Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Hyperbolic Gradient-Bourgoignon Flow

Hamed Fraji[1], Shahroud Azami[2], Ghodratallah Fasihi-Ramandi[3]✉

1. Department of pure mathematics, faculty of science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.
E-mail: h.faraji@edu.ikiu.ac.ir
2. Department of pure mathematics, faculty of science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.
E-mail: azami@sci.ikiu.ac.ir
3. Department of pure mathematics, faculty of science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.
✉E-mail: fasihi@sci.ikiu.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
21 October 2020
Revised form:
31 October 2020
Accepted:
4 Januray 2021
Published online:
21 May 2022

Keywords:
Ricci Flow; Evolution Equation; Compact Manifold.

Introduction

Ricci solitons as a generalization of Einstein manifolds introduced by Hamilton in mid 1980s. In the last two decades, a lot of researchers have been done on Ricci solitons. Currently, Ricci solitons have became a crucial tool in studding Riemannian manifolds, especially for manifolds with positive urvature. Ricci solitons also serve as similar solutions for the Ricci flow whic h is an evolutionary equation for the metrics of a Riemannian manifold. It is clear that the Ricci flow describes the heat character of the metrics and cu rvatures of manifolds.

On the other hand, hyperbolic Ricci flow was first study by Kong and Liu. This flow is a system of non-linear evolution partial differential equations of second order.

The short time existence and uniqueness theorem of hyperbolic geometric flo w has been proved in. It is shown that the hyperbolic Ricci flow carries many i nteresting properties of both Ricci flow as well as the Einstein equation.

According to these notions and their applications in both geometry and physics, in this paper we introduce a new hyperbolic flow and study its geometric quantities along to this flow. Self-similar solution of this flow may create interesting geometries on the underlying manifold.

Results

In this paper, we consider the hyperbolic Gradient-Bourguignon flow on a compact manifold M and show that this flow has a unique solution on short-time with imposing on initial conditions. After then, we find evolution equations for Riemannian curvature tensor, Ricci curvature tensor and scalar curvature of M under this flow. In the final section, we give some examples of this flow on some compact manifolds.

How to cite: Fraji, H., Azami, Sh., Fasihi-Ramandi, Gh; (2022) Hyperbolic Gradient-Bourgoignon Flow. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-19

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰۴٦-۲۰۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۰۰٤-۲۰۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی

حامد فرجی[۱]، شاهرود اعظمی[۲]، قدرت‌اله فصیحی رامندی[۳]✉

۱. گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران. پست الکترونیکی: h.faraji@edu.ikiu.ac.ir
۲. گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران. پست الکترونیکی: azami@sci.ikiu.ac.ir
۳. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران. پست الکترونیکی: gh_fasihi@aut.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۳۰
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۸/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۱۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:
شار ریچی،
معادلات تکاملی،
منیفلد فشرده.

چکیده

در این مقاله، شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی را روی منیفلد فشرده M در نظر گرفته و نشان می‌دهیم که این شار یک جواب یکتای زمان-کوتاه با شرط اولیه دارد. در ادامه تحت این شار، معادلات تکاملی را برای تانسور انحنای ریمانی و تانسور انحنای ریچی ارائه خواهیم داد. در پایان، چند مثال از این شار روی منیفلدهای مختلف ارائه می‌شود.

استناد: فرجی، حامد؛ اعظمی، شاهرود؛ فصیحی رامندی، قدرت‌اله؛ (۱۴۰۱). شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۹-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

امروزه، مفهوم شار ریچی و دیگر شارهای هندسی از ابزار کلیدی در هندسه دیفرانسیل و فیزیک نظری به شمار می‌روند. نخستین بار این مفهوم توسط همیلتون معرفی شد [۶] و به حل مسایل مهمی مانند حدس هندسی سازی تورستن انجامید. همچنین به کمک شارهای هندسی می‌توان مترهای کانونیک روی منیفلدها را پیدا نمود. اخیراً معاملات تکاملی برای ساختارهای هندسی وابسته به متر، تحت شارهای هندسی نیز از موضوعات مورد علاقه پژوهشگران در این حوزه قرار گرفته است [۴].

نظر به کاربرد و اهمیت شارهای هندسی، این مفهوم توسط کانگ و لیو تعمیم داده شد [۸]. شار ریچی در واقع یک معادله شبیه گرما برای مترهای ریمانی روی یک منیفلد است و شارهای هندسی هذلولوی که توسط کانگ و لیو معرفی شدند طبیعت موجی مترهای ریمانی روی یک منیفلد را مطالعه و بررسی می‌کنند. وجود و یکتایی جواب برای زمان کوتاه برای این شارهای هندسی، به‌کمک قضایای موجود در نظریه معادلات دیفرانسیل بیضوی نشان داده شده است [۳]. به‌علاوه، شارهای هندسی هذلولوی کاربردهایی نیز در فیزیک نظری یافته‌اند. به‌عنوان مثال، در حل مسائل مربوط به کیهان شناسی و نسبیت عام می‌توان کاربردهایی از این مفهوم را یافت [۹].

یکی از مؤلفان این مقاله در [۱]، تعمیمی از شار ریچی هذلولوی را معرفی نموده و وجود و یکتایی جواب آن را بررسی کرده است. همانطور که با ادغام شار ریچی و شار یامابه، مفهوم شار ریچی-بورگویگنون ایجاد شد در این مقاله، شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی را معرفی کرده و به بررسی وجود جواب یکتایی در زمان کوتاه می‌پردازیم. سپس معادلات تکاملی را برای برخی از ساختارهای هندسی تحت این شار جدید ارائه می‌دهیم. در نهایت مثال‌هایی از این شارها روی منیفلدهای مختلف ارائه خواهد شد.

