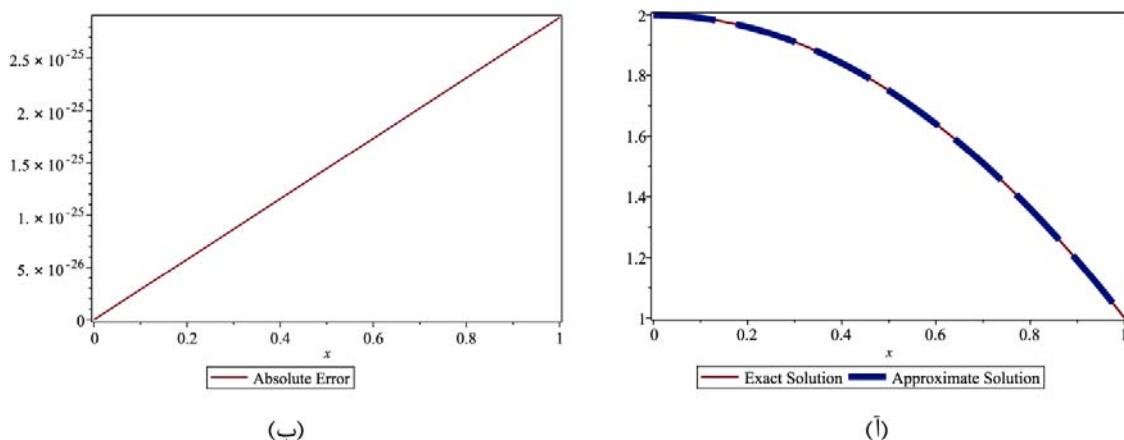
(MVIM) [۴۰]، قضیه‌ی مقدار میانی وزن دار برای انتگرال‌ها (IMVT) [۳۸] و تکرار وردشی بهبودیافته (RHWIM) [۴۱]، در جدول ۹ مقایسه شده است. در شکل ۶ جواب تقریبی، جواب دقیق و خطای مطلق متناظر روش پیشنهادی را به‌ازای $N = 20$ و $\epsilon = 10^{-25}$ رسم نموده‌ایم. با توجه به شکل ۷ در می‌باییم با افزایش N ، خطا به صورت نمایی کاهش می‌یابد.

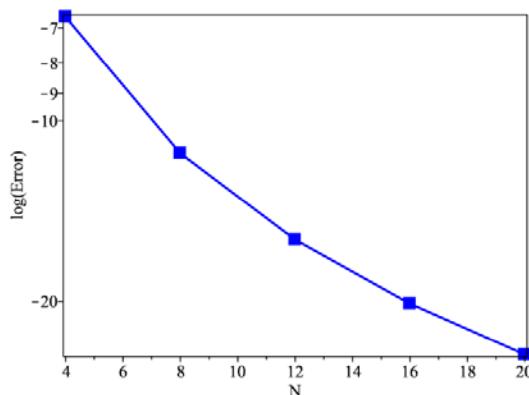
جدول ۸. ماکریم قدر مطلق خطای روش تکرار لزاندر-پیکارد با شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$. (تعداد تکرارها = ۳۲)

N	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
L_∞	1.943057×10^{-7}	4.644822×10^{-12}	1.612499×10^{-16}	6.573395×10^{-21}	2.889746×10^{-25}

جدول ۹. مقایسه‌ی ماکریم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$ و روش‌های ارائه شده در [۲۷، ۳۸-۴۱].

N	HWM [۲۷]	HWM [۳۹]	RHWIM [۴۰]	IMVT [۳۸]	MVIM [۴۱]	روش پیشنهادی
۸	2.7×10^{-3}	1.0×10^{-3}	3.6×10^{-2}	1.63×10^{-3}	3.6381×10^{-5}	4.6448×10^{-12}
۱۶	1.1×10^{-3}	2.6×10^{-4}	8.8×10^{-3}	4.09×10^{-4}	1.2796×10^{-10}	6.5734×10^{-21}
۳۲	3.7×10^{-4}	6.6×10^{-5}	7.1×10^{-3}	9.94×10^{-5}	-	4.2529×10^{-27}

شکل ۶. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای $N = 20$ و شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$.



