Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Linear maps on von-Neumann algebras behaving like anti-derivations at orthogonal elements

Hoger Gharamani[1] ✉, Behrooz Fadaee[2], Kamal Fallahi[3]
1. Department of Mathematics, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.
✉E-mail: h.ghahramani@uok.ac.ir
2. Department of Mathematics, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.
E-mail: b.fadaee@sci.uok.ac.ir
3. Department of Mathematics, Payam Noor University of Technology, Tehran, Iran.
E-mail: fallahi1361@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
9 November 2020
Revised form:
20 January 2021
Accepted:
31 January 2021
Published online:
14 May 2022

Keywords:
anti-derivations; orthogonal elements; von-Neumann algebras.

ABSTRACT

Introduction

Through this paper all algebras and linear spaces are on the complex field $\mathbb{C}$. Let $\mathcal{A}$ be an algebra and $\mathcal{M}$ be an $\mathcal{A}$-bimodule. The linear mapping $d: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ is called an anti-derivation if $d(xy) = yd(x) + d(y)x$ $(x, y \in \mathcal{A})$. Also, d is called a derivation if $d(xy) = xd(y) + d(x)y$ $(x, y \in \mathcal{A})$. The linear mapping $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ is a Jordan derivation if $d(x^2) = xd(x) + d(x)x$ $(x \in \mathcal{A})$. Any anti-derivation and derivation is a Jordan derivation, but the converse is not necessarily true. Jordan in [1] has shown that every continuous Jordan derivation on C*-algebra $\mathcal{A}$ into any Banach $\mathcal{A}$-bimodule is a derivation. Derivations and anti-derivations are important classes of mappings on algebras which have been used to study of structure of algebras. We refer to [2] and the references there in.

Bersar studied in [3] additive maps on prime ring contain a non-trivial idempotent satisfying

$$x, y \in \mathcal{A}, \quad xy = 0 \implies \delta(x)y + x\delta(y) = 0\,.$$

Later, many studies have been done in this case and different results were obtained, for instance, see [4, 5, 6, 7, 8, 9] and the references therein. Recently [10, 11, 12, 13], the problem of characterizing continuous linear maps behaving like derivations or anti-derivations at orthogonal elements for several types of orthogonality conditions on *-algebras have been studied. In this paper we study the above problems on von Neumann algebra.

Material and methods

In this article, the subsequent conditions on a continuous linear map $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ where $\mathcal{A}$ is a *-algebra has been considered:

$$xy^* = 0 \Longrightarrow x\delta(y)^* + \delta(x)y^* = 0, \quad (x, y \in \mathcal{A});$$

$$xy^* = 0 \Longrightarrow x^*\delta(y) + x\delta(y)^* = 0, \quad (x, y \in \mathcal{A}).$$

We consider following conditions on continuous linear map on von Neumann algebras:

$$xy = 0 \Longrightarrow y\delta(x) + \delta(y)x = 0, \quad (x, y \in \mathcal{A});$$

$$xy^* = 0 \Longrightarrow y^*\delta(x) + \delta(y)^*x = 0, \quad (x, y \in \mathcal{A});$$

$$x^*y = 0 \Longrightarrow y\delta(x)^* + \delta(y)x^* = 0, \quad (x, y \in \mathcal{A}).$$

Over methods are based on structure of von Neumann algebras and the fact that every derivation on von Neumann algebras is inner.

Main Results

The followings are the main results of our paper.

Theorem. Let $\mathcal{A}$ be a von Neumann algebra and $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is a continuous linear map. Then δ satisfies $y\,\delta(x) + \delta(y)x = 0$ for all $x, y \in \mathcal{A}$ with $xy = 0$ if only if there are elements $\mu, \nu \in \mathcal{A}$ such that $\delta(x) = x\,\mu - \nu x$, where $\mu - \nu \in Z\,(\mathcal{A})$ and $[[x, y], \mu] + 2[x, y](\mu - \nu) = 0$ for all $x, y \in \mathcal{A}$.