۲. شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی

فرض کنید M یک منیفلد ریمانی هموار فشرده n بعدی باشد. تابع F را روی مترهای ریمانی روی M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم .

(۱)
$$F(g) := \int_M |Rm_g|_g^2 dV_g,$$

که Rm تانسور انحنا از نوع $\begin{pmatrix} ۰ \\ ۴ \end{pmatrix}$ می‌باشد.

با استدلالی شبیه گزاره ۷۰,۴ در [۲] و یا در مرجع [۱۰] می‌توان نوشت:

(۲)
$$grad(F) = \delta dRc - \check{R} + \frac{1}{4}|Rm|^2 g,$$

$$\breve{R}_{ij} = g^{mn} g^{pq} g^{rs} R_{impr} R_{jnqs}, \qquad (۳)$$

که δ، L^2-الحاقی مشتق خارجی d می‌باشد.

فرض کنید d مشتق خارجی از یک ۲-فرم متقارن باشد. با یک محاسبه ساده داریم:

$$dRc_{ijk} = \nabla Rc_{ijk} - \nabla Rc_{jik}. \qquad (۴)$$

شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی را روی M به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -gradF + 2\rho R g, \\ g(0) = g_0(x), \ \ \dfrac{\partial g}{\partial t}|_{t=0} = k(x). \end{cases} \qquad (۵)$$

که در آن $k(x)$ یک $\begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \end{pmatrix}$-تانسور متقارن روی M و ρ یک ثابت حقیقی می‌باشد.

در بخش بعد نشان می‌دهیم که دستگاه (۵) دارای یک جواب یکتا در زمان کوتاه می‌باشد.

۳. نتایج اصلی

در این بخش قضیه اساسی در خصوص وجود و یکتایی جواب دستگاه شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی را بیان و اثبات می‌کنیم. در ادامه قضایایی در خصوص معادلات تکاملی برای تانسور انحنای ریمانی، تانسور انحنای ریچی و انحنای اسکالر ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳٫۱. فرض کنید (M, g) یک منیفلد-n بعدی فشرده ریمانی و $k(x)$ یک $\begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \end{pmatrix}$-تانسور متقارن روی M باشد. آنگاه یک ثابت $T>۰$ موجود است به طوریکه دستگاه (۵) به ازای $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$ یک جواب هموار یکتای g روی $M \times [0, T)$ دارد.

اثبات. فرض کنید $\hat{g}_{ij}(t)$ شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی و $\varphi_t : M \to M$ یک خانواده از دیفئومورفیسم‌های M باشند. برگردان مترها را به صورت زیر

$$g_{ij} = \varphi_t^* \hat{g}_{ij}(x, t), \qquad (۶)$$

در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$$y(x, t) = \varphi_t(x) = (y^1(x, t), y^2(x, t), \ldots, y^n(x, t)), \qquad (۷)$$

یک نمایش از $y(x,t)$ در مختصات موضعی باشد. آن‌گاه

(۸)

$$g_{ij}(x,t)=\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}.\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}\,\hat{g}(y,t),$$

و

(۹)

$$\frac{\partial^{2} g_{ij}}{\partial t^{2}}(x,t)=\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{d^{2}\hat{g}_{\alpha\beta}}{dt^{2}}(y(x,t)),t)+\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\frac{\partial^{2} y^{\alpha}}{\partial t^{2}})\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}\hat{g}_{\alpha\beta}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^{j}}(\frac{\partial^{2} y^{\beta}}{\partial t^{2}})\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\hat{g}_{\alpha\beta}+2\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial t})\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{d\hat{g}_{\alpha\beta}}{dt}$$
$$+2\frac{\partial}{\partial x^{j}}(\frac{\partial y^{\beta}}{\partial t})\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{i}}\frac{d\hat{g}_{\alpha\beta}}{dt}+2\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial t})\frac{\partial}{\partial x^{j}}(\frac{\partial y^{\beta}}{\partial t})\hat{g}_{\alpha\beta}.$$

از طرف دیگر داریم

$$\frac{d\hat{g}_{\alpha\beta}}{dt}(y(x,t),t)=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial t}+\frac{\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}, \qquad (۱۰)$$

(۱۱)

$$\frac{d^{2}\hat{g}_{\alpha\beta}}{d^{2}t}(y(x,t),t)=\frac{\partial^{2}\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\lambda}}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial t}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial t}+2\frac{\partial^{2}\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial t}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial t}+\frac{\partial^{2}\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial^{2}t}+\frac{\partial\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\frac{\partial^{2}y^{\gamma}}{\partial^{2}t},$$

و

(۱۲)

$$\frac{\partial^{2}\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial t^{2}}(y,t)=-2gradF(y,t)+2\rho\hat{R}(y,t)\hat{g}_{\alpha\beta}(y,t).$$

همچنین داریم:

(۱۳)

$$\frac{\partial^{2}g_{ij}(x,t)}{\partial t^{2}}=-2gradF(y,t)\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}+2\rho\hat{R}(y,t)\hat{g}_{\alpha\beta}(y,t)\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}$$
$$+\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{\partial^{2}\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\lambda}}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial t}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial t}+2\frac{\partial^{2}g_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial t}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial t}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\hat{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial^{2}y^{\beta}}{\partial x^{j}}\frac{\partial^{2}y^{\alpha}}{\partial t^{2}})+\frac{\partial}{\partial x^{j}}(\hat{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{i}}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial t^{2}})$$
$$+\left[\frac{\partial\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}\hat{g}_{\alpha\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial x^{j}}\left(\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{i}}\hat{g}_{\alpha\gamma}\right)\right]\frac{\partial^{2}y^{\gamma}}{\partial t^{2}}$$
$$+2\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial t}\right)\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}}\left(\frac{\partial\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial t}+\frac{\partial\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}\right)$$
$$+2\frac{\partial}{\partial x^{j}}\left(\frac{\partial y^{\beta}}{\partial t}\right)\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\left(\frac{\partial\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial t}+\frac{\partial\hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}\right)+2\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x^{j}}\left(\frac{\partial y^{\beta}}{\partial t}\right)\hat{g}_{\alpha\beta}.$$

با استفاده از مختصات نرمال $\{x^i\}$ حول یک نقطه ثابت مانند $p \in M$ داریم $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = ۰$. بنابراین

(۱۴)

$$\frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\hat{g}_{\alpha\beta}) - \frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\hat{g}_{\alpha\beta}) = 0.$$

پس با استفاده از تساوی بالا می‌توان رابطهٔ (۱۳) را به صورت زیر نوشت :

(۱۵)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_{ij}(x,t)}{\partial t^2} &= -2gradF(y,t)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} + 2\rho\hat{R}(y,t)\hat{g}_{\alpha\beta}(y,t)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\\
&+ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial^2 \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma \partial y^\lambda}\frac{\partial y^\gamma}{\partial t}\frac{\partial y^\lambda}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma \partial t}\frac{\partial y^\gamma}{\partial t}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\\
&+ \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{mj}\frac{\partial x^m}{\partial y^\alpha}\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial t^2}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{mi}\frac{\partial x^m}{\partial y^\alpha}\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial t^2})\\
&+2\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\gamma}{\partial t} + \frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}\right)\\
&+2\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial t}\right)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\gamma}{\partial t} + \frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial t}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial t}\right)\hat{g}_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

اکنون $y(x,t) = \phi_t(x)$ را با مسئله مقدار اولیه زیر تعریف می‌کنیم

(۱۶)

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k}g^{jl}\left(\Gamma_{jl}^k - \bar{\Gamma}_{jl}^k\right)\\ y^\alpha(x,0) = x^\alpha, \frac{\partial}{\partial t}y^\alpha(x,0) = y_1^\alpha(x)\end{cases}$$

میدان برداری $V_i = g_{ik}g^{jl}(\Gamma_{jl}^k - \bar{\Gamma}_{jl}^k)$ که Γ_{jl}^k و $\bar{\Gamma}_{jl}^k$ ضرایب التصاق وابسته با مترهای $g(t)$ و $g_0(t)$ می‌باشند و $y_1^\alpha(x)$برای $\alpha = 1,\dots,n$ توابع هموارى روى منیفلدM می‌باشند را تعریف می‌کنیم. پس رابطه زیر بدست می‌آید

(۱۷)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2}(x,t) &= -2(gradF)_{ij}(x,t) + 2\rho R(x,t)g_{ij}(x,t)g_{ij}(x,t)\\ &+\nabla_i\nabla_j + \nabla_j\nabla_i + F\left(D_y, D_tD_xy\right),\end{aligned}$$

که

(۱۸)

$$D_y = \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial t}, \frac{\partial y^\alpha}{\partial t}\right), \quad D_tD_xy = \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial t}\right), \quad \alpha, i = 1,2,\dots,n.$$

با توجه به مطالب بالا، رابطه (۱۷) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

(۱۹)

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2}(x,t) = g^{kl}\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(x,t) - 2\rho g_{ij} g^{pq} g^{kl}\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^p \partial x^q}(x,t)$$
$$+2\rho g_{ij} g^{pq} g^{kl}\frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^p \partial x^k}(x,t) + G(g, D_x g) + F(Dy, D_t D_x y),$$

که در آن $g = (g_{ij})$ و $D_x y = \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$.

از طرفی چون

(۲۰)

$$\Gamma^k_{jl} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}\hat{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha}\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^i},$$

مسأله مقدار اولیه (۱۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود

(۲۱)

$$\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial t^2} = g^{jl}\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^l} - \overline{\Gamma}^\alpha_{jl}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k} + \hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^i}\right),$$
$$y^\alpha(x,0) = x^\alpha, \frac{\partial}{\partial t} y^\alpha(x,0) = y^\alpha_1(x).$$

قرار می دهیم

(۲۲)

$$\hat{\mu} = \left(g_{ij}, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \quad k,j,i = 1,2,\dots,n,$$

عبارت غیرخطی $G = G(\hat{\mu}) = G(g, D_x g)$ در دستگاه فوق هموار و نسبت به $D_x g$ مربعی است. چون هر دو دستگاه (۱۶) و (۲۱) برای $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$، دستگاه‌های اکیداً هذلولوی بوده و M یک منیفلد فشرده می‌باشد می‌توان از قضیه استاندارد معادله‌های هذلولوی [۵, ۷] نتیجه گرفت که دستگاه‌های فوق دارای جواب‌های یکتای هموار برای یک زمان کوتاه هستند.

قضیه۳,۲. تحت شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی (۵)، تانسور انحنای ریمانی R_{ijkl} از (M, g) در معادله تکاملی زیر صدق خواهد کرد.