شکل ۷. لگاریتم ماکریم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-25}$.

مثال ۵.۵. معادله‌ی انتگرال غیر خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$u(x) = x + \frac{2-\pi}{16} x^2 + \frac{1}{4} \int_0^x t \arctan(u(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (65)$$

جواب دقیق این معادله $x = u(x)$ به دست آید. به‌ازای $N = 5$ و شرط توقف $\epsilon = 10^{-30}$ ، جواب تقریبی روش پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x) \approx 1.34 \times 10^{-126} + 1.0000x + 1.5824 \times 10^{-11} x^2 - 1.8238 \times 10^{-123} x^3 \\ + 2.2372 \times 10^{-122} x^4 - 9.5068 \times 10^{-124} x^5. \quad (66)$$

برای بررسی کارایی روش تکرار لزاندر-پیکارد، جدول ۱۰ را تنظیم نموده‌ایم، که ماکریم خطای مطلق روش پیشنهادی را به‌ازای مقادیر مختلف N ، نشان می‌دهد. همچنین این خطای را در مقایسه با خطای حاصل از روش‌های موجک هار HWM [۲۷]، موجک هار کسری RHWM [۴۰] و پایه‌های شودر^۱ SBM [۴۲] در جدول ۱۱ گردآوری نموده‌ایم. نمودارهای جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق نظری به‌ازای $N = 25$ و $\epsilon = 10^{-30}$ در شکل ۸ ترسیم شده است. شکل ۹ نمودار لگاریتم خطای مطلق حاصل از روش تکرار لزاندر-پیکارد را به‌ازای مقادیر متفاوت N نشان می‌دهد. جدول‌ها و شکل‌های ارائه شده، دقت و کارایی روش این مقاله را تأیید می‌کند.

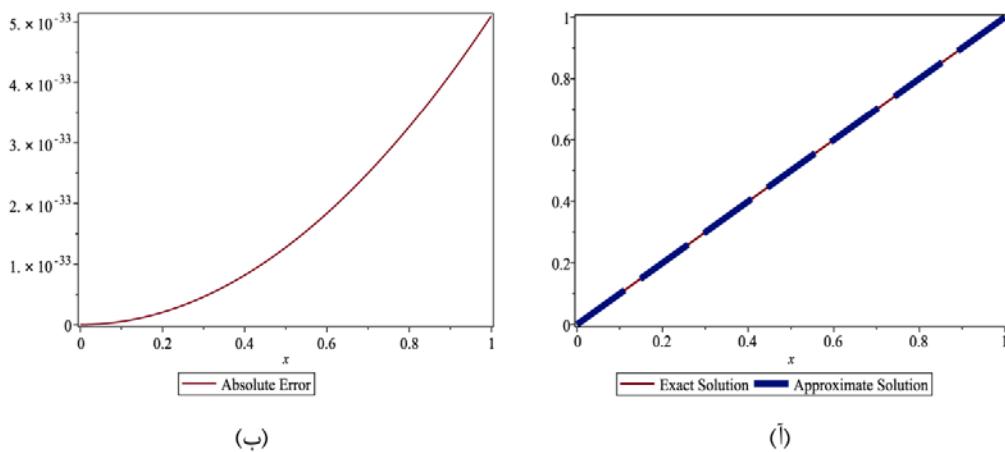
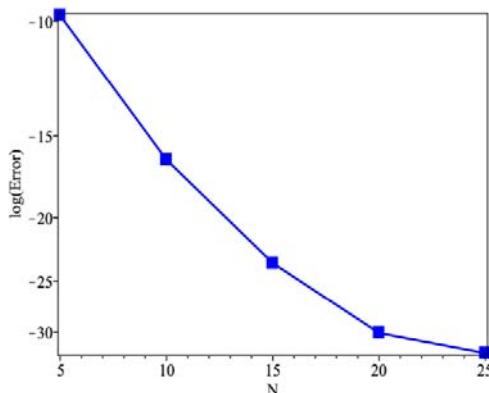
جدول ۱۰. ماکریم قدر مطلق خطای روش تکرار لزاندر-پیکارد با شرط توقف $\epsilon = 10^{-30}$. (تعداد تکرارها = ۲۳)

