Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Multi-period Portfolio Optimization Under Probability Risk Measure and AR (1)-GARCH (1,1) Model

Rezvan Kamali[1], **Safieh Mahmoodi**[2]✉, **Mohammad Taghi Jahandideh**[3]

1. Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

E-mail: rezvan.kamali@math.iut.ac.ir

2. Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

✉E-mail: mahmoodi@iut.ac.ir

3. Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

E-mail: jahandid@iut.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
16 October 2020
Received in revised form:
25 April 2021
Accepted:
2 May 2021
Published online:
31 December 2022

Keywords:
Multi-period Portfolio Optimization, Probabilistic Risk Measure, Kernel Distribution Estimator, Piecewise Linear Interpolation, AR (1)-GARCH (1,1) Model.

ABSTRACT

Introduction

In modern portfolio theory, it is often assumed that the returns distribution is Gaussian. Real data has shown that this assumption can lead to a significant error in expected returns. Kamali. et al [4] confirm that the kernel distribution estimator is the best to fit the data among many distributions including Gaussian distribution. In this paper, instead of using the same distribution for all assets in all periods, we consider the most appropriate distribution for each asset in each period. We also show that a more reliable answer is achieved by using the piecewise linear interpolation of the empirical distribution. When an investor plans to set up a portfolio for the future, a common approach is to use the same weights obtained for the assets in the portfolio as historical data. This method can lead to some errors, especially when the market fluctuates a lot. One way to improve the answers is to predict future returns with an accuracy model and using new data. To this end, we consider the AR (1)-GARCH (1,1) model. This is a parsimonious model that has to estimate three parameters. We use shares, in the ASX100 market to form a portfolio. Shares' daily values for 723 days (adjusted close values) from 2015 to 2017 are used.

Results and discussion

We consider initial wealth, $M_0 = 1$ at a period of $T = 36$ months. Also, x_{tj} is the percentage of asset S_j at the end of the $(t-1)$th period, which is invested at the beginning of the period t. The rate of return on assets in period t is expressed by R_{tj} with the position parameter r_{tj} and the scale parameter σ_{tj} .

The probability risk criteria applied in this study is as follows

$$\min_{1\le t\le T}\ \min_{1\le j\le N} F_{tj}(x_{tj}),$$

where $F_{tj}(x_{tj}) = \Pr\{|R_{tj}x_{tj} - r_{tj}x_{tj}| \le \theta\hat{\sigma}_{tj}\}$.

Finally, the end objective function is as follows

$$\max_x\{\min_{1\le t\le T}\ \min_{1\le j\le N} F_{tj}(x_{tj}), E(V_T)\}.$$

Suppose the investor tends to maximize ultimate wealth while minimizing risk. So, the optimization problem is brought as follows

$$\max_x \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} x_{tj} r_{tj}$$

such that

$$\sum_{j=1}^{N} x_{tj} = 1, \qquad t = 1, \dots, T,\ x_t = [x_{t1}, \dots, x_{tN}]^T \in \mathbb{R}^N,\ \ 0 \le x_{tj} \le U_{tj},$$

$$t = 1, \dots, T, j = 1, \dots, N,$$

where

$$U_{tj} = \min\{1, F_{tj}^{-1}(y)\},$$

and y is a real fixed integer between 0 and 1, and is the inverse of the function. The optimal solution to the above optimization problem is obtained in based on Theorem 2.3 [12].
At this stage, for each asset in each period, we consider the most appropriate distribution using the Kolmogorov-Smirnov test and then solve the problem accordingly.
It should be noted that if the investor is risky, he/she must select a portfolio with more θ and less y. For $\theta > 2$ or $\theta < 0.6$ the investor is practically risk-averse.
After that, we predict future returns using the AR (1)-GARCH (1,1) model.
First of all, the stationarity of returns time series must be examined. We use the KPSS test and results show that the null hypothesis of stability cannot be rejected in almost all cases. In cases that stationarity is rejected, we obtain a stationary time series by first-order differentiation.
Another issue could be checking the accuracy of the forecast. In this research, we use the criteria Root Mean Squared Error (RMSE), Mean Absolute Error (MAE), and Theil inequality coefficient (TIC). The result for the 10th asset shows that the value of TIC for the model AR (1)-GARCH (1,1) is close to zero. Therefore, it is suitable for predict returns.
After fitting the AR (1)-GARCH (1,1) model to the returns time series, we generate data by them and solve the optimization problem using new data.
The optimization problem is solved with the new data in the case that the interpolation of empirical distribution is considered.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research

- Instead of using the same distribution (with different parameters) for all assets in all periods, we choose a fitted distribution for each asset in each period.
- The empirical distribution has been used instead of fitting the parametric distribution to the time series of returns and for being invertible, we used a piecewise linear interpolation of the empirical distribution function. Then we show that the interpolated function is better than the Kernel distribution estimator in terms of being closer to reality.
- After selecting the appropriate criteria for solving the optimization problem for selecting a portfolio, it is necessary to predict the returns and then solve the problem with new data. To do this, we used AR (1)-GARCH (1,1) model.
- Finally, the optimization problem is solved in such a way that the investor expresses her expectation for the expected return and wanted to offer her the appropriate portfolio.

How to cite: Kamali, R., Mahmoodi, S., Jahandideh, M. (2022). Multi-period Portfolio Optimization Under Probability Risk Measure and AR (1)-GARCH (1,1) Model. *Mathematical Researches*, 8 (4), 180-197.

 Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Kharazmi University

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

بهینه‌سازی چند دوره‌ای سبد سرمایه بر اساس اندازه ریسک احتمالی و مدل AR(1)-GARCH(1,1)

رضوان کمالی[۱]، صفیه محمودی[۲]✉، محمدتقی جهاندیده[۳]

۱. دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران. رایانامه:rezvan.kamali@math.iut.ac.ir

۲. نویسندهٔ مسئول، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، رایانامه: mahmoodi@iut.ac.ir

۳. دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران. رایانامه:jahandid@iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۲۵

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۰۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۱۲

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

واژه‌های کلیدی:
بهینه‌سازی چند دوره‌ای،
اندازه ریسک احتمالی،
براوردگر توزیع هسته،
درونیابی تکه‌ای خطی،
مدل AR(1)-GARCH(1,1).

چکیده

در این مقاله از الگوریتم انتخاب سبد سرمایهٔ چند دوره‌ای برای بیشینه کردن دارایی سرمایه‌گذار با استفاده از معیار ریسک احتمالی استفاده شده و با فرض‌های مناسب جدید مسائل بهینه‌سازی مورد بحث حل شده است. به این صورت که به جای استفاده از تنها توزیع نرمال یا حتی یک توزیع مشخص (با پارامترهای مجهول) برای همه دارایی‌ها در تمام دوره‌ها، برای هر دارایی در هر دوره بهترین توزیع از بین توزیع‌های نرمال، تی، پایدار و براوردگر توزیع هسته را در نظر بگیریم. در نتیجه جواب‌های نزدیک‌تر به واقعیت به دست خواهند آمد. علاوه بر این، به منظور بهینه‌سازی نتایج، به‌جای استفاده از یک توزیع پارامتری یا برآوردگر توزیع هسته، از درون‌یابی تکه‌ای خطی توزیع تجربی برای حل مسأله بهینه‌سازی استفاده گردیده است. در پایان با استفاده از داده‌های تاریخی و مدل AR(1)-GARCH(1,1) برای سرمایه‌گذاری‌های آتی در سبد سرمایه برنامه‌ریزی شده است.