Theorem. Let $\mathcal{A}$ be a von Neumann algebra and $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is a continuous linear map. Then δ satisfies $y^*\delta(x) + \delta(y)^*x = 0$ for all $x, y \in \mathcal{A}$ with $xy^* = 0$ if only if there are elements $\mu, \nu \in \mathcal{A}$ such that $\delta(x) = \nu x - \mu x$, where $\mathrm{Re}\mu \in Z\,(\mathcal{A})$ and

$$\big[[x, y], \mu\big] + (\nu - \mu)^*[x, y] + [x, y](\nu - \mu) = 0,$$

for all $x, y \in \mathcal{A}$.

Theorem. Let $\mathcal{A}$ be a von Neumann algebra and $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is a continuous linear map. Then δ satisfies $\delta(\mathrm{y})x^* + y\delta(x)^* = 0$ for all $x, y \in \mathcal{A}$ with $x^*\mathrm{y} = 0$ if only if there are elements $\mu, \nu \in \mathcal{A}$ such that $\delta(x) = x\mu - \nu x$, where $\mathrm{Re}\mu \in Z\,(\mathcal{A})$ and

$$\big[[x, y], \mu\big] + [x, y](\mu - \nu)^* + (\mu - \nu)[x, y] = 0,$$

for all $x, y \in \mathcal{A}$.

Conclusion

Let $\mathcal{A}$ be a von Neumann algebra and $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ be a continuous linear map. Let δ be anti-derivation at orthogonal elements. We characterized the structure of δ according to the (generalized) inner derivation.

We guess that the results obtained can also be proved on standard operator algebras.

How to cite: Gharamani, H., Fadaee, B., Fallahi, K.; (2022). Linear maps on von-Neumann algebras behaving like anti-derivations at orthogonal elements. *Mathematical Researches*, 8 (1), 224-234

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نگاشت‌های خطی پیوسته روی جبرهای فون-نویمان با مقادیر مشابه پادمشتق‌ها در عناصر متعامد

هوگر قهرمانی[1]✉، بهروز فدایی[2]، کمال فلاحی[3]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران. پست الکترونیکی: h.ghahramani@uok.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران. پست الکترونیکی: b.fadaee@sci.uok.ac.ir

۳. دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. پست الکترونیکی: fallahi1361@gmail.com

اطلاعات مقاله | **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۱۹
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۰۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:
پادمشتق،
جبرهای فون-نویمان،
عناصر متعامد،
مرکز جبر.

فرض کنید $\mathcal{A}$ جبری فون-نویمان و $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ نگاشت خطی پیوسته باشد. همچنین فرض کنید δ در یکی از شرایط زیر صدق کند:

$$xy = 0 \Longrightarrow y\delta(x) + \delta(y)x = 0, \qquad (x, y \in \mathcal{A});$$

$$xy^* = 0 \Longrightarrow y^*\delta(x) + \delta(y)^*x = 0, \qquad (x, y \in \mathcal{A});$$

$$x^*y = 0 \Longrightarrow y\delta(x)^* + \delta(y)x^* = 0, \qquad (x, y \in \mathcal{A}).$$

در این مقاله در هر یک از حالت‌های ذکر شده ساختار δ را مشخصه‌سازی می‌کنیم.

استناد: قهرمانی، هوگر؛ فدایی، بهروز؛ فلاحی، کمال؛ (۱۴۰۱). نگاشت‌های خطی پیوسته روی جبرهای فون-نویمان با مقادیر مشابه پادمشتق‌ها در عناصر متعامد. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۲۳۴-۲۲۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