N	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
L_∞	1.582427×10^{-10}	4.890859×10^{-17}	3.342780×10^{-24}	8.462381×10^{-31}	8.357984×10^{-38}

^۱ Schauder

جدول ۱۱. مقایسه‌ی ماکریم خطا مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-3}$ و روش‌های ارائه شده در [۴۲، ۴۰، ۲۷].

HVM [۲۷]	SBM [۴۲]	RHWM [۴۰]	روش پیشنهادی $k = 7$	روش پیشنهادی $N = 7$
3.40×10^{-5}	2.71×10^{-6}	8.97×10^{-7}		5.565154×10^{-13}

شکل ۸. (ا) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطا مطلق نظیر، بهارای $N = 25$ و شرط توقف $\epsilon = 10^{-3}$.شکل ۹. لگاریتم ماکریم خطا مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-3}$.

مثال ۵. معادله‌ی انتگرال غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\gamma} \int_0^x x e^t \sin(u(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (۶۷)$$

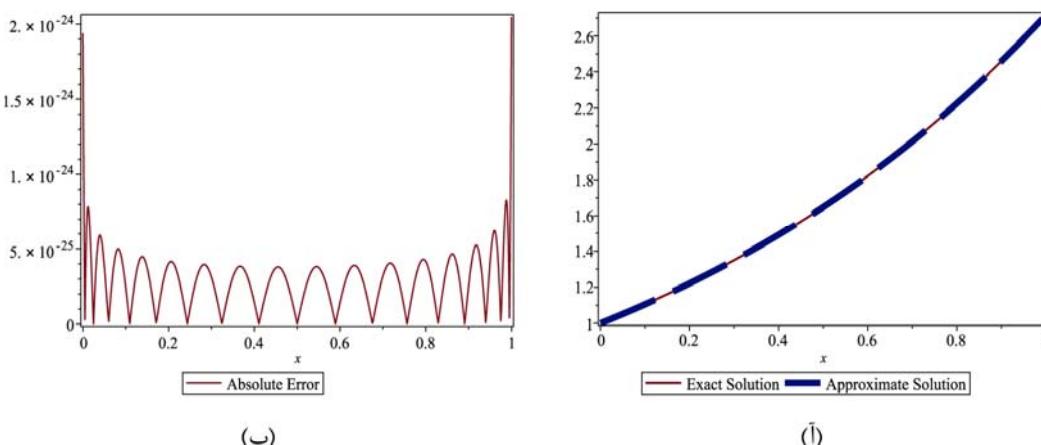
که در آن $f(x)$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود تا جواب دقیق $u(x) = e^x$ به دست آید. به ازای $N = 4$ و شرط توقف $\epsilon = 10^{-20}$ ، جواب تقریبی روش پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x) \approx 1.0001 + 0.99849x + 0.51039x^2 + 0.13995x^3 + 0.069335x^4. \quad (68)$$