استناد: کمالی، رضوان؛ محمودی، صفیه؛ جهاندیده، محمدتقی؛ (۱۴۰۱). بهینه‌سازی چند دوره‌ای سبد سرمایه بر اساس اندازه ریسک احتمالی و مدل AR(1)-GARCH(1,1). *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۱۹۷-۱۸۰.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

پس از اولین تلاش هری مارکویتز [۱] در سال ۱۹۵۰، نظریه سبد سرمایه و انتخاب بهینهٔ آن همواره یکی از مورد توجه‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی بوده است و نظریه مدرن سبد سرمایه مبتنی بر همین تلاش‌ها است. انتخاب سبد سرمایه یا بهینه‌سازی سبد سرمایه شامل طراحی یک مدل بهینه‌سازی مناسب و انتخاب معیارهایی مناسب برای انتخاب سهام است. اولین معیارهایی که توسط مارکوویتز در مدل سبد سرمایه سنتی مورد استفاده قرار گرفت، حداقل کردن واریانس بازدهی برای یک بازدهی معین یا حداکثر کردن بازدهی برای یک سطح ریسک مشخص بود. در سال‌های اخیر، بررسی واریانس در مدل مارکوویتز به بررسی شبه واریانس[1] تبدیل شده است [۹]. در نظریه سبد سرمایه مدرن، اغلب فرض می‌شود که توزیع بازدهی نرمال است، به عنوان نمونه تابع چگالی احتمال مورد استفاده در [۱۱، ۱۲] نرمال است و ریسک با استفاده از واریانس مقداردهی اولیه می‌شود. در موضوعات مالی، به‌خصوص هنگامی که یک سرمایه‌گذار قرار است مبلغ زیادی را سرمایه‌گذاری کند، دقت بهینه‌سازی سبد سرمایه و نزدیک‌تر کردن جواب‌ها به واقعیت برای هر تحلیلگر مالی مهم است. اما تجربه نشان داده است که فرض اینکه توزیع بازدهی در حالت عادی نرمال است، همیشه با واقعیت مطابقت ندارند و می‌تواند منجر به خطای قابل توجهی در بازدهی مورد انتظار شود [۱۲]. نمودار توزیع داده‌های مالی، از جمله توزیع بازدهی، دم‌ها کلفت‌تر و کشیدگی بیشتری نسبت به توزیع نرمال دارد. همچنین در بازار واقعی، آشفتگی بیشتر است و بازدهی ممکن است توزیع متقارن نداشته باشد، در این صورت ترجیح داده می‌شود توزیع برازش داده شده به بازدهی متقارن نباشند.

مسأله دیگر، به‌کارگیری برنامه‌ریزی چند دوره‌ای است. در منابع بسیاری مزیت‌های استفاده از برنامه‌ریزی چند دوره‌ای به جای تک دوره‌ای آورده شده است. به عنوان مثال، در [۱۲] نشان داده شده است که وقتی مسأله بهینه‌سازی چند دوره‌ای را حل کنیم، بازده مورد انتظار نسبت به حالت تک دوره‌ای افزایش می‌یابد. از طرفی، مزیت دیگر آن این است که برآوردهای بازدهی احتمالا متناقض در بازه‌های زمانی مختلف را به کار می‌گیرد. به‌عنوان نمونه، فرض کنید پیش‌بینی می‌کنیم که بازده در طی مدت کوتاهی مثبت، اما برای یک دوره طولانی‌تر منفی خواهد بود. پیش‌بینی اول ممکن است فقط مربوط به یک روز باشد در حالی که پیش‌بینی دوم برای یک ماه یا بیشتر. در یک چارچوب بهینه‌سازی تک دوره‌ای، پیش‌بینی را نمی‌توان با دقت مطلوب انجام داد و نتیجه کار می‌تواند کاملاً غیربهینه باشد.

مسأله مهم دیگر در انتخاب سبد سرمایه، اندازه‌گیری ریسک است. اصطلاح ریسک در دهه‌های اخیر دستخوش تغییرات بسیاری بوده است و در موقعیت‌های مختلف برای اندازه‌گیری آن معیارهای مختلفی معرفی شده است. ریقی و بورنشتین [۱۰] معیارهای ریسک را با در نظر گرفتن کارایی استراتژی‌های بهینه سبد سرمایه مقایسه کردند. چن [۲] یک مدل بهینه‌سازی چند دوره‌ای را با استفاده از ارزش در معرض خطر به‌عنوان یک معیار برای ریسک ارائه کرد. وی و یه [۱۳] یک مدل واریانس چند دوره‌ای تحت کنترل خطر ورشکستگی معرفی کردند. لیو و همکاران [۶] یک مدل

[1] Pseudo-variance

بهینه‌سازی سبد سرمایه چند دوره‌ای را برحسب واریانس به‌عنوان یک معیار برای ریسک در یک محیط فازی توسعه دادند. لیو و ژانگ [۵] از شبه واریانس فازی به‌عنوان یک معیار برای ریسک استفاده کردند و برای هر هدف، میزان رضایت سرمایه‌گذار را در نظر گرفتند و یک مدل چند هدفه را که به یک مدل یک هدفه تبدیل شده بود، بررسی کردند. سان و همکاران [۱۱] یک روش انتخاب سبد سرمایه انعطاف‌پذیر را به‌عنوان یک مسأله بهینه‌سازی دو معیاره ارائه دادند. مدل آن‌ها بازدهی مورد انتظار برای سبد سرمایه را بیشینه و حداکثر ریسک دارایی‌های موجود در سبد سرمایه را کمینه می‌کرد و سرمایه‌گذارانی با میزان ریسک‌پذیری متفاوت می‌توانستند از آن استفاده کنند. در ادامه، سان و همکاران [۱۲] ثابت کردند که بهینه‌سازی چند دوره‌ای نسبت به بهینه‌سازی تک دوره‌ای نتایج بهتری برمی‌گرداند و برای یافتن نتیجه مطلوب از دارایی‌های کمتری برای شرکت در سبد سرمایه استفاده می‌کند.

در این مقاله، مشابه با پژوهش انجام شده توسط سان و همکاران [۱۱، ۱۲]، مدلی را ارائه می‌دهیم که بازدهی مورد انتظار برای سبد سرمایه را بیشینه کرده و حداکثر ریسک دارایی‌های موجود در سبد سرمایه را کمینه می‌کند. در این مدل از معیار ریسک احتمالی معرفی شده در [۱۲]، استفاده می‌شود. اخیرا نویسندگان برای بهبود و بهینه‌سازی این مدل، علاوه بر توزیع نرمال، از توزیع‌های تی، پایدار و برآوردگر توزیع با هسته[۲] را به کار گرفته و توضیح داده‌اند که چرا علیرغم پیچیده‌تر شدن حل مسأله در این حالت، برای سرمایه‌گذاری مطمئن مفید است. [۴]

در این مقاله، به‌منظور به دست آوردن پاسخ دقیق‌تر به‌جای استفاده از توزیع مشابه (با پارامترهای مختلف) برای همه دارایی‌ها در تمام دوره‌ها، به این‌گونه عمل می‌کنیم که برای هر دارایی در هر دوره برازنده‌ترین توزیع در نظر گرفته شود. همچنین نشان می‌دهیم که با استفاده از توزیع تجربی، پاسخ به مراتب قابل اطمینان‌تری خواهیم داشت. لازم به ذکر است که برای حل مسأله بهینه‌سازی، به معکوس یک تابع برحسب تابع توزیع انتخاب شده، در یک نقطه خاص نیاز داریم. از آنجایی که تابع توزیع تجربی معکوس‌پذیر نیست، در این مقاله از یک درونیاب قابل قبول از توزیع تجربی یعنی تابع درون‌یاب تکه‌ای خطی استفاده می‌شود.