در سرتاسر این مقاله همه جبرها و فضاهای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ در نظر گرفته می‌شوند. فرض کنید $\mathcal{A}$ جبر و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-دومدول باشد. نگاشت خطی $d: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ را "پادمشتق" می‌نامیم هرگاه $d(xy) = yd(x) + d(y)x$ $(x, y \in \mathcal{A})$. همچنین d را مشتق می‌نامیم هرگاه $d(xy) = xd(y) + d(x)y$ $(x, y \in \mathcal{A})$. نگاشت خطی $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ یک مشتق جردن نامیده می‌شود هرگاه $d(x^2) = xd(x) + d(x)x$ $(x \in \mathcal{A})$. هر پادمشتق و هر مشتق یک مشتق جردن است اما عکس آن لزوماً برقرار نیست. جانسون[1] در [۱] نشان داده است که هر مشتق جردن پیوسته از یک C^*-جبر $\mathcal{A}$ به توی هر باناخ $\mathcal{A}$-دومدول، یک مشتق می‌باشد. مشتق‌ها و پادمشتق‌ها از رده‌های مهم نگاشت‌ها روی جبرها می‌باشند که در مطالعه ساختار آن‌ها دارای اهمیت هستند. برای جزئیات بیشتر [۲] و منابع عنوان شده در آن را پیشنهاد می‌نماییم.

در سال‌های اخیر مطالعات زیادی در مورد شرایطی موضعی که تحت آنها نگاشت‌های روی جبرهای (باناخ) مشخصه‌سازی شوند، انجام شده است. از میان این مطالعات می‌توان به مشخصه‌سازی نگاشت‌هایی که مانند نگاشت‌های خاص (مثلاً هم‌ریختی‌ها، مشتق‌ها، پادمشتق‌ها، مرکزسازها) در حاصل‌ضرب‌های خاصی عمل می‌کنند، اشاره کرد. در این راستا مطالعات زیادی انجام شده است. ابتدا بریسار در [۳] نگاشت‌های جمعی روی حلقه‌های اول دارای خودتوان غیربدیهی را که در شرط زیر صدق می‌کنند، مطالعه کرد:

$$xy = 0 \implies \delta(x)y + x\,\delta(y) = 0, \qquad (x, y \in \mathcal{A})$$

که $\mathcal{A}$ حلقه اول دارای خودتوان غیربدیهی است و $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ نگاشت جمعی است. در ادامه روی جبرها و حلقه‌های مختلفی این شرط موضعی برای مشتق‌ها مطالعه شد که به [۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹] و منابع داخل آن‌ها ارجاع می‌دهیم. اخیراً نگاشت‌های خطی که در عناصر متعامد مانند مشتق عمل می‌کنند در [۱۰، ۱۱] مدنظر قرار گرفته‌اند و ساختار آنها تعیین شده است. به طور دقیق‌تر، فرض کنید $\mathcal{A}$ یک $*$-جبر و $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ یک نگاشت خطی باشد که

$$xy^* = 0 \Longrightarrow x\delta(y)^* + \delta(x)y^* = 0, \quad (x\,, y \in \mathcal{A});$$

$$xy^* = 0 \Longrightarrow x^*\delta(y) + x\delta(y)^* = 0, \quad (x\,, y \in \mathcal{A}).$$

ساختار δ روی $*$-جبرها تعیین شده است. در [۱۲] ساختار δ روی $*$-جبرهای تعیین شده با حاصلضرب صفر مشخصه‌سازی شده است و در [۱۳] ساختار δ روی C^*-جبرها مشخصه‌سازی شده است. همچنین نتایج [۱۰] را ببینید.

حال با توجه به مطالب ذکر شده و با ایده گرفتن از آن‌ها، در این مقاله نگاشت‌های خطی پیوسته روی جبرهای فون-نویمان در عناصر متعامد را در نظر می‌گیریم. به طور دقیق‌تر، فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ جبر فون-نویمان و $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ نگاشت خطی پیوسته باشد که در یکی از شرایط زیر صدق می‌کند:

$$xy = 0 \Longrightarrow y\delta(x) + \delta(y)x = 0, \quad (x\,, y \in \mathcal{A});$$

$$xy^* = 0 \Longrightarrow y^*\delta(x) + \delta(y)^*x = 0, \quad (x\,, y \in \mathcal{A});$$

[1] Johnson

$$x^*y = 0 \Longrightarrow y\delta(x)^* + \delta(y)x^* = 0, \quad (x\,, y \in \mathcal{A}).$$

در هر یک از این حالت‌ها ساختار δ را توصیف می‌کنیم.