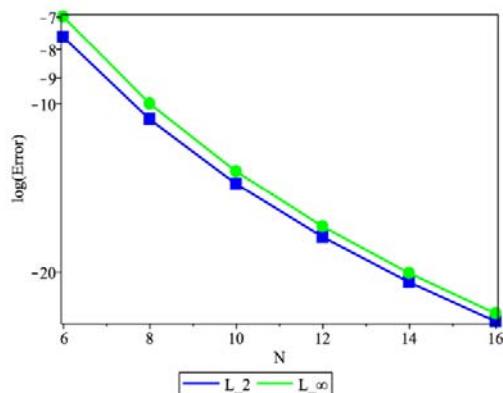
برای بررسی قابلیت اجرایی و دقت روش پیشنهادی، جدول ۱۲ فراهم شده است، که خطای L_2 و L_∞ روش را در مقایسه با روش تکرار ورد شی بهبودیافته MVIM [۴۱]، به ازای مقادیر مختلف N نشان می‌دهد. در شکل ۱۰ نمودارهای جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق نظریه به ازای $N = 16$ و $N = 20$ نشان داده شده است. نمودار لگاریتم خطای مطلق روش تکرار لزاندر-پیکارد به ازای مقادیر متفاوت N در شکل ۱۱ تأکید می‌کند که با افزایش N ، دقت روش بالاتر رفته و خطای به طور نمایی کاهش می‌یابد.

جدول ۱۲. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لزاندر-پیکارد با شرط توقف $\epsilon = 10^{-20}$. (تعداد تکرارها = ۴۹)

N	روش عددی	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
L_2	MVIM	2.4981×10^{-5}	4.0865×10^{-7}	1.1040×10^{-10}	6.9346×10^{-11}	7.2906×10^{-13}	3.1165×10^{-15}
	روش پیشنهادی	2.4817×10^{-8}	2.1580×10^{-11}	1.2275×10^{-14}	4.9217×10^{-18}	1.4658×10^{-21}	3.3696×10^{-25}
L_∞	MVIM	1.6210×10^{-5}	2.3116×10^{-7}	5.6087×10^{-11}	3.2245×10^{-11}	3.1441×10^{-13}	1.3322×10^{-15}
	روش پیشنهادی	1.0206×10^{-7}	9.8861×10^{-11}	6.1341×10^{-14}	2.64944×10^{-17}	8.4179×10^{-21}	2.0491×10^{-24}



شکل ۱۰. (آ) مقایسه جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظریه، به ازای $N = 20$ و شرط توقف $\epsilon = 10^{-20}$.



شکل ۱۱. لگاریتم خطای L_2 و L_∞ روش پیشنهادی با شرط توقف $\epsilon = 10^{-2}$.

۶. ملاحظات پایانی و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش تکرار لزاندر-پیکارد را برای حل عددی معادلات انتگرال فردholm نوع دوم خطی و غیرخطی ارائه دادیم. برای بهدست آوردن روش، دنباله‌ی تکرارهای پیکارد، چندجمله‌ای‌های لزاندر انتقال‌یافته و قاعده‌ی انتگرال‌گیری لزاندر-گاؤس انتقال‌یافته به شکل مناسبی به کار گرفته شد تا روش تکراری پیشنهادی فرمول‌بندی شود. این روش اساساً یک روش تکراری است که به سادگی قابل پیاده‌سازی است و برخلاف روش‌های شبه طیفی و طیفی، نیازی به تقریب مشتق و انتگرال یا حل دستگاه‌های جبری ندارد؛ هم‌چنین بهدلیل استفاده از چندجمله‌ای‌های لزاندر انتقال‌یافته، نیازی به تغییر و انتقال بازه در ساختار معادلات انتگرال نیست. برای افزایش کارایی روش تکرار لزاندر-پیکارد، یک ساختار برداری-ماتریسی ارائه دادیم، که مشاهده شد سرعت اجرای روش به قدر قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. در پایان کارایی روش تکرار لزاندر-پیکارد را با حل چند مثال نشان دادیم. ملاحظه می‌شود نتایج تقریبی تطابق مناسبی با جواب دقیق دارد، که نشان‌دهنده‌ی دقت و کاربردی بودن روش پیشنهادی است.