(۲۳)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_{ijkl} \quad &= [-\nabla_i\nabla_l(gardF)_{kj} + \nabla_i\nabla_k(gradF)_{jl} + \nabla_j\nabla_l(gradF)_{ki} - \nabla_j\nabla_k(gradF)_{il}] \\ &-g^{pq}[R_{ijqk}(gradF)_{pl} + R_{ijql}(gradF)_{pk} + 2R_{ilqj}(gradF)_{il}] \\ &+[\rho(\nabla_i\nabla_k R g_{jl} - \nabla_i\nabla_l R g_{jk} - \nabla_j\nabla_k R g_{il} + \nabla_j\nabla_l R g_{ik}] \\ &+[2g_{pq}(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{il}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^q_{jk} - \frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{jl}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^q_{ik})],\end{aligned}$$

اثبات. برای علائم کریستوفل از متر ریمانی g تحت شار دستگاه (۵) داریم:

(۲۴)

$$\Gamma_{jl}^{h} = \frac{1}{2} g^{hm} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^m} \right),$$
$$\frac{\partial \Gamma_{jl}^{h}}{\partial t} = \frac{1}{2} g^{hm} \left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^l \partial t} + \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^j \partial t} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m \partial t} \right) + \frac{1}{2} g^{hm} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^m} \right),$$
$$\frac{\partial^2 \Gamma_{jl}^{h}}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^{hm}}{\partial t^2} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^l} + \partial g_{ml} \partial xj - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^m} \right) + 2. \frac{1}{2} \frac{\partial g^{hm}}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^l \partial t} + \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^j \partial t} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m \partial t} \right)$$
$$+ \frac{1}{2} g^{hm} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial t^2} \right) \right).$$

از طرفی برای تانسور انحنای ریمانی (M, g) داریم :

(۲۵)

$$R_{ijl}^{h} = \frac{\partial \Gamma_{jl}^{h}}{\partial x^i} - \frac{\Gamma_{il}^{h}}{\partial x^j} + \Gamma_{ip}^{h} \Gamma_{jl}^{p} - \Gamma_{jp}^{h} \Gamma_{il}^{p},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{ijl}^{h} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Gamma_{jl}^{h} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Gamma_{il}^{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Gamma_{ip}^{h} \Gamma_{jl}^{h} - \Gamma_{jp\Gamma_{il}^{p}}^{h} \right),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{ijkl} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (g_{hk} R_{ijl}^{h}) = g_{hk} \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{ijl}^{h} + R_{ijl}^{h} \frac{\partial^2 g_{hk}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial g_{hk}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijl}^{h},$$
$$= g_{hk} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Gamma_{jl}^{h} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Gamma_{il}^{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Gamma_{ip}^{h} \Gamma_{jl}^{p} - \Gamma_{jp}^{h} \Gamma_{il}^{p} \right) \right.$$
$$+ 2 \frac{\partial g_{hk}}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jl}^{h} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{il}^{h} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\Gamma_{ip}^{h} \Gamma_{jl}^{p} - \Gamma_{jp}^{h} \Gamma_{il}^{p} \right) \right]$$
$$+ R_{ijl}^{h} \frac{\partial^2 g_{hk}}{\partial t^2}. \qquad (۲۶)$$

مختصات نرمال $\{x^1, \dots, x^n\}$ را حول نقطه ثابت p روی M طوری انتخاب می‌کنیم که

(۲۷)

$$\Gamma_{ij}^{k}(p) = 0, \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0.$$

با توجه به این مختصات داریم:

(۲۸)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{ijkl} = g_{hk} \frac{\partial}{\partial x^i{}_i} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^{hm}}{\partial t^2} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^m} \right) \right.$$
$$\left. + 2. \frac{1}{2} \frac{\partial g^{hm}}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^l \partial t} + \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^l \partial t} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m \partial t} \right) \right]$$
$$+ g_{hk} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{1}{2} g^{hm} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial t^2} \right) \right) \right]$$
$$- g_{hk} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g^{hm}}{\partial t^2} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \right) + 2. \frac{1}{2} \frac{\partial g^{hm}}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^l \partial t} + \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^i \partial t} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m \partial t} \right) \right]$$
$$- g_{hk} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{1}{2} g^{hm} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial t^2} \right) \right) \right) \right]$$
$$+ 2 g_{hk} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{ip}^{h} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jl}^{p} - \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jp}^{h} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{il}^{p} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&+2\frac{\partial g_{hk}}{\partial t}[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial g^{hm}}{\partial t}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^m}\right)\right)\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial g^{hm}}{\partial t}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m}\right)\right)\right)]\\
&+\frac{2\partial g_{hk}}{\partial t}\frac{1}{2}g^{hm}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial g_{ml}}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial t}\right)\right)\\
&-\frac{2\partial g_{hk}}{\partial t}\frac{1}{2}g^{hm}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial g_{ml}}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right)\right)+R^k_{ijl}\frac{\partial^2 g_{hk}}{\partial t^2}.
\end{aligned}
$$

از طرفی با توجه به اینکه $g^{hm}g_{ml}=\delta^h_l$ می‌توان نوشت:

(۲۹)

$$\frac{\partial g^{hm}}{\partial t}=-g^{hp}g^{mp}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t},$$

(۳۰)

$$\frac{\partial^2 g^{hm}}{\partial x^k\partial t}=-g^{hp}g^{mp}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 g^{hm}}{\partial^2}=-g^{hp}g^{mp}\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial t^2}+2g^{hp}g^{rq}g^{sm}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial g_{rs}}{\partial t}. \qquad (۳۱)$$

با استفاده از روابط بالا و با یک محاسبه سرراست معادله (۲۸) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