مرکز جبر $\mathcal{A}$ را با $Z(\mathcal{A})$ و برای هر $x\,, y \in \mathcal{A}$ ضرب لی آنها را با $[x, y] = xy - yx$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت و $B(\mathcal{H})$ فضای عملگرهای خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ و $\mathcal{A}$ یک C^*-زیرجبری از $B(\mathcal{H})$ باشد. در این صورت اگر $\mathcal{A}$ تحت توپولوژی عملگری قوی (SOT) بسته باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ یک جبر فون-نویمان نامیده می‌شود. هر جبر فون-نویمان یکدار است و همچنین بنابر [۱۴، قضیه ۶. ۱. ۴] هر مشتق پیوسته $d: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ که $\mathcal{A}$ جبر فون-نویمان است، به صورت $d(x) = x\,\mu - \mu x$ می‌باشد که $\mu \in \mathcal{A}$. چنین مشتق‌هایی مشتق درونی نامیده می‌شوند. پس در واقع هر مشتق پیوسته روی جبری فون-نویمان، مشتق درونی است.

۲. نتایج

در این بخش نتایج اصلی این مقاله را ارائه می‌دهیم. ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم که در اثبات‌ها از آن استفاده خواهیم کرد.

لم ۲. ۱ ([۴]). فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر، $\mathcal{X}$ فضای باناخ و $\phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ نگاشت دوخطی پیوسته باشد به طوری که برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ که $xy = 0$، مقدار $\phi(x, y) = 0$ باشد. در این صورت $\phi(xy, z) = \phi(x, yz)$ به ازای هر $x, y, z \in \mathcal{A}$. به‌ویژه اگر $\mathcal{A}$، C^*-جبر یکدار با همانی ۱ باشد، آن‌گاه به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داریم $\phi(x, y) = \phi(xy, 1) = \phi(1, xy)$.

در قضیه زیر پادمشتق‌ها روی جبرهای فون-نویمان در حاصلضرب‌های صفر را تعیین می‌کنیم.

قضیهٔ ۲. ۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ جبر فون-نویمان و $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ نگاشت خطی پیوسته باشد. در این صورت برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ که $xy = 0$ رابطه $y\,\delta(x) + \delta(y)x = 0$ برقرار است اگر و تنها اگر عناصر $\mu, \nu \in Z(\mathcal{A})$ موجود باشند به طوری که $\delta(x) = x\,\mu - \nu x$ و $[[x, y], \mu] + 2[x, y](\mu - \nu) = 0$ باشد.

اثبات. فرض کنیم δ در شرایط داده شده صدق کند. نگاشت دوخطی $\phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را با $\phi(x, y) = y\delta(x) + \delta(y)x$ تعریف می‌کنیم. در این صورت با توجه فرض قضیه اگر $x, y \in \mathcal{A}$، $xy = 0$ آن‌گاه $\phi(x, y) = 0$. بنابر لم ۲. ۱، $\phi(x, y) = \phi(xy, 1)$ به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ (۱ عضو همانی $\mathcal{A}$ است). در این صورت

$$\delta(xy) + \delta(1)xy = y\,\delta(x) + \delta(y)x$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. قرار می‌دهیم $\eta = \delta(1)$، بنابراین

$$\delta(xy) = y\delta(x) + \delta(y)x - \eta xy \qquad (۲. ۱)$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. دوباره بنابر لم ۲. ۱، $\phi(x, y) = \phi(1, xy)$ به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. در این صورت

$$\delta(xy) + xy\delta(1) = y\,\delta(x) + \delta(y)x$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. پس

$$\delta(xy) = y\delta(x) + \delta(y)x - xy\eta \qquad (۲. ۲)$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. با مقایسه روابط (۲. ۱) و (۲. ۲) داریم $\eta xy = xy\eta$ به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. فرض کنیم $y = 1$، لذا $\eta \in Z(\mathcal{A})$.