هنگامی که سرمایه‌گذار قصد دارد یک سبد سرمایه برای آینده (به‌عنوان مثال در برنامه‌ریزی ماهانه برای یک ماه آتی) تنظیم کند، یک روش مرسوم این است که از همان وزن‌های به دست آمده برای دارایی‌های موجد در سبد استفاده کند که از داده‌های تاریخی ماه قبل به دست آمده است. ولی این روش ممکن است خطای زیادی در پی داشته باشد، به ویژه هنگامی که نوسانات بازار زیاد باشد. یک روش برای بهبود جواب‌های مسأله این است که بازدهی آینده و نوسانات بازدهی را با استفاده از داده‌های تاریخی توسط مدلی قابل قبول پیش‌بینی کرده و سپس مسأله بهینه‌سازی را با استفاده از داده‌های جدید حل کنیم. برای این منظور، مدل AR(1)-GARCH(1,1) را برای پیش‌بینی بازدهی و واریانس بازدهی برای هر دارایی طی سه سال در نظر می‌گیریم. برای سه سال بازدهی را پیش‌بینی نموده و مسأله بهینه‌سازی چند دوره‌ای را با استفاده از داده‌های جدید حل کردیم.

[2] Kernel Distribution Estimator

۲. فرمول‌بندی مسأله بهینه‌سازی

فرض کنید $S_j, j = ۱, \dots, N$ دارایی‌های ریسکی باشند و سرمایه‌گذار تصمیم می‌گیرد با دارایی اولیه $V_۰$، سرمایه‌گذاری کند. فرض کنید T تعداد دوره سرمایه‌گذاری باشد. همچنین x_{tj} درصدی است که در ابتدای دوره t بر روی دارایی S_j سرمایه‌گذاری می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم که بازار رقابتی کامل است و سبد سرمایه خود تأمین مالی بوده و فروش استقراضی مجاز نیست. لذا داریم:

$$\sum_{i=۱}^{N} x_{tj} = ۱, t = ۱, \dots, T, x_t = \left[x_{t۱}, \dots, x_{tN}\right]^T \in \mathbb{R}^N. \tag{۱,۲}$$

$$x_{tj} \geq ۰, t = ۱, \dots, T, j = ۱, \dots, N. \tag{۲,۲}$$

نرخ بازدهی دارایی S_j در دوره t با R_{tj} با پارامتر مکان r_{tj} و پارامتر مقیاس σ_{tj} نشان داده می‌شود. اگر R_{tj} برای برخی t و jها توزیعی با میانگین و واریانس متناهی داشته باشد، واضح است که r_{tj} میانگین و σ_{tj} انحراف معیار استاندارد آن توزیع است و آن‌ها را با استفاده از روش‌های تخمین گشتاوری برآورد می‌کنیم.

$$R_t = \left[R_{t۱}, \dots, R_{tN}\right]^T, E(R_t) = r_t = \left[r_{t۱}, \dots, r_{tN}\right]^T. \tag{۳,۲}$$

در غیر این صورت، به عنوان مثال در توزیع پایدار زمانی که $\alpha < ۲$ است، برای تخمین r_{tj} و σ_{tj} از برآوردگرهای شناخته شده در نرم‌افزار متلب استفاده می‌کنیم. فرض کنیم R_{tj}ها مستقل هستند. دارایی کل سرمایه‌گذار در پایان دوره tام برابر است با

$$V_t = V_{t-۱}\left(۱ + R_t^T x_t\right), t = ۱, \dots, T, \tag{۴,۲}$$

که در آن $V_۰$ معلوم است.

در این مقاله، برای بهینه‌سازی سبد سرمایه چند دوره‌ای از معیار ریسک احتمال استفاده می‌شود. از آنجایی که قصد داریم مسأله بهینه‌سازی را در حالت‌هایی بتوانیم حل کنیم که سبد سرمایه بتواند شامل هر نوع دارایی باشد و دیگر اینکه دارایی‌هایی که برای نمونه انتخاب کردیم تا حل مسأله را در عمل ببینیم، شامل سهام‌هایی است که بازدهی‌های روزانه مورد استفاده به دفعات منفی می‌شوند. از طرفی استفاده از VaR پیچیدگی زیادی دارد و لذا استفاده ازآن انتخاب مناسبی نیست. اندازه ریسک احتمالی مورد استفاده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{W}_p(x) = \min_{۱\leq t\leq T} \min_{۱\leq j\leq N} \mathbf{Pr}\{|R_{tj}x_{tj} - r_{tj}x_{tj}| \leq \boldsymbol{\theta}\varepsilon\}$$

که در آن ε میانگین ریسک سبد و θ یک پارامتر برای تنظیم سطح ریسک است [۱۲].

فرض کنید که سرمایه‌گذار تمایل دارد ثروت نهایی را به حداکثر رسانده و هم‌زمان ریسک را حداقل کند. بنابراین مسأله انتخاب سبد سرمایه به شرح زیر تنظیم می‌شود:

$$\max_x\left(\min_{۱\leq t\leq T} \min_{۱\leq j\leq N} \boldsymbol{F}_{tj}(x_{tj}), \sum_{t=۱}^{T}\sum_{j=۱}^{N} x_{tj}r_{tj}\right), \tag{۵,۲}$$

که

$$\sum_{j=1}^{N} x_{tj} = 1, t = 1, \dots, T, x_t = \left[x_{t1}, \dots, x_{tN}\right]^T \in \mathbb{R}^N,$$
$$x_{tj} \geq 0, t = 1, \dots, T, j = 1, \dots, N.$$

که در آن

$$\boldsymbol{F}_{tj}\left(x_{tj}\right) = \mathbf{Pr}\left\{\left|R_{tj}x_{tj} - r_{tj}x_{tj}\right| \leq \theta\varepsilon\right\} \qquad (۶,۲)$$

با استدلالی مشابه با استدلال [۱۲]، مسأله بهینه‌سازی به صورت زیر ساده می شود:

$$\max_{x} \sum_{t=1}^{T} \sum_{t=1}^{N} x_{tj} r_{tj} \qquad (۷,۲)$$

که

$$\sum_{j=1}^{N} x_{tj} = 1, t = 1, \dots, T, x_t = \left[x_{t1}, \dots, x_{tN}\right]^T \in \mathbb{R}^N,$$
$$0 \leq x_{tj} \leq U_{tj}, t = 1, \dots, T, j = 1, \dots, N,$$

که در آن

$$U_{tj} = \min\left\{1, F_{tj}^{-1}(y)\right\}, \qquad (۸,۲)$$

و y یک عدد دلخواه ثابت و حقیقی بین ۰ و ۱ و F_{tj}^{-1} معکوس تابع F_{tj} است. جواب بهینه مسأله فوق در هر دوره k $(k = 1, \dots, T)$ بر اساس قضیه ۳,۲ [۱۲] به دست می‌آید.

در این پژوهش به حل مسأله بهینه‌سازی (۷,۲) می‌پردازیم که در آن توزیع بازدهی در هر دوره برای هر دارایی مناسب‌ترین در بین توزیع‌های نرمال، پایدار، تی یا براوردگر توزیع با هسته است. همچنین موردی را بررسی خواهیم کرد که در آن توزیع تجربی بازدهی با یک تابع تکه‌ای خطی مناسب درونیابی شده است.

در بخش بعدی توضیحاتی کلی در مورد چگونگی حل مسأله بهینه‌سازی (۲. ۷) ارائه خواهیم کرد.