(۳۲)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_{ijkl}&=\left(-\frac{1}{2}g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial t^2}+g^{rq}g^{pm}\frac{\partial g_{kq}}{\partial t}\frac{\partial g_{rp}}{\partial t}\right)\\
&\times\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^m}\right)-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m}\right)\right]\\
&-g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^i\partial t}(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^j\partial t}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m\partial t})+g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^j\partial t}(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^i\partial t}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m\partial t})\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^l}\left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\left(\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}\left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial t^2}\right)\right]\\
&-\frac{1}{2}[\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^l}(\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial t^2})+\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^i}(\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial t^2})-\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial t^2}\right)\\
&+2g_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^h_{ip}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{jl}-\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^h_{jp}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{il}\right)+R^h_{ijl}\frac{\partial^2 g_{hk}}{\partial t}\\
&-g^{hp}g^{mq}\frac{\partial g_{nk}}{\partial t}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}[\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^m})-[\frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m})].
\end{aligned}
$$

با استفاده از ویژگی‌های مختصات نرمال حول نقطه p و با یک محاسبه سرراست داریم

(۳۳)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_{ijkl}}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}[\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^l}(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial t^2}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial t^2}) - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial t^2})] \\ &-\frac{1}{2}[\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^l}(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial t^2}) + \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}(\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial t^2}) - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial t^2})] \\ &-g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^i \partial t}(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^l \partial t} + \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^j \partial t} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m \partial t}) \\ &+g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^j \partial t}(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^l \partial t} + \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^i \partial t} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m \partial t}) \\ &+2g_{hk}(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ip}^h \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jl}^p - \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jp}^h \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{il}^p).\end{aligned}$$

از طرفی با توجه به این‌که $\frac{\partial^۲ g}{\partial t} = -2gradF + 2\rho Rg$، به دست می‌آوریم

(۳۴)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_{ijkl}}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}[\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^l}(-2(gradF)_{kj} + 2\rho R g_{kj}) - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}(-2(gradF)_{kj} + 2\rho R g_{kj})] \\ &-\frac{1}{2}[\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^l}(-2(gradF)_{ki} + 2\rho R g_{ki}) - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}(-2(gradF)_{il} + 2\rho R g_{il})] \\ &+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(-2(gradF)_{kl} + 2\rho R g_{kl}) - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}(-2(gradF)_{kl} + 2\rho R g_{kl})] \\ &-g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^i \partial t}(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^l \partial t} + \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^j \partial t} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m \partial t}) \\ &+g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^j \partial t}(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^l \partial t} + \frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^i \partial t} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m \partial t}) \\ &+2g_{hk}(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ip}^h \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jl}^p - \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jp}^h \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{il}^p).\end{aligned}$$

همچنین می‌دانیم

(۳۵)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^l}((gradF)_{jk}) = \nabla_i \nabla_l (gradF)_{jk} - \nabla_i \Gamma_{lk}^p R_{jp} - \nabla_i \Gamma_{lj}^p (gradF)_{kp},$$

با یک محاسبهٔ سر راست داریم

(۳۶)

$$
\begin{aligned}
&-g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^i\partial t}\left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^j\partial t}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m\partial t}\right)+g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^j\partial t}\left(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^i\partial t}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m\partial t}\right)\\
&\quad+2g_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ip}^h\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jl}^p-\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jp}^h\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{il}^p\right)\\
&=-g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^i\partial t}\left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^j\partial t}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m\partial t}\right)+g^{pm}\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial^j\partial t}\left(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^i\partial t}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m\partial t}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}g^{pm}\left(\frac{\partial_{ki}^2}{\partial x^p\partial t}+\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^i\partial t}-\frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^k\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^j\partial t}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m\partial t}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}g^{pm}\left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^p\partial t}+\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^j\partial t}-\frac{\partial^2 g_{jp}}{\partial x^k\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^i\partial t}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m\partial t}\right)\\
&\quad=g^{pm}[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_{mj}^2}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^j\partial t}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^m\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^p\partial t}-\frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^k\partial t}-\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^i\partial t}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_{mi}^2}{\partial x^l\partial t}+\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^i\partial t}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^p\partial t}-\frac{\partial^2 g_{jp}}{\partial x^k\partial t}-\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^j\partial t}\right)\\
&\quad=2g_{pq}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{il}^p\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jk}^q-\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jl}^p\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ik}^q\right).
\end{aligned}
$$

با جایگذاری معادلهٔ (۳۶) در رابطهٔ (۳۴) به دست می‌آوریم

(۳۷)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_{ijkl}\quad&=-\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^l}(gradF)_{kj}+\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}(gradF)_{jl}+\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^l}(gradF)_{ki}-\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}(gradF)_{il}\\
&-\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}(gradF)_{kl}+\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^i}(gradF)_{kl}\\
&+\rho[\frac{\partial^2 R}{\partial x^i\partial x^l}g_{kj}-\frac{\partial^2 R}{\partial x^i\partial x^k}g_{jl}-\frac{\partial^2 R}{\partial x^i\partial x^k}g_{jl}-\frac{\partial^2 R}{\partial x^j\partial x^l}g_{ki}+\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}g_{il}]\\
&+\rho[\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^i\partial x^l}R-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k}R-\frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^j\partial x^l}R+\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^j}R]\\
&+2g_{pq}(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{il}^p\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jk}^q-\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jl}^p\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ik}^q.
\end{aligned}
$$

اکنون، با جایگذاری رابطه (۳۵) در معادله (۳۷) و تساوی $\nabla_j\Gamma^p_{ki}(gradF)_{pl} = \nabla_j\Gamma^p_{ik}(gardf)_{pl}$ ، به تساوی زیر می‌رسیم