نگاشت خطی پیوسته $d: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را با $d(x) = \delta(x) - \eta x$ تعریف می‌کنیم. با توجه به رابطهٔ (۲. ۱) و این‌که $\eta \in Z(\mathcal{A})$ داریم

$$\begin{aligned} d(x^2) &= \delta(x^2) - \eta x^2 \\ &= x\delta(x) + \delta(x)x - \eta x^2 - \eta x^2 \\ &= x(\delta(x) - \eta x) + (\delta(x) - \eta x)x \\ &= xd(x) + d(x)x \end{aligned}$$

به ازای هر $x \in \mathcal{A}$. لذا d یک مشتق جردن پیوسته روی $\mathcal{A}$ است و بنابر [۱] یک مشتق می‌باشد. با توجه به این‌که هر مشتق پیوسته روی $\mathcal{A}$ درونی است، نتیجه می‌شود که $d(x) = x\mu - \mu x$ به ازای هر $x \in \mathcal{A}$ که $\mu \in \mathcal{A}$. قرار می‌دهیم $\nu = \mu - \eta$. بنابراین

$$\begin{aligned} \delta(x) &= d(x) + \eta x \\ &= x\mu - \mu x + \eta x \\ &= x\mu - \nu x \end{aligned}$$

به ازای هر $x \in \mathcal{A}$ که $\mu - \nu \in Z(\mathcal{A})$. حال بنابر (۲. ۲) و این‌که d مشتق است داریم

$$\begin{aligned} \delta(xy) + xy\eta &= y\delta(x) + \delta(y)x \\ &= yd(x) + y\eta x + d(y)x + \eta yx \\ &= d(yx) + 2yx\eta \\ &= \delta(yx) + yx\eta \end{aligned}$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. بنابراین

$$xy\,\mu - \nu xy + xy\,\eta = yx\mu - \nu yx + yx\eta,$$

لذا

$$xy\mu - \mu xy + 2xy\eta = yx\mu - \mu yx + 2yx\eta$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. بنابراین

$$\big[[x, y], \mu\big] + 2[x, y](\mu - \nu) = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$.

برعکس، فرض کنیم اعضای $\mu, \nu \in \mathcal{A}$ موجود باشند به طوری که $\delta(x) = x\mu - \nu x$، به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ که $\mu - \nu \in Z(\mathcal{A})$ و

$$\big[[x, y], \mu\big] + 2[x, y](\mu - \nu) = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. بنابر تساوی بالا، اگر $x, y \in \mathcal{A}$ و $xy = 0$، داریم

$$yx\mu - \mu yx + 2yx(\mu - \nu) = 0.$$

چون $\mu - \nu \in Z(\mathcal{A})$، نتیجه می‌شود که

$$0 = yx\mu - \mu yx + 2(\mu - \nu)yx = yx\mu + \mu yx - 2\nu yx.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} y\delta(x) + \delta(y)x &= yx\mu - \nu yx + y\,(\mu - \nu)x \\ &= yx\mu - \nu yx + (\mu - \nu)yx \\ &= yx\mu + \mu yx - 2\,\nu yx = 0 \end{aligned}$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ که $xy = 0$. لذا اثبات کامل می‌شود. ■

فر ض کنید $\mathcal{A}$ یک *-جبر باشد. نگاشت $d: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$، *-نگاشت نامیده می‌شود هرگاه $d(x^*) = d(x)^*$ به ازای هر $x \in \mathcal{A}$.

تذکر ۲. ۳. فر ض کنید $\mathcal{A}$ یک *-جبر و $d: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ یک مشتق درونی باشد که $d(x) = x\mu - \mu x$ به ازای هر $x \in \mathcal{A}$ که در آن $\mu \in \mathcal{A}$ می‌باشد. اگر d یک *-مشتق درونی باشد، آنگاه $x^*\mu - \mu x^* = \mu^* x^* - x^*\mu^*$ به ازای هر $x \in \mathcal{A}$. بنابراین $Re\,\mu = \frac{1}{2}(\mu + \mu^*) \in Z(\mathcal{A})$. برعکس، به ازای $\mu \in \mathcal{A}$ با $Re\,\mu \in Z(\mathcal{A})$، نگاشت $d: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ تعریف شده با $d(x) = x\mu - \mu x$ یک *-مشتق درونی است.