۳. حل مسأله بهینه‌سازی

در این تحقیق، جواب تحلیلی مسأله (۷,۲) بر اساس قضیه (۳,۲) از [۱۲] تحت شرایط جدید محاسبه می‌شود. ابتدا مسأله بهینه‌سازی در حالتی که توزیع بازدهی هر دارایی در هر دوره بهترین از بین توزیع‌های نرمال، تی، پایدار یا برآوردگر هسته باشد، حل شده است. سپس، به‌جای برازش یک تابع توزیع پارامتری یا حتی برآوردگر هسته، از درونیابی تکه‌ای خطی تابع توزیع تجربی استفاده شده است. لازم به ذکر است که نحوه برآورد پارامترهای توزیع‌ها و همچنین یافتن معکوس تابع F_{tj} در مرجع [۴] آورده شده است.

به عنوان داده حقیقی، از داده‌های موجود ارزش روزانه سهام ۱۰۰ دارایی پر بازده بازار اوراق بهادار بورس استرالیا[3]، ASX100 از سال ۲۰۱۵ تا ۲۰۱۹ استفاده شده است. لازم به ذکر است که قیمت بسته شدن اصلاح‌شده[4] مبنای کار قرار گرفته است. برای ارزیابی داده، دارایی اولیه را $V_0 = 1$ قرار دادیم و $N = 100$ سهم برای ارزیابی در یک دوره $T = 63$ ماهه انتخاب شده‌اند. برای تغییر ریسک، پارامتر θ را تنظیم کرده‌ایم و y حد پایین محدودیت احتمالاتی است.

با تغییر θ یا y، سرمایه‌گذار قادر خواهد بود سبدهای سرمایه مختلف با سطوح ریسک مختلف ایجاد کند. هر چه کمتر باشد، سبد سرمایه می‌تواند متنوع‌تر باشد، در حالی که برای مقادیر کمتر θ، سخت کردن محدودیت‌های احتمالاتی کاهش می‌یابد. با افزایش θ و کاهش y، بازدهی نیز افزایش می‌یابد و همان‌طور که به بردارهای xنگاه می‌کنیم، می‌بینیم که با افزایش θ، تعداد دارایی‌های موجود در سبد سرمایه کمتر اما بهتر می‌شود (با بازدهی بیشتر). از طرف دیگر، با کاهش y، مقدار ریسک و بازدهی مورد انتظار افزایش می‌یابند و علاوه بر این، با افزایش پارامتر تعدیل ریسک افزایش کل دارایی محتمل‌تر است.

اکنون برای شروع حل مسأله بهینه‌سازی، برای هر دارایی در هر دوره برازنده‌ترین توزیع با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنف را در نظر گرفته و سپس مسأله را بر اساس آن حل می‌کنیم. به عنوان مثال، در دوره اول، بهترین توزیع برای برازش بازدهی دارایی اول، توزیع پایدار است. برای دارایی پنجم توزیع نرمال، برای دارایی هفتم برآوردگر هسته و برای دارایی هشتم توزیع تی است. به این ترتیب، نتایجی را می‌یابیم که نسبت به حالتی که برای همه دارایی‌ها یک توزیع خاص را در نظر می‌گیریم، به واقعیت نزدیک‌تر هستند. مقدار مورد انتظار برای سبد سرمایه در این حالت، برای y و θ های مختلف در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: ارزش مورد انتظار برای سبد سرمایه به ازای مقادیر مختلف برای θ و y و بهترین توزیع برازش شده.

y \ θ	۰٫۰۱	۰٫۱	۰٫۵	۱	۲
۰٫۹	۰٫۷۳۷	۱٫۲۹۰	۱٫۶۳۶	۱٫۷۵۴	۱٫۸۵۸
۰٫۸	۰٫۹۰۶	۱٫۳۵۳	۱٫۶۹۴	۱٫۸۰۲	۱٫۸۶۳
۰٫۷	۱٫۰۴۰	۱٫۳۹۸	۱٫۷۲۸	۱٫۸۳۳	۱٫۸۶۸
۰٫۶	۱٫۰۸۳	۱٫۴۳۹	۱٫۷۵۶	۱٫۸۴۵	۱٫۸۷۴

لازم به ذکر است که اگر سرمایه‌گذار ریسک‌پذیر باشد، باید سبد سرمایه‌ای با θ بیشتر و y کمتر انتخاب کند. برای $2 < \theta$ یا $y < 0/6$، سرمایه‌گذار عملاً ریسک‌گریز است.

[3] Australian Securities Exchange
[4] Adjusted Close Price

همچنین، نتایج حاصل از استفاده از توزیع تجربی اصلاح شده با درون‌یابی تکه‌ای خطی، در جدول ۹ ارائه شده است. همان‌طور که در جدول‌های ۱ و ۹ دیده می‌شود، در حالتی که $\theta = ۰/۰۱$ انتخاب شود کمترین میزان دارایی نهایی حاصل می‌شود و بعضی اوقات نه‌تنها هیچ سودی عاید سرمایه‌گذار نمی‌گردد، بلکه ضرر هم می‌کند.

حال سؤال این‌جاست که سرمایه‌گذار کدام سبد سرمایه را انتخاب می‌کند (با کدام y و θ). از ۲۹ دسامبر ۲۰۱۴ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۱۷، شاخص بازدهی در بازار ۱۰/۵۲٪ است که طبق جداول، زمانی که $\theta = ۰/۰۱$ است، تقریباً در کلیه سناریوها بازدهی سبد سرمایه پایین‌تر از این مقدار است و بنابراین سرمایه‌گذار، اگرچه مخالف ریسک‌پذیری نباشد، اما ترجیح می‌دهد آن‌ها را انتخاب نکند. اگر سرمایه‌گذار از ریسک‌پذیری کمتری برخوردار باشد، یک سبد سرمایه با θ بیشتر و y کمتر انتخاب خواهد کرد. اگر سرمایه‌گذار ریسک معقول را بپذیرد، مقدار نهایی سبد سرمایه برای او می‌تواند حداکثر ۱/۸۹۱ برای توزیع نرمال یا هسته، ۱/۴۴۶ برای توزیع تی و ۱/۳۳۴ برای توزیع پایدار باشد، به عبارت دیگر، روش استفاده از معیار ریسک احتمالی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه در سروکار داشتن با بازدهی‌هایی که با براوردگر توزیع هسته یا نرمال برازش شده‌اند، بهتر است. نتایج مربوط به براوردگر توزیع هسته نزدیک به نرمال هستند.

جدول۲: ارزش مورد انتظار به ازای مقادیر مختلف برای θ و y و درون‌یابی تکه‌ای خطی برای توزیع تجربی.

y \ θ	۰٫۰۱	۰٫۱	۰٫۵	۱	۲
۰٫۹	۰٫۷۳۹	۱٫۲۸۶	۱٫۶۳۵	۱٫۷۶۲	۱٫۸۵۸
۰٫۸	۰٫۹۲۶	۱٫۳۵۸	۱٫۶۹۶	۱٫۸۰۴	۱٫۸۶۳
۰٫۷	۱٫۰۵۳	۱٫۴۰۷	۱٫۷۳۱	۱٫۸۳۱	۱٫۸۶۸
۰٫۶	۱٫۰۹۱	۱٫۴۵۱	۱٫۷۵۸	۱٫۸۴۴	۱٫۸۷۴

۴. استفاده از مدل AR(1)-GARCH(1,1)

۱.۴. مدل AR(۱)-GARCH(۱,۱)

در بخش قبل، برای تنظیم یک سبد سرمایه از ضرایب x_t که توسط برنامه دوره آخر $(T = ۳۶)$ به دست می‌آید برای ماه آینده نیز استفاده می‌شود. بنابراین ناچار خطایی متحمل می‌شویم. حتی ممکن است ضرایب استفاده شده بازدهی کمتر از آنچه باید باشد را نتیجه دهد. لذا می‌توان بازدهی آینده و نوسانات بازدهی را با استفاده از داده‌های تاریخی پیش‌بینی نموده و مسأله برنامه‌ریزی را با استفاده از آن‌ها حل کرد. در اینجا نیز خطای پیش‌بینی اجتناب‌ناپذیر است و بنابراین مطابق با آنچه در بخش بعد گفته خواهد شد، می‌توان از دو روش هم‌زمان استفاده کرد. با این کار به دلیل وجود وابستگی بین بازدهی‌های مالی، مدل‌های نوسانی شرطی متغیر با زمان، روش‌های انعطاف‌پذیرتری برای مدل‌سازی ریسک یا پیش‌بینی نوسانات در سبد سرمایه هستند. به همین دلیل مدل AR(۱)-GARCH(۱،۱) به نظر برای داده‌ها برازنده است.