(۳۸)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_{ijkl} \quad &= [-\nabla_i\nabla_l(gardF)_{kj} + \nabla_i\nabla_k(gradF)_{jl} + \nabla_j\nabla_l(gradF)_{ki} - \nabla_j\nabla_k(gradF)_{il}]\\ &-g^{pq}[R_{ijqk}(gradF)_{pl} + R_{ijql}(gradF)_{pk} + 2R_{ilqj}(gradF)_{il}]\\ &+[\rho(\nabla_i\nabla_k Rg_{jl} - \nabla_i\nabla_l Rg_{jk} - \nabla_j\nabla_k Rg_{il} + \nabla_j\nabla_l Rg_{ik})]\\ &+[2g_{pq}(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{il}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^q_{jk} - \frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{jl}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^q_{ik})].\end{aligned}$$

قضیه۳،۳. معادله تکاملی تانسور انحنای ریچی تحت شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

(۳۹)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R_{ij}) \quad &= g^{kl}[-\nabla_i\nabla_l(gardF)_{kj} + \nabla_i\nabla_k(gradF)_{jl} + \nabla_j\nabla_l(gradF)_{ki} - \nabla_j\nabla_k(gradF)_{il}]\\ &-g^{pq}g^{kl}[R_{ijqk}(gradF)_{pl} + R_{ijql}(gradF)_{pk} + 2R_{ilqj}(gradF)_{il}]\\ &+g^{kl}[\rho(\nabla_i\nabla_k Rg_{jl} - \nabla_i\nabla_l Rg_{jk} - \nabla_j\nabla_k Rg_{il} + \nabla_j\nabla_l Rg_{ik})] + g^{kl}2\rho RR_{ijkl}\\ &+2g^{kl}g_{pq}[(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{il}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^q_{jk} - \frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{jl}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^q_{ik})] - 2g^{kp}g^{lq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial R_{ikjl}}{\partial t}\\ &-g^{kp}g^{lq}[-2(gradF)_{pq} + 2\rho Rg_{pq}]R_{ikjl} + 2g^{kp}g^{rq}g^{sl}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial g_{rs}}{\partial t}R_{ikjl}.\end{aligned}$$

اثبات. مختصات نرمال $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ را حول نقطه p در نظر می‌گیریم:

(۴۰)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R_{ij}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(g^{kl}R_{ikjl}) = g^{kl}\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_{ikjl} + 2\frac{\partial g^{kl}}{\partial t}\frac{\partial R_{ikjl}}{\partial t} + R_{ikjl}\frac{\partial^2 g^{kl}}{\partial t^2},$$

از طرفی داریم

(۴۱)

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^{kl}}{\partial t} &= -g^{kp}g^{lq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t},\\ \frac{\partial^2 g^{kl}}{\partial t^2} &= -g^{kp}g^{lq}\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial t^2} + 2g^{kp}g^{rq}g^{sl}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial g_{rs}}{\partial t}.\end{aligned}$$

با جایگذاری (۴۱) در رابطهٔ (۴۰) می‌توان دید

(۴۲)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R_{ij}) = g^{kl}\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_{ikjl} - 2g^{kp}g^{lq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial R_{ikjl}}{\partial t} - g^{kp}g^{lq}\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial t^2}R_{ikjl}$$
$$+2g^{kp}g^{rq}g^{sl}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial g_{rs}}{\partial t}R_{ikjl},$$

با استفاده از قضیه قبل و جایگذاری معادله $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -2gradF + 2\rho g$ در معادله (۴۲) به معادله (۳۹) می‌رسیم.

قضیه ۳,۴. تحت شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی (۵)، معادله تکاملی انحنای اسکالر به صورت زیر نوشته می‌شود:

(۴۳)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R) \quad &= g^{ij}g^{kl}[-\nabla_i\nabla_l(gardF)_{kj} + \nabla_i\nabla_k(gradF)_{jl} + \nabla_j\nabla_l(gradF)_{ki} - \nabla_j\nabla_k(gradF)_{il}] \\ &-g^{ij}g^{kl}g^{pq}[R_{ijqk}(gradF)_{pl} + R_{ijql}(gradF)_{pk} + 2R_{ilqj}(gradF)_{il}] \\ &+g^{ij}g^{kl}[\rho(\nabla_i\nabla_k Rg_{jl} - \nabla_i\nabla_l Rg_{jk} - \nabla_j\nabla_k Rg_{il} + \nabla_j\nabla_l Rg_{ik})] + g^{ij}g^{kl}2\rho RR_{ijkl} \\ &+2g^{ij}g^{kl}g_{pq}[(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{il}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^q_{jk} - \frac{\partial}{\partial t}\Gamma^p_{jl}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^q_{ik})] - 2g^{ij}g^{kp}g^{lq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial R_{ikjl}}{\partial t} \\ &-g^{ij}g^{kp}g^{lq}[-2(gradF)_{pq} + 2\rho Rg_{pq}]R_{ikjl} + 2g^{ij}g^{kp}g^{rq}g^{sl}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial g_{rs}}{\partial t}R_{ikjl} \\ &-2g^{ip}g^{jq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + R_{ij}(-g^{ip}g^{jq}\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial t^2} + 2g^{ip}g^{rq}g^{sj}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial g_{rs}}{\partial t}).\end{aligned}$$

اثبات. مختصات نرمال $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ را حول نقطه p در نظر می‌گیریم. طبق تعریف انحنای اسکالر و استفاده از معادلات (۴۱) و انجام یک محاسبه ساده داریم:

(۴۴)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}R = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(g^{ij}R_{ij}\right) \quad = g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_{ij} + 2\frac{\partial}{\partial t}R_{ij}.\frac{\partial}{\partial t}g^{ij} + R_{ij}\frac{\partial^2 g^{ij}}{\partial t^2}$$
$$= g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_{ij} - 2g^{ip}g^{jq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + R_{ij}(-g^{ip}g^{jq}\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial t^2}2g^{ip}g^{rq}g^{sj}\frac{\partial g_{pq}}{\partial t}\frac{\partial g_{rs}}{\partial t})$$

با بکارگیری معادله تکاملی انحنای ریچی و جایگذاری معادلهٔ $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -2gradF + 2\rho g$ در معادله (۴۴) به معادله (۴۳) می‌رسیم.