در قضایای بعدی پادمشتق‌ها روی جبرهای فون-نویمان را در عناصر متعامد تعیین می‌کنیم.

قضیهٔ۲. ۴. فرض کنید $\mathcal{A}$ جبر فون-نویمان و $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ نگاشت خطی پیوسته باشد. در این صورت δ در شرایط زیر صدق می‌کند

$$xy^* = 0 \Longrightarrow y^*\delta(x) + \delta(y)^*x = 0, \quad (x\,, y \in \mathcal{A})$$

اگر و تنها اگر اعضای $\mu, \nu \in \mathcal{A}$ موجود باشند به طوری که $\delta(x) = \nu x - \mu x$ به ازای هر $x \in \mathcal{A}$، $Re\,\mu \in Z(\mathcal{A})$ و

$$\big[[x, y], \mu\big] + (\nu - \mu)^*[x, y] + [x, y](\nu - \mu) = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$.

اثبات. فرض کنیم نگاشت خطی پیوسته $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ در شرایط ذکر شده، صدق کند. نگاشت دوخطی پیوسته $\phi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را با $\phi(x, y) = \delta(y^*)^*x + y\,\delta(x)$ تعریف می‌کنیم. اگر $x, y \in \mathcal{A}$ که $xy = 0$، آن‌گاه $x(y^*)^* = 0$ و با توجه به فرض نتیجه می‌شود $\phi(x, y) = 0$. بنابر لم ۲. ۱، داریم

$$\phi(x,y)=\phi(xy,1)=\phi(1,xy)$$

به ازای هر $x,y\in\mathcal{A}$. قرار می‌دهیم $\eta=\delta(1)$. بنابراین

$$\delta(xy)=y\delta(x)+\delta(y^*)^*x-\eta^*xy \tag{۲. ۳}$$

به ازای هر $x,y\in\mathcal{A}$. همچنین

$$\delta(y^*x^*)^*+xy\eta=\delta(y^*)^*x+y\delta(x)$$

به ازای هر $x,y\in\mathcal{A}$. از این رابطه نتیجه می‌شود

$$\delta(y^*x^*)+\eta^*y^*x^*=x^*\delta(y^*)+\delta(x)^*y^* \tag{۲. ۴}$$

به ازای هر $x,y\in\mathcal{A}$. با قرار دادن $y=1$ در رابطهٔ (۲. ۴) خواهیم داشت

$$\delta(x^*)+\eta^*x^*=x^*\eta+\delta(x)^*$$

بنابراین

$$\delta(x^*)-x^*\eta=(\delta(x)-x\eta)^* \tag{۲. ۵}$$

به ازای هر $x\in\mathcal{A}$. حال، نگاشت خطی پیوسته $d:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ را با $d(x)=\delta(x)-x\eta$ تعریف می‌کنیم. از رابطهٔ (۲. ۵) نتیجه می‌شود که d یک $*$-نگاشت است؛ یعنی $d(x^*)=d(x)^*$ به ازای هر $x\in\mathcal{A}$. با استفاده از رابطهٔ (۲. ۳)، داریم

$$\begin{aligned}d(x^2)&=\delta(x^2)-x^2\eta\\&=x\delta(x)+\delta(x^*)^*x-\eta^*x^2-x^2\eta\\&=x(\delta(x)-x\eta)+(\delta(x^*)^*-(x^*\eta)^*)x\\&=xd(x)+(d(x^*)^*)x\\&=xd(x)+d(x)x\end{aligned}$$

به ازای هر $x\in\mathcal{A}$. پس d یک مشتق جردن پیوسته است و بنابر [۱] d یک $*$-مشتق پیوسته است و $\delta(x)=d(x)+x\eta$ به ازای هر $x\in\mathcal{A}$. بنابر [۱۴، قضیه ۶. ۱. ۴] ، d یک $*$-مشتق درونی است و بنابر تذکر ۲. ۳، عضو $\mu\in\mathcal{A}$ با $Re\,\mu\in\mathcal{A}$ وجود دارد که $d(x)=x\mu-\mu x$ به ازای هر $x\in\mathcal{A}$.