مدل GARCH[5] در سال ۱۹۸۲ توسط رابرت فرگل انگل برای تخمین نوسان در بازارهای مالی توسعه‌یافته، معرفی شد. متخصصان مدل‌سازی مالی، اغلب مدل GARCH را ترجیح می‌دهند زیرا برای پیش‌بینی سری‌های زمانی نوسانات در بازار واقعی نسبت به مدل‌های دیگر دقیق‌تر است. استفاده از این مدل چند مزیت دارد، از جمله:

- در مقایسه با مدل‌های مشابه از تعداد پارامترهای کمتری (۵ پارامتر) برای تخمین استفاده می‌کند. مدل‌هایی با جزئیات فراوان اغلب هنگام پیش‌بینی نمی‌توانند مزایای واقعی ارائه دهند ([۳]).
- این مدل ترکیبی، سری‌های زمانی مربوط به بازدهی و واریانس بازدهی را با یک خطای قابل قبول برآورد می‌کند.
- برنامه‌نویسی آن پیچیده نیست.

یک مدل AR(۱)-GARCH(۱,۱) یک فرآیند AR(۱) است به گونه‌ای که نویز آن یک فرآیند GARCH(۱،۱) است. به عبارت دیگر، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_t = C + \varphi X_{t-۱} + \varepsilon_t, \qquad (۱,۴)$$

و

$$\sigma_t^۲ = k + \gamma \sigma_{t-۱}^۲ + \varepsilon_{t-۱}^۲ \qquad (۲,۴)$$

با

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t, t \in \mathbb{Z} \qquad (۳,۴)$$

که در آن $\{Z_t\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی با توزیع یکسان و مستقل و میانگین صفر است. $\sigma_t^۲$ واریانس X_t است و

$$k > ۰, \gamma \geq ۰, a \geq ۰.$$

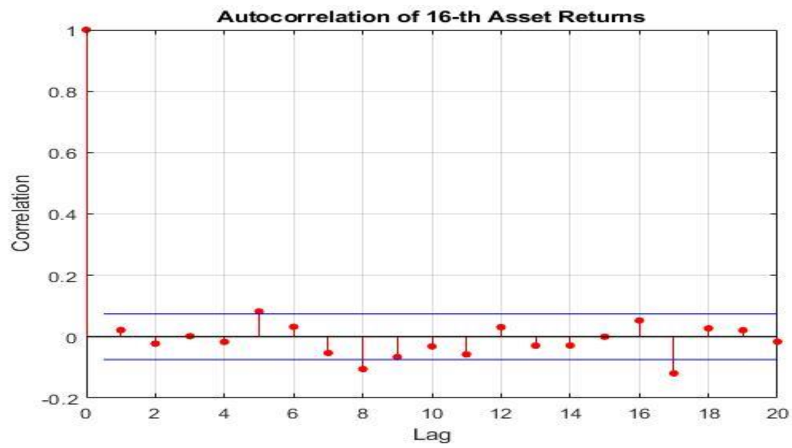
فرایند $\{\mathrm{X_t}, t \in \mathbb{Z}\}$ ایستا است، اگر $|\varphi| < ۱$ و فرایند $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ ایستا است، اگر $\gamma + a < ۱$ باشد. توجه داشته باشید که توزیع Z_t ها به دلیل پراکندگی زمانی گسترده توزیع تی در نظر گرفته شده است. شرط لازم برای استفاده از این مدل‌ها ایستایی سری زمانی مورد نظر است. در بخش بعدی نشان داده شده است که این شرط اغلب برای سری‌های زمانی مربوط به بازدهی برقرار است و در حالت رکود، یک سری زمانی ایستا با استفاده از تفاضلات مرتبه اول قابل به دست آوردن است.

۴,۲. تخمین‌ها و نتایج عددی. در پایان، مدل AR(۱)-GARCH(۱،۱) را بر بازدهی دارایی‌های آن‌ها برازش کردیم. سپس، با استفاده از مدل، بازدهی برای سه سال آتی را پیش‌بینی کرده و مسأله بهینه‌سازی را برای داده‌های جدید حل کردیم. بنابراین، سرمایه‌گذار قادر است ارزش مورد انتظار برای سبد سرمایه را طی سه سال آینده بر اساس داده‌های تاریخی داشته باشد.

برای این منظور، قبل از هر چیز شرط ایستایی سری زمانی بازدهی‌ها برای استفاده از این مدل باید بررسی شود. یعنی رکود سری زمانی بازدهی باید بررسی شود. اگر سری زمانی $\{X_t\ ;\ t \in \mathbb{N}\}$ ایستا نباشد، $Y_t = \log X_t - \log X_{t-۱}$، پیشنهاد می‌شود همان طور که در [۷] نشان داده شده است. از آنجا که از روش لگاریتمی برای به دست آوردن بازدهی

[5] Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasiticity

(R_t) با استفاده از مقدار دارایی (S_t) استفاده کردیم $R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$، انتظار داریم سری زمانی بازدهی‌های به دست آمده با این روش ایستا باشد، اما برای اطمینان، از آزمون KPSS[6] استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که در بیشتر اوقات، p-value بزرگتر از $\alpha = ۰/۰۵$ است، بنابراین فرض صفر در مورد ایستایی را نمی‌توان رد کرد. در مواردی که p-value کمتر از αاست، سری زمانی ایستا با استفاده از تفاضلات مرتبه اول به دست آمده است. لازم به ذکر است که اگر سری زمانی ایستا نباشد، ممکن است به دلیل تغییرات فصلی ناایستا باشد، بنابراین بررسی روند فصلی ضروری است. در تمام موارد، با بررسی خودهمبستگی بین بازدهی‌ها، به نظر می‌رسد روند فصلی وجود ندارد. بنابراین انتظار داریم که فقط یک بار استفاده از روش تفاضلی مرتبه اول، سری زمانی ایستا به دست آید. به عنوان مثال، برای دارایی شانزدهم، نمودار خودهمبستگی نمونه در شکل ۱ آمده است.



شکل ۱: خودهمبستگی نمونه‌ای برای بازدهی دارایی دهم.

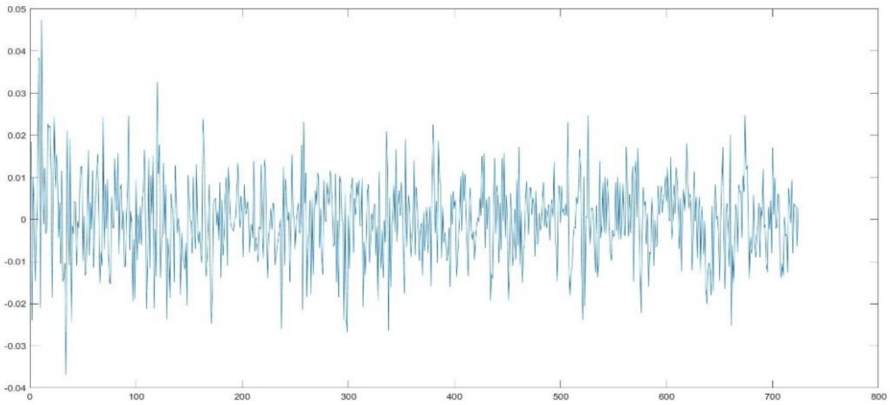
بعد از یافتن مدل مناسب برای آن و تولید داده توسط مدل به دست آمده، داده‌های جدید به سری زمانی بازدهی تبدیل می‌شوند. سری زمانی مربوط به دهمین دارایی که ایستا نیست در شکل ۲ و سری زمانی بعد از تفاضلات مرتبه اول در شکل ۳ نشان داده شده است.