۴. مثال‌ها

مثال ۴,۱. فرض کنید $(M, g(0))$ یک منیفلد ریمانی فشرده دلخواه و متر ابتدایی $g_{ij}(0,x)$ ریچی تخت باشد یعنی $(R_{ij}(0,x) = 0)$.

بنابراین باتوجه به این‌که انحنای ریچی صفر است، داریم:

(۴۵)

$$Rm = dRc = R = 0$$

با استفاده از روابط (۳) و (۴) و جای‌گذاری در معادلهٔ (۲) داریم: $gradF = 0$.

در نتیجه با توجه به این‌که $gradF + ۲\rho Rg = ۰$ آنگاه $g_{ij}(t,x) = g_{ij}(۰,x)$, یک جواب برای معادله شار زیر است:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -gradF + 2\rho Rg, \quad (۴۶)$$

بنابراین هر متر ریچی تخت یک جواب برای شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی می‌باشد.

مثال ۴,۲. فرض کنید $(M, g(0))$ یک منیفلد ریمانی بسته و متر ابتدایی $g(0)$ اینشتینی باشد. یعنی یک ثابت λ موجود است به طوریکه

$$R_{ij} = \lambda g_{ij} \quad (۴۷)$$

می‌توان نشان داد که دستگاه (۵) دارای جواب می‌باشد. برای این منظور فرض کنید

$$g_{ij}(t,x) = c(t) g_{ij}(0). \quad (۴۸)$$

چون متر ابتدایی اینشتینی است آن‌گاه

(۴۹)

$$R_{ij}(t) = R_{ij}(0) = \lambda g_{ij}(0)$$

(۵۰)

$$R_{g(t)} = \frac{n\lambda}{c(t)}$$

از طرفی با توجه به روابط (۲) و (۳) داریم:

(۵۱)

$$(gradF)_{ij} = \delta dRc - g^{mn} g^{pq} g^{rs} R_{impr} R_{jnqs} + \frac{1}{4} |Rm|^2 g_{ij}.$$

با استفاده از روابط زیر

(۵۲)

$$R_{ijkl} = \frac{\lambda n}{c(t)} \left(g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il}\right),$$
$$R_{ijkl} = \lambda n c(t) \left(g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il}\right)(0).$$

و با یک محاسبهٔ ساده داریم:

(۵۳)

$$\begin{aligned}
|Rm|^2 &= R_{ijkl} R^{ijkl} = R_{ijkl} g^{ia} g^{jb} g^{kc} g^{lb} R_{abcd} \\
&= \lambda^2 n^2 c^2(t) (g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il}) g^{ia} g^{jb} g^{kc} g^{ld} (g_{ac} g_{bd} - g_{bc} g_{ad}) \\
&= \lambda^2 n^2 c^2(t) (\delta_{ak} \delta_{lb} - \delta_{kb} \delta_{al})(\delta_{ak} \delta_{lb} - \delta_{kb} \delta_{al}) \\
&= \lambda^2 n^2 c^2(t) (\delta_{ak} \delta_{lb} - \delta_{kb} \delta_{al})^2 = 2\lambda^2 n^3 (n-1) c^2(t).
\end{aligned}$$

بنابراین

(۵۴)

$$\frac{1}{4}|Rm|^2 = \frac{\lambda^2 n^3(n-1)}{2} c(t).$$

با استفاده از روابط (۵۱) و (۵۴) و یک محاسبه سرراست و اینکه $dRc = 0$ داریم

(۵۵)

$$(gradF)_{ij} = -2(n-1)c(t)^{-1}\lambda^2 n^2 g_{ij} + \frac{n^3(n-1)\lambda^2}{2} c(t) g_{ij}$$

بنابراین معادله (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

(۵۶)

$$\frac{\partial^2 c(t) g_{ij}(0)}{\partial t^2} = 2(n-1)c(t)^{-2}\lambda^2 n^2 g_{ij}(0) - \frac{n^3(n-1)\lambda^2}{2} c^2(t) g_{ij}(0) 2\rho n\lambda g_{ij}(0)$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 c(t)}{\partial t^2} = 2(n-1)c(t)^{-2}\lambda^2 n^2 - \frac{n^3(n-1)\lambda^2}{2} c^2(t) + 2\rho n\lambda. \qquad (۵۷)$$

لذا با شرط اولیه $c(\cdot) = \dot{c}(\cdot) = ۱$، اگر ضریب متر تعریف شده g در رابطه (۴۸) در معادله فوق صدق کند آنگاه g جواب شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی خواهد بود. فرض کنید $(S^n, g_{can}^{S^n})$ کره n بعدی با انحنای ثابت کانونی ۱ و Nیک رویه و g_{can}^N متر کانونی با انحنای ثابت ۱- باشد. منیفلد ریمانی $M = S^n \times N$ را با متر= g^{AB} $Ag_{can}^{S^۲} \oplus \; Bg_{can}^N$که A و B توابعی حقیقی مقدار هستند در نظر می‌گیریم. به‌دنبال یافتن جواب برای دستگاه (۵) می‌باشیم. با توجه به تعریف متر داریم :