بنابر (۲. ۳) و این واقعیت که d یک $*$-مشتق است، خواهیم داشت

$$\delta(xy)+\eta^*xy=\delta(yx)+\eta^*yx$$

به ازای هر $x,y\in\mathcal{A}$. از طرفی دیگر

$$\delta(x)=d(x)+x\eta=x\mu-\mu x+x\eta$$

به ازای هر $x\in\mathcal{A}$. با توجه به این روابط داریم

$$xy\mu-\mu xy+xy\eta+\eta^*xy=yx\mu-\mu yx+yx\eta+\eta^*yx$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. از این‌رو

$$[[x,y],\mu] + \eta^*[x,y] + [x,y]\eta = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. اگر قرار دهیم $\nu = \mu + \eta$، آنگاه $\delta(x) = x\nu - \mu x$ به ازای هر $x \in \mathcal{A}$، $Re\,\mu \in Z(\mathcal{A})$ و

$$[[x,y],\mu] + (\nu - \mu)^*[x,y] + [x,y](\nu - \mu) = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$.

برعکس، فرض کنیم $\mu, \nu \in \mathcal{A}$ موجود باشند که $\delta\,(x) = x\nu - \mu x$ به ازای هر $x \in \mathcal{A}$، $Re\,\mu \in Z(\mathcal{A})$ و

$$[[x,y],\mu] + (\nu - \mu)^*[x,y] + [x,y](\nu - \mu) = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$. با توجه به رابطه بالا، به ازای هر به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ با $xy^* = 0$، داریم

$$-\mu y^*x + \nu^*y^*x - \mu^*y^*x + y^*x\nu = 0.$$

با بکارگیری $Re\,\mu \in Z(\mathcal{A})$، می‌بینیم که

$$y^*\delta(x) + \delta(y)^*x = y^*x\nu + \nu^*y^*x - y^*(\mu + \mu^*)x$$

$$= y^*x\nu + \nu^*y^*x - \mu y^*x - \mu^*y^*x = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ که $xy^* = 0$. لذا اثبات کامل است. ■

قضیهٔ ۲. ۵. فرض کنید $\mathcal{A}$ جبر فون-نویمان و $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد. در این صورت δ در شرایط زیر صدق می‌کند

$$x^*y = 0 \Longrightarrow \delta(\mathrm{y})x^* + y\delta(x)^* = 0, \quad (x\,, y \in \mathcal{A})$$

اگر و تنها اگر اعضای $\mu, \nu \in \mathcal{A}$ موجود باشند به طوری که $\delta(x) = x\mu - \nu x$ به ازای هر $x \in \mathcal{A}$، $Re\,\mu \in Z(\mathcal{A})$ و

$$[[x,y],\mu] + [x,y](\mu - \nu)^* + (\mu - \nu)[x,y] = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$.

اثبات. فرض کنیم $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ در شرایط داده شده صدق کند. نگاشت خطی پیوسته $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را با $\tau(x) = \delta(x^*)^*$ تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که

$$x, y \in \mathcal{A}, \;\; xy^* = 0 \quad \Longrightarrow \tau(y)^* + y^*\tau(x) = 0,$$

یعنی τ در شرایط قضیه ۲. ۴، صدق می‌کند. بنابراین $\mu_1, \nu_1 \in \mathcal{A}$ وجود دارند که $\tau(x) = x\nu_1 - \mu_1 x$ به ازای هر $x \in \mathcal{A}$ که $Re\,\mu_1 \in Z(\mathcal{A})$ و

$$[[x,y],\mu_1] + (\nu_1 - \mu_1)^*[x,y] + [x,y](\nu_1 - \mu_1) = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$ قرار می‌دهیم $\nu = -\nu_1^*$ و $\mu = -\mu_1^*$، پس

$$\delta(x^*) = \tau(x)^*$$
$$= (x\nu_1 - \mu_1 x)^*$$
$$= \nu_1^* x^* - x^* \mu_1^*$$
$$= x^* \mu - \nu x^*$$

به ازای هر $x \in \mathcal{A}$ که $Re\, \mu \in Z(\mathcal{A})$ و

$$\big[[x, y], \mu\big] + [x, y](\mu - \nu)^* + (\mu - \nu)[x, y] = 0$$

به ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$.