References

1. S. Lemita, H. Guebbai, New process to approach linear Fredholm integral equations defined on large interval, Eur. J. Math. **12**(1) (2019), DOI: 10.1142/S1793557119500098.
2. A. Alturk, Numerical solution of linear and nonlinear Fredholm integral equations by using weighted mean-value theorem, SpringerPlus **5** (2016), DOI: 10.1186/s40064-016-3645-8.
3. I. Suryani, M. Imran, M.D.H. Gamal, Composite Mendeleev's quadratures for solving a linear Fredholm integral equation of the second kind, Global J. Pure Appl. Math. **12**(4) (2016), 3493-3498.
4. A. Mennouni, N. E. Ramdani, K. Zennir, A new class of Fredholm integral equations of the

- second kind with non-symmetric kernel: solving by wavelets method, *Bol. Soc. Paran. Mat.* (2019), Doi:10.5269/bspm.41734.
5. N. Koshev, L. Beilina, An adaptive finite element method for Fredholm integral equations of the first kind and its verification on experimental data, *Cent. Eur. J. Math.* **11**(8) (2013), 1489-1509.
 6. M. Ahmadinia, H. Afshari A., M. Heydari, Numerical solution of Itô-Volterra integral equation by least squares method, *Numer. Algorithms* **84** (2020), 591-602.
 7. Z. Masouri, Numerical expansion-iterative method for solving second kind Volterra and Fredholm integral equations using block-pulse functions, *Adv. Comput. Tech. Electromagn.* (2012), DOI:10.5899/2012/acte-00108.
 8. Z. Avazzadeh, M. Heydari, W. Chen, G. B. Loghmani, Exponential convergence for numerical solution of integral equations using radial basis functions, *J. Appl. Math.* (2014), DOI:10.1155/2014/710437.
 9. F. Mirzaee, E. Hadadian, A new improved hat function for numerical solution of linear Fredholm integral equations, *Thai J. Math.* **15**(1) (2017), 17-31.
 10. H. O. Bakodah, Some modifications of Adomian decomposition method applied to nonlinear system of Fredholm integral equations of the second kind, *Int. J. Contemp. Math. Sciences* **7**(19) (2012), 929-942.
 11. J. Biazar, H. Ebrahimi, Variational iteration method for Fredholm integral equations of the second kind, *Iranian J. Optim.* **1**(1) (2009), 11-17.
 12. S.M. Mirzaei, Fredholm integral equations of the first kind solved by using the homotopy perturbation method, *Int. J. Math. Anal.* **5**(19) (2011), 935-940.
 13. B. Ghanbari, On the convergence of the homotopy analysis method for solving Fredholm integral equations, *Walailak J. Sci Tech.* **10**(4) (2013), 395-403.
 14. A.J. Mohammed, J.I. Mustafa, Construction of a new technique in Aitken extrapolation method for solving Fredholm integral equation of the first kind with iterated kernel, *J. Edu. Sci.* **21**(2) (2008), 143-149.
 15. M. Muhammad, N. Ahniyaz, M. Masatake, S. Masaaki, Numerical solution of integral equations by means of the Sinc-collocation method based on the double exponential transformation, *J. Comput. Appl. Math.* **177**(2) (2005), 269-286.
 16. S. Davaei far, Y. Ordokhani, Solving Fredholm integral equations with Bernstein multi-scaling functions, *J. Sci. Kharazmi University* **13**(2) (2013), 305-320.
 17. J. Rashidinia, E. Babolian, Z. Mahmoodi, Spline collocation for Fredholm integral equations, *Math. Sci.* **5**(2) (2011), 147-158.
 18. Y. Liu, Application of the Chebyshev polynomial in solving Fredholm integral equations, *Math. Comput. Model.* **50**(3-4) (2009), 465-469.
 19. H. Guo, H. Cai, X. Zhang, A Jacobi-collocation method for second kind Volterra integral equations with a smooth kernel, *Abstr. Appl. Anal.* (2014), DOI: 10.1155/2014/913691.
 20. Nemati Saray, Sparse multiscale representation of Galerkin method for solving linear□mixed Volterra□Fredholm integral equations, *Math. Methods Appl. Sci.* **43**(5) (2020), 2601-2614.
 21. A.M. Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations: methods and applications, Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2011.