(۵۸)

$$g_M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

(۵۹)

$$Rc = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

با انجام یک محاسبه داریم

(۶۰)

$$gradF = \begin{bmatrix} \frac{A^2-B^2}{2AB^2} & 0 \\ 0 & \frac{B^2-A^2}{2AB^2} \end{bmatrix},$$

$$R = g^{ij} R_{ij} = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right). \qquad (۶۱)$$

با جایگذاری روابط فوق در دستگاه (۵) داریم

(۶۲)

$$\begin{bmatrix} \ddot{A} & 0 \\ 0 & \ddot{B} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{A^2-B^2}{2AB^2} & 0 \\ 0 & \frac{B^2-A^2}{2AB^2} \end{bmatrix} + 2\rho\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{B^2-A^2}{2AB^2} + \frac{2\rho(B-A)}{B} & 0 \\ 0 & -\frac{B^2-A^2}{2AB^2} + \frac{2\rho(B-A)}{A} \end{bmatrix}.$$

از تساوی ماتریس‌های فوق داریم

(۶۳)

$$\begin{cases} \ddot{A} = \frac{B^2-A^2}{2AB^2} + 2\rho(\frac{B-A}{B}), \\ \ddot{B} = -\frac{B^2-A^2}{2AB^2} + 2\rho(\frac{B-A}{A}). \end{cases}$$

از معادلات بالا رابطه بین ضرایب A و B به صورت زیر به دست می‌آید.

(۶۴)

$$\ddot{A} + \ddot{B} = 2\rho\left(\frac{B-A}{B}\right) + 2\rho\left(\frac{B-A}{A}\right).$$

همانطور که می‌دانیم شار ریچی حجم را حفظ می‌کند. لذا بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد حجم برابر ۱ می‌باشد و بنابراین $A = \frac{1}{B}$. لذا معادله (۶۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

(۶۵)

$$\ddot{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} - A^3\right) + 2\rho(1 - A^2)$$

لذا اگر ضریب A با شرط اولیه $A(0) = 1$ و $\dot{A}(0) = 1$، در معادله فوق صدق کند آنگاه متر g یک جواب شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی خواهد بود.

مثال ۴،۴. منیفلد ریمانی $M = S^3 \times \mathbb{R}$ با متر

(۶۶)

$$g_{AB} = Ag_{can} \oplus Bdt^2,$$

را در نظر می‌گیریم. که g_{can} متر روی کره S^3 با انحنای ۱ می‌باشد. چون متر g_{AB} از حاصلضرب دو متر اینشتینی بدست می‌آید، لذا

$$\delta dRc = 0. \qquad (۶۷)$$

با توجه به تعریف متر ریمانی و با انجام محاسبه سرراست داریم

$$Rc = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (۶۸)$$

بنابراین

$$R = \frac{1}{A}, \qquad (۶۹)$$

پس

$$Rg = \frac{1}{A}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}. \qquad (۷۰)$$

همچنین

$$gradF = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & -\frac{3B}{A^2} \end{bmatrix}. \qquad (۷۱)$$

با جایگذاری روابط فوق در دستگاه (۵) رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\begin{bmatrix} \ddot{A} & 0 \\ 0 & \ddot{B} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{-3B}{A^2} \end{bmatrix} + 2\rho\left(\frac{1}{A}\right)\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{A} - 2\rho & 0 \\ 0 & -\frac{3B}{A^2} + \frac{2\rho B}{A} \end{bmatrix} \qquad (۷۲)$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \ddot{A} = \frac{1}{A} - 2\rho, \\ \ddot{B} = -\frac{3}{A^2}B + 2\rho\frac{B}{A}. \end{cases} \qquad (۷۳)$$

لذا با شرط اولیه $A(0) = \dot{A}(0) = 1$ و $B(0) = \dot{B}(0) = 1$، اگر ضرایب متر تعریف شده g در معادلات فوق صدق کنند آنگاه g، جواب شار گرادیان-بورگویگنون هذلولوی خواهد بود.

References

1. Azami S., "Harmonic-hyperbolic geometric flow", Electron. J. Differential Equations (2017), Paper No. 165, 9 pp.

2. Besse A.L., "Einstein Manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 10", Springer-Verlag (1987).

3. Dai W., Kong D., Liu K., "Hyperbolic geometric flow (I): short-time existence and nonlinear stability". Pure Appl. Math. Q. 6 (2010), no. 2, Special Issue: In honor of Michael Atiyah and Isadore Singer, 331–359.

4. Daneshvar F., Razavi A., "Evolution and monotonicity for a class of quantities along the Ricci-Bourguignon flow", J. Korean Math. Soc. 56 (2019), no. 6, 1441–1461.

5. Fritz J., Delay d., "singularity formation in solutions of nonlinear wave equations in higher dimensions", Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), no. 6, 649–682.

6. Hamilton R., "The Ricci flow on surfaces", Contemporary Mathematics, 71, (1988) 237-261.

7. Kato T., "Quasi linear equations of evolution with applications to partial differential equations", Springer Lecture Notes 448, (1975), 25-70.

8. Kong D., Liu K., "Wave character of metrics and hyperbolic geometric flow", J. Math. Phys. 48 (2007), no. 10, 103508, 14 pp.

9. Samuel J., Sutirtha Roy ch., "Geometric flows and black hole entropy", Classical Quantum Gravity 24 (2007), no. 11, F47–F54.

10. Streets J., "The Gradient Flow of $\int_M |Rm|^2$", J Geom Anal 18, (2008), 249–271.