عکس قضیه با روندی مشابه با اثبات عکس قضیه ۲. ۴، ثابت می‌شود. ■

توجه شود که در قضیه ۲. ۴، لزوماً $\nu - \mu \in Z(\mathcal{A})$ نمی‌باشد. برای مثال فرض کنید $\eta \in \mathcal{A}$ طوری باشد که $\eta \notin Z(\mathcal{A})$ و $\eta^*[x, y] + [x, y]\eta = 0$. نگاشت خطی پیوسته $\delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را با $\delta(x) = x\eta$ تعریف می‌کنیم. در این صورت δ در شرایط قضیه ۲. ۴ صدق می‌کند، اما اگر قرار دهیم $\nu = \eta$ و $\mu = 0$، آن‌گاه $\delta(x) = x\nu - \mu x$ $(x \in \mathcal{A})$ و $\nu - \mu = \eta \notin Z(\mathcal{A})$. همچنین در قضیه ۲. ۵ نیز لزوماً $\mu - \nu \in Z(\mathcal{A})$ نمی‌باشد و می‌توان با روندی مشابه بالا، مثالی آورد.

References

1. B.E. Johnson, Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **120**, 455–473 (1996).

2. H. G. Dales, Banach algebras and automatic continuity. London Math. Soc. Monographs. Oxford Univ. Press, Oxford 2000.

3. M. Brešar, Characterizing homomorphisms, derivations and multipliers in rings with idempotents. Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A. **137**, 9–21 (2007).

4. J. Alaminos, M. Brešar, J. Extremera, A.R. Villena, Maps preserving zero products. Studia Math. **193**, 131–159 (2009).

5. D. Benkovic, M. Grašic, Generalized derivations on unital algebras determined by action on zero products. Linear Algebra Appl. **445**, 347–368 (2014).

6. H. Ghahramani, Additive maps on some operator algebras behaving like (α,β)-derivations or generalized (α,β)-derivations at zero-product elements. Acta Math. Sci. **34B**(4), 1287–1300 (2014).

7. H, Ghahramani, On derivations and Jordan derivations through zero products. Oper. Matrices **4**, 759–771 (2014).

8. W. Jing, S. Lu, P. Li, Characterization of derivation on some operator algebras. Bull. Austr. Math. Soc. **66**, 227–232 (2002).

9. J. Zhu, All-derivable points of operator algebras. Linear Algebra Appl. **427**, 1–5 (2007). 24. J. Zhu, Ch. Xiong, P. Li, Characterizations of all-derivable points in B(H). Linear Multilinear Algebra **64**(8), 1461–1473 (2016).

10. H. Ghahramani, Linear maps on group algebras determined by the action of the derivations or antiderivations on a set of orthogonal elements. Results Math. **73**, 133 (2018).

11. H. Ghahramani, Z. Pan, Linear maps on -algebras acting on orthogonal elements like derivations or anti-derivations. Filomat **13**, 4543–4554 (2018).

12. B. Fadaee, K. Fallahi, H. Ghahramani, Characterization of linear mappings on (Banach) *-algebra by similar properties to derivation, Mathematica Slovaca, **70**, 1003-1011(2020).

13. B. Fadaee, H. Ghahramani, Linear Maps on C⋆-Algebras Behaving like (Anti-) derivations at Orthogonal Elements, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society: **43**, 2851-2859 (2020).

14. S. Sakai, C*-algebras and W*-algebras, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg and New York (1971).