اگر یک بار دیگر از روش تفاضلی استفاده کنیم، شکل ۴ به دست می‌آید که ظاهراً به ایستایی بهتری نرسیده است. از طرف دیگر، مقدار p برای هر دو تقریباً برابر است، بنابراین استفاده از تفاضلات مرتبهٔ اول ارجح است. در مورد دارایی ۶۳ام که خود ایستا است، پس از تفاضل مرتبه اول، همان طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود نتایج مطلوب‌تری خواهیم داشت (البته با مقدار احتمال یکسان برابر با ۱).

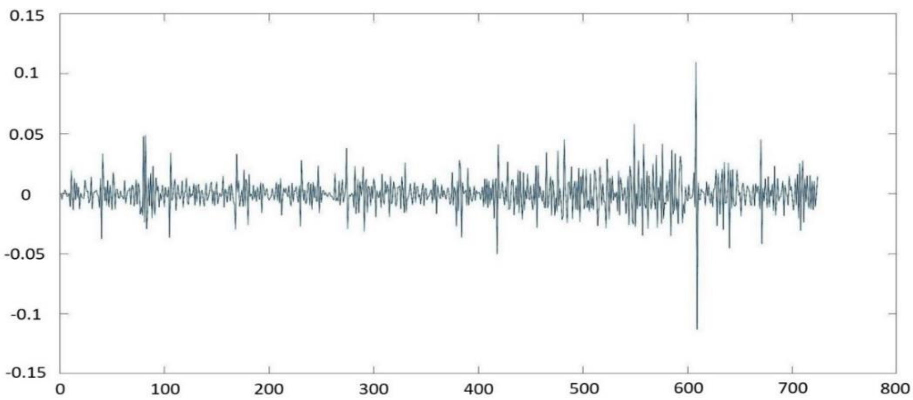
همان طور که مشاهده می‌شود، اگر یک‌تفاضل مرتبه دوم ایجاد شود، ایستایی سری حاصل از سری تفاضل مرتبه اول به نظر بیشتر نیست. از طرف دیگر، مقدار p آزمون برای بررسی ایستایی آن‌ها یکسان و برابر ۰/۱ است. لذا در کل برای همه سری زمانی بازده‌ها یک بار تفاضل‌گیری مرتبه اول را انجام داده و سپس به پیش‌بینی و حل مسأله می‌پردازیم. پس

[6] Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin

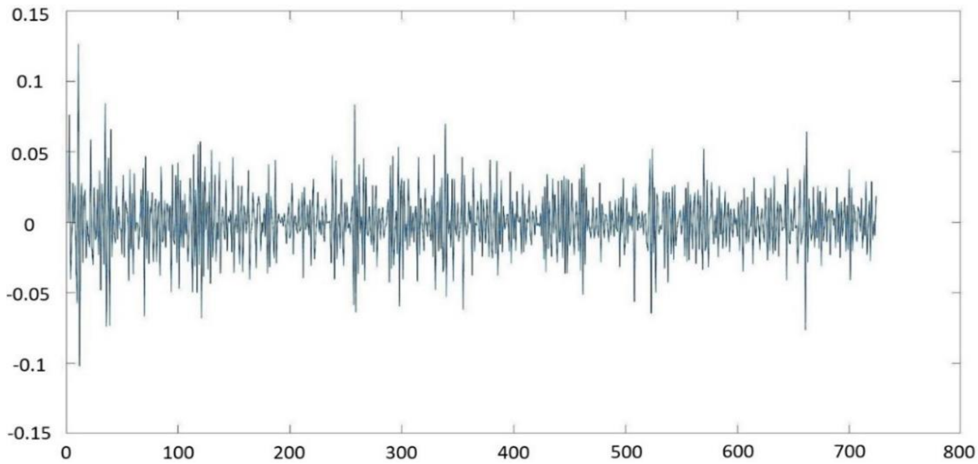
از بررسی ایستایی، از داده‌های مربوط به هر دارایی برای برازش مدل مناسب استفاده شد و ۲۰٪ از داده‌ها به‌عنوان کنترل و برای مقایسه داده‌های حاصل از مدل و داده واقعی نگه داشته شدند.



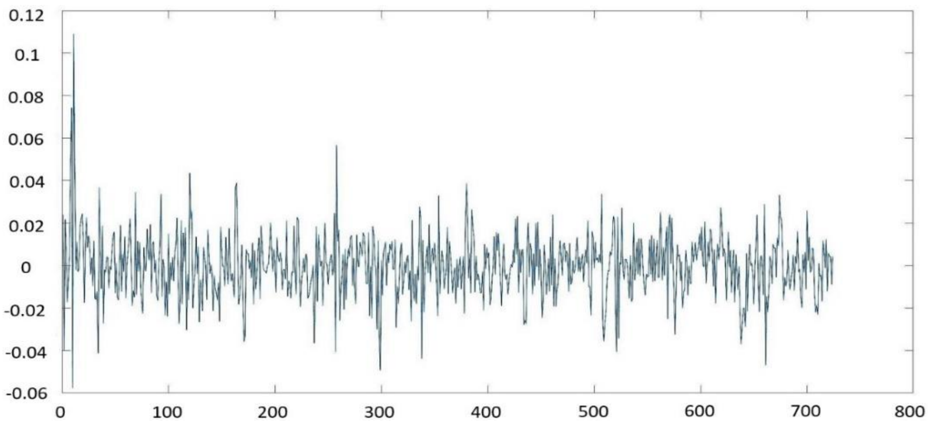
شکل ۲: سری زمانی بازدهی دارایی دهم.



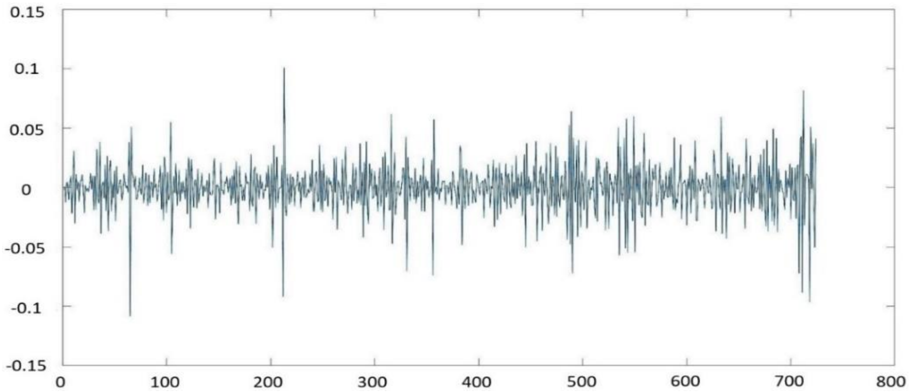
شکل ۳: سری زمانی به دست آمده از تفاضلات مرتبه اول برای بازدهی دارایی



شکل ۴: سری زمانی به دست آمده از تفاضلات مرتبه دوم بازدهی دارایی دهم.