22. J. Junkins, A. B. Younes, R. M. Woollards, X. Bai, Picard iteration, Chebyshev polynomials and Chebyshev-Picard methods: Application in astrodynamics, *J. Astronaut. Sci.* **60**(3) (2013), 623-653.
23. M. Tafakkori-Bafghi, G.B. Loghmani, M. Heydari, X. Bai, Jacobi-Picard iteration method for the numerical solution of nonlinear initial value problems, *Math. Meth. Appl. Sci.* **43**(3) (2020), 1084-1111.
24. J. Shen, T. Tang, L. L. Wang, Spectralmethods: algorithms, analysis and applications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
25. A. Bellour, D. Sbibih, A. Zidna, Two cubic spline methods for solving Fredholm integral equation, *Appl. Math. Comput.* **276** (2016), 1-11.
26. E. Love, The electrostatic field of two equal circular conducting disks, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **2**(4) (1949), 420-451.
27. Ü. Lepik, E. Tamme, Solution of nonlinear Fredholm integral equations via the Haar wavelet method, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **56**(1) (2007), 17-27.
28. M. Reihani, Z. Abadi, Rationalized Haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* **200**(1) (2007), 12-20.
29. C. Cattani, A. Kudreyko, Harmonic wavelet method towards solution of the Fredholm type integral equations of the second kind, *Appl. Math. Comput.* **215**(12) (2010), 4164-4171.
30. Müller, W. Varnhorn, On approximation and numerical solution of Fredholm integral equations of second kind using quasi-interpolation, *Appl. Math. Comput.* **217**(13) (2011), 6409-6416.
31. S. Islam, I. Aziz, A. Al-Fhaid, An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders, *J. Comput. Appl. Math.* **260** (2014), 449-469.
32. S. Panda, S. Martha, A. Chakrabarti, A modified approach to numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind, *Appl. Math. Comput.* **271** (2015), 102-112.
33. S. Amiri, M. Hajipour, D. Baleanu, On accurate solution of the Fredholm integral equations of the second kind, *Appl. Numer. Math.* **150** (2020), 478-490.
34. J. Biazar, H. Ghazvini, Numerical solution for special non-linear Fredholm integral equation by HPM, *Appl. Math. Comput.* **195**(2) (2008), 681-687.
35. Awawdeh, A. Adawi, S. Al-Shara, A numerical method for solving nonlinear integral equations, *Int. Math. Forum* **4**(17) (2009), 805-817.
36. J. Saberi-Nadjafi, M. Heidari, Solving nonlinear integral equations in the Urysohn form by Newton-Kantorovich-quadrature method, *Comput. Math. Appl.* **60**(7) (2010), 2058-2065.
37. N. Ebrahimi, J. Rashidinia, Collocation method for linear and nonlinear Fredholm and Volterra integral equations, *Appl. Math. Comput.* **270** (2015), 156-164.
38. H. Li, J. Huang, A novel approach to solve nonlinear Fredholm integral equations of the second kind, *SpringerPlus* **5** (2016), DOI: 10.1186/s40064-016-1810-8.
39. I. Aziz, S. Islam, New algorithms for the numerical solution of nonlinear Fredholm and Volterra integral equations using Haar wavelets, *J. Comput. Appl. Math.* **239** (2013), 333-345.
40. M. Erfanian, M. Gachpazan, H. Beiglo, Rationalized Haar wavelet bases to approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations with error analysis, *Appl. Math. Comput.* **265** (2015),

304-312.

41. M. H. Daliri, J. Saberi-Nadjafi, Improved variational iteration method for solving a class of nonlinear Fredholm integral equations, *SeMA J.* **76** (2019), 65-77.
42. M. I. Berenguer, M. F. Muñoz, A. G. Guillem, M.R. Galán, Numerical treatment of fixed point applied to the nonlinear Fredholm integral equation, *Fixed Point Theory Appl.* (2009), DOI:10.1155/2009/735638.