شکل ۵: سری زمانی بازدهی دارایی ۶۳ام.



شکل ۶: سری زمانی به دست آمده از تفاضلات مرتبه اول بازدهی دارایی

جدول۳: مدل AR(1) برای بازدهی دارایی دهم (با نویزی با توزیع تی‌استیودنت.)

	مقدار	خطای استاندارد	مقدار t	مقدار p
Constant	۰٫۰۰۱۳۵۲۳	۰٫۰۰۱۰۰۷۸	۱٫۳۴۱۸	۰٫۱۷۹۶۷
AR{1}	۰٫۰۱۴۱۶۹	۰٫۰۳۸۴۶۷	۰٫۳۶۸۳۶	۰٫۷۱۲۶۱
D.F	۳	۰٫۷۷۸۲	۷٫۲۱۰۷	۵٫۵۶۷۶e-۱۳

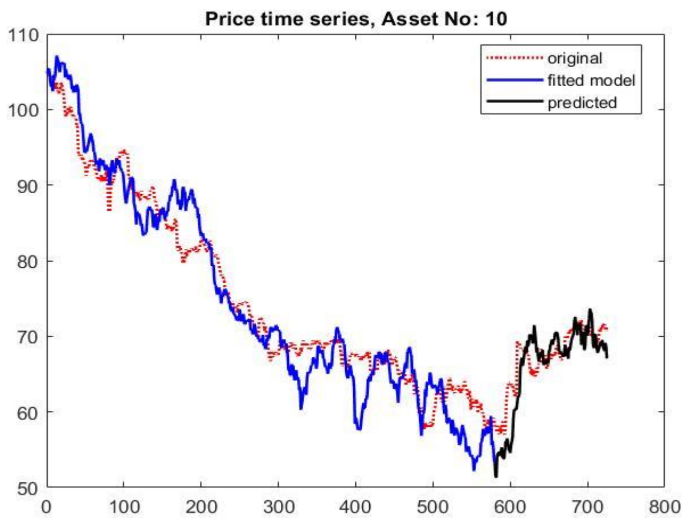
در جدول ۳ منظور از C و φ به ترتیب ضرایب C و φ در مدل AR است (۴٫۱) و در جدول ۴ منظور از C، GARCH{1} و ARCH{1} به ترتیب K، γ و a در مدل GARCH (۴٫۲)، است. همچنین، در هر دو جدول منظور از D.F درجه آزادی توزیع تی‌استیودنتی است که به فرآیند $\{Z_t\}$ در ۴٫۳ برازش شده است.

جدول ۴: مدل GARCH(۱,۱) برای واریانس بازدهی دارایی دهم (با نویزی با توزیع تی استیودنت.)

	مقدار	خطای استاندارد	مقدار t	مقدار p
Constant	۰,۰۰۰۲۰۰۴۱	۸,۶۷۰۷e-۰۵	۲,۳۱۱۴	۰,۰۲۰۸۱۱
GARCH{1}	۰,۷۱۰۵۹	۰,۰۹۲۵۴۸	۷,۶۷۸۱	۱,۶۱۵e-۱۴
ARCH{1}	۰,۱۶۵۱۲	۰,۰۶۷۰۸۶	۲,۴۶۱۳	۰,۰۱۳۸۴۴
D.F	۳	۰,۴۷۷۸۲	۷,۲۱۰۷	۵,۵۶۷۶e-۱۳

توجه شده است که برای مدل AR (۴,۱) شرط ایستایی $|\varphi| < ۱$ و برای مدل GARCH (۴,۲)، شرط ایستایی $\gamma + a < ۱$ در همه موارد برقرار است. پس از برازش مدل‌های مناسب به سری زمانی بازدهی، داده‌ها برای سه سال آینده پیش‌بینی شدند. با مقایسه نمودارهای ارزش اصلی دارایی و ارزش پیش‌بینی شده آن، به نظر می‌رسد که این مدل برای برازش با یک سطح قابل قبول مناسب است. به عنوان مثال، ۷ مقدار ارزش مشاهده شده برای دارایی و قیمت پیش‌بینی شده دارایی دهم را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که یک مدل پیش‌بینی، علاوه بر مناسب بودن برای برازش به لحاظ دقت پیش‌بینی هم باید مورد قبول باشد. برای این منظور، از معیارهای پیش‌بینی مختلفی از جمله ریشه میانگین مجذور خطا[7] (RMSE)، میانگین مطالق خطا[8] (MAE) و ضریب نابرابری تیل[9] (TIC) استفاده شد. معیار TIC تعدیل شده معیار RMSE است به‌طوری که همواره مقداری بین ۰ و یک اختیار می‌کند. هر چه مقادیر این شاخص‌ها پایین‌تر باشد، پیش‌بینی مطلوب‌تر خواهد بود.

در جدول ۵، مقادیر این معیارها برای دارایی ۱۰ام آورده شده است.



شکل ۷: سری زمانی قیمت پیش‌بینی شده برای دارایی دهم.

[7] Root Mean Squared Error
[8] Mean Absolute Error
[9] Theil inequality coefficient

جدول ۵: مقادیر معیارهای پیش‌بینی برای سری زمانی بازدهی نماد WOW

	MAE	RMSE	TIC
AR(۱)-GARCH(۱،۱)	۰٫۳۱۵۵	۰٫۴۰۶۳	۰٫۰۰۲۴

همان‌طور که در جدول ۵ مشاهده می‌شود، معیار TIC مقداری نزدیک به صفر را نتیجه داده است که نشان از دقت خوب مدل به لحاظ پیش‌بینی است. پس از برازش مدل با پارامترهای مناسب به بازدهی‌ها، داده‌های جدید برای ۳ سال آتی تولید کرده و مسأله بهینه‌سازی را در دو حالت حل کردیم. در مورد اول، برای بازدهی هر دارایی در هر دوره، بهترین توزیع برای بازدهی آن دارایی نرمال، تی-استیودنت و پایدار در نظر گرفته شد و در حالت دوم توزیع تجربی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج به ترتیب در جدول‌های ۶ و ۷ ارائه شده است.

جدول ۶: ارزش مورد انتظار برای سبد سرمایه به ازای مقادیر مختلف برای θ و γ و بهترین توزیع برازش شده.

γ \ θ	۰٫۰۱	۰٫۱	۰٫۵	۱	۲
۰٫۹	۰٫۸۴۳۶	۱٫۲۱۸	۱٫۳۹۸	۱٫۴۷۴	۱٫۴۹۸
۰٫۸	۰٫۸۹۱۲	۱٫۲۴۸	۱٫۴۲۸	۱٫۵۰۷	۱٫۵۰۷
۰٫۷	۰٫۹۴۳	۱٫۲۷۲	۱٫۴۶۱	۱٫۵۲۴	۱٫۵۱۶
۰٫۶	۱٫۰۰۷	۱٫۲۹۵	۱٫۴۸	۱٫۵۲۲	۱٫۵۲۴

جدول ۷: ارزش مورد انتظار برای سبد سرمایه به ازای مقادیر مختلف برای θ و γ با استفاده از مدل AR(۱)–GARCH(۱,۱) در درون‌یابی تکه‌ای خطی برای توزیع تجربی.

γ \ θ	۰.۰۱	۰.۱	۰.۵	۱	۲
۰٫۹	۰٫۷۶۲۹	۱٫۲۹۳	۱٫۶۰۶	۱٫۷۶۴	۱٫۸۵۹
۰٫۸	۰٫۸۷۵	۱٫۳۴۵	۱٫۶۷۲	۱٫۸۱۷	۱٫۸۵۹
۰٫۷	۱٫۰۰۹	۱٫۳۹۱	۱٫۷۳۶	۱٫۸۵۲	۱٫۸۵۹
۰٫۶	۱٫۰۶۵	۱٫۴۳۹	۱٫۷۹	۱٫۸۵۹	۱٫۸۵۹

همان‌طور که در جدول ۷ مشاهده می‌شود، سرمایه‌گذار با تنظیم یک سبد سرمایه از ۱۰۰ دارایی ASX100 و برنامه‌ریزی ماهانه انتظار می‌رود حداکثر ۸/۵۹٪ به دست آورد. این در حالی است که این رقم زمانی که پیش‌بینی صورت نگیرد، برابر ۸/۷۴٪ است. از طرفی، برای حالت‌هایی که $\theta = ۱$ باشد، برای هر γ بازدهی برای θ و γ مورد نظر

به هر دو روش (استفاده از پیش‌بینی یا عدم استفاده از آن) مسأله حل شود و از ضرایب پیشنهادی روشی استفاده گردد که بازدهی مورد انتظار بیشتری را نتیجه داده است.

الگوریتم برنامه‌ای که توسط آن به نتایج فوق رسیدیم، الگوریتم ۱ است.

الگوریتم ۱

۱: تنظیم نهایی داده‌ها و پارامترهای ورودی (پیش از اجرای برنامه)

۲: خواندن داده‌های ورودی (سری‌های زمانی قیمت دارایی‌ها)

۳: حذف سری‌های زمانی (دارایی‌های) با اطلاعات ناقص یا پرت

۴: انتخاب دارایی‌ها

۵: انتخاب نوع محاسبه بازدهی (پیوسته یا دوره‌ای)

۶: انتخاب نوع توزیع نویز (توزیع نرمال یا توزیع تی)

۷: محاسبه پارامترهای میانی لازم برای دسته‌بندی داده‌ها به مجموعه آموزش و مجموعه تست (تعداد دوره‌ها، T، تعداد روزهای مجموعه داده‌های تست، m، پنجره زمانی ثابت، τ)

۸: محاسبه بازدهی دارایی‌ها در دوره‌های تعیین شده

۹: بررسی شرط ایستایی سری‌های زمانی بازدهی

۱۰: ایستا کردن سری‌های زمانی ناایستا توسط تفاضلات مرتبه اول

۱۱: اختصاص مدل AR(1)-GARCH(1,1) برای هر دارایی

۱۲: فراخوانی تابعی برای برازش مدل‌های در نظر گرفته شده به داده‌های بازدهی (یافتن پارامترهای مدل‌های بالا) و تولید تعداد زیادی مسیر ممکن (۱۰۰ هزار مسیر) با استفاده از مدل‌های برازش شده و ذخیره آن‌ها

۱۳: پیش‌بینی داده توسط مدل‌های برازش داده شده

۱۴: برگرداندن متغیرهای تفاضل گرفته شده

۱۵: تخصیص یک توزیع ثابت برای همه دارایی‌ها در همه دوره‌ها توسط کاربر

۱۶: حل مسأله بهینه‌سازی و یافتن بهترین ترکیب دارایی‌ها در سبد سهام برای هر دوره (یافتن وزن هر دارایی در سبد سهام برای هر دوره) توسط داده‌های به دست آمده

۱۷: اصلاح آرایه وزن‌ها (صفر در نظر گرفتن وزن‌های بسیار کوچک)

۱۸: محاسبهٔ بازدهی مورد انتظار سبد در انتهای آخرین دوره

۱۹: نمایش و ذخیره خروجی‌ها

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، به‌جای استفاده از توزیع یکسان (با پارامترهای مختلف) برای همه دارایی‌ها در همه دوره‌ها، به کمک آزمون کلموگروف-اسمیرنف برای هر دارایی در هر دوره، بهترین توزیع برازنده را انتخاب کرده و سپس از آن‌ها برای حل مسأله بهینه‌سازی استفاده می‌شود. علاوه بر آن به‌منظور کاهش بیشتر خطای برازش، به‌جای اینکه توزیع پارامتری یا حتی برآوردگر توزیع هسته برای برازش سری زمانی بازده مورد استفاده قرار گیرد، از توزیع تجربی استفاده شده است. برای اینکه یک تابع نزدیک به تابع توزیع تجربی بوده و وارون‌پذیر باشد، از درونیابی تکه‌ای خطی تابع توزیع تجربی استفاده شده است. با استفاده دوباره از آزمون کولموگروف- اسمیرنوف نشان داده شده است که تابع درون‌یابی از نظر نزدیک‌تر بودن به واقعیت از برآوردگر توزیع هسته بهتر است. سرانجام پس از انتخاب معیارهای مناسب برای حل مسأله بهینه‌سازی برای انتخاب سبد سرمایه، بازده را پیش‌بینی کرده و سپس مسأله با داده‌های جدید حل شده است. برای این کار از مدل AR(۱)-GARCH(۱,۱) استفاده شده است. شرط لازم برای استفاده از این مدل ایستا بودن سری‌های زمانی است که نشان داده شده است که این شرایط اغلب برقرار است و در صورت ایستا نبودن، می‌توان با تفاضل‌گیری مرتبه اول یک سری زمانی ایستا به دست آورد.

تحقیقات آینده می‌تواند روش حل مسأله بهینه‌سازی (۵,۲) را تغییر دهد به این ترتیب که به‌جای بدست آوردن مقدار مورد انتظار سبد سرمایه برای یک میزان ریسک خاص، میزان ریسکی را که برای رسیدن به بازده مورد نظر دریافت می‌شود، به‌دست آورد و به‌جای استفاده از مدل AR(۱)-GARCII(۱,۱) مدل‌های کلی‌تر ARIMA-GARCH را به امتحان کرد.

References

1. Markowitz H., “Portfolio Selection,” J. Finance, Vol. 7, No. 1 (1952) 77–91.

2. Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C., “Time Series Analysis: Forecasting and Control”, Third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, (1994).

3. Chen Z., “Multiperiod consumption and portfolio decisions under the multivariate GARCH model with transaction costs and CVaR-based risk control”, OR Spectrum, Vol. 27, No. 4 (2005) 603–632.

4. Hamilton J.D., “Time series analysis”, Princeton University Press, NJ USA (1994).

5. Kamali R., Mahmoodi S., Jahandideh M.T., “Optimization of multi-period portfolio model after fitting best distribution”, Finance. Res. Lett., Vol. 30 (2019).

6. Liu Y.J., Zhang W.G., “A multi-period fuzzy portfolio optimization model with minimum transaction lots”, Eur. J. Op. Res., Vol. 242, No. 3 (2015) 933–941,.

7. Liu Y.J., Zhang W.G., Zhang P., “A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis”, Economic Modelling, Vol. 33, (2013) 113–119.

8. Li W., Luo Q., Zhu, J. Le, “Applications of AR*-GRNN model for financial time series forecasting”, Neural Comput. and Appl, Vol. 17 (2008) 441-448.

9. Markowitz H.M., “Portfolio selection: Efficient diversification of investments”, (1959).

10. Righi M.B., Borenstein D., “A simulation comparison of risk measures for portfolio optimization”, Finance. Res. Lett., Vol. 24 (2018).

11. Sun Y., Aw G., Teo K.L., Zhou G., “Portfolio optimization using a new probabilistic risk measure”, J. Ind. Manag. Opt., Vol. 11, No. 4 (2015) 1275–1283.

12. Sun Y., Aw G., Teo K.L., Zhu Y., Wang X., “Multi-period portfolio optimization under probabilistic risk measure”, Finance. Res. Lett., Vol. 18 (2016).

13. Zhi Wei S., Xing Ye Z., “Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market”, Appl. Math. Comput., Vol. 186, No. 1 (2007) 414–425.