Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Double-Frontier Analysis Approach for Weight Derivation in Analytical Hierarchy Process

Hossein Azizi[1]

1. Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

E-mail: hossein.azizi@iau.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
11 November 2020
Revised form:
25 December 2020
Accepted:
11 January 2021
Published online:
22 November 2022

Keywords:
Data envelopment analysis;
Analytical hierarchy process;
DEAHP;
double-frontier analysis;
multiple-criteria decision analysis.

ABSTRACT

Introduction

In papers written about analytic hierarchy process (AHP), evaluating priorities for the criteria or alternatives from pairwise comparison matrices have been vastly studied. Except the Saaty's eigenvector method (EM) [1] which is the most widely used method for prioritization, diverse methods are presented in papers.

Ramanathan [24] has presented an approach by combining data envelopment analysis (DEA) and AHP, named DEAHP, to calculate and integrate weights. DEAHP implements DEA to make local weights of the alternatives from pairwise comparison matrices and their integration as final weights. Wang et al. [28] suggested a DEA model with assurance region (AR) for creating weights in AHP. The DEA/AR model can present intuitive or even logical weights for both consistent and inconsistent pairwise comparison matrices.

In this paper, the "Double-Frontier Analysis" approach is proposed which integrates the DEA/AR concept of weight from two optimistic and pessimistic viewpoints with AHP, and calculates the most desirable and most undesirable weights based on a pairwise comparison matrix for the criteria and decision alternatives. We call this method the double-frontier analysis approach for producing the most desirable and most undesirable weights, or DFA in short.

Double-Frontier Analysis

let

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

be pairwise comparison matrix with $a_{ii}=1$ and $a_{ji}=1/a_{ij}$ for $j\neq i$ and $W=(w_1,\ldots,w_n)^T$ being the weight vector. It has been proven that providing A is a perfectly consistent pairwise comparison matrix, meaning $a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$ for $\forall i,j,k\in\{1,\ldots,n\}$, DEAHP can produce true weights.

The Optimistic DEA/AR model for AHP

Wang et al. [28] have created the following DEA/AR model to determine the most desirable criteria or decision alternative weights:

$$\text{Max } w_o$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \le 1 \quad i = 1,\ldots,n \\ w_j / \beta \le v_j \le w_j / n \quad j = 1,\ldots,n \end{cases} \tag{2}$$

Here, the lower index "o" represents the alternative or criterion under evaluation and β is determined from the following equation:

$$\beta = \min\left\{\max_i\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j\right), \max_i\left(\frac{1}{c_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} c_j\right)\right\} \tag{3}$$

Here, $r_1,\ldots,r_n$ and $c_1,\ldots,c_n$ are respectively the row and column sums of the $A = (a_{ij})_{n\times n}$ pairwise comparison matrix. The method implemented from model (2) to calculate weights from the pairwise comparison matrices is called the optimistic DEA/AR, and the calculated weights are optimistic weights.

The Pessimistic DEA/AR model for AHP

Due to a need for expanding the DEAHP theory and its methods and real applications, a new pessimistic DEAHP model is proposed which evaluates a criteria or decision alternative from a pessimistic viewpoint. The weights calculated from the pessimistic viewpoint, are called pessimistic weights. The pessimistic weight of the criterion or decision alternative under evaluation can be calculated versus other criteria and decision alternatives, implementing the following DEA/AR model:

$$\text{Min } \hat{w}_o$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \hat{w}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \ge 1 \quad i = 1,\ldots,n \\ \hat{w}_j / \beta \le v_j \le \hat{w}_j / n \quad j = 1,\ldots,n \end{cases} \tag{4}$$

Here also the lower index "o" represents the criterion or decision alternative under evaluation and β is determined using equation (3). In case there exists a group of positive weights which cause $\hat{w}_o^* = 1$, it is said that the criterion or decision alternative under evaluation is DEA/AR inefficient or pessimistic inefficient; otherwise, it is said to be pessimistic non-inefficient. Contrary to model (2), which is called the optimistic DEA/AR, the (4) pessimistic DEA/AR model seeks the most undesirable weights for each criterion or decision alternative.

Geometric mean weight – integrating optimistic and pessimistic weights

When a criterion or decision alternative is evaluated from different viewpoints, there is no guarantee to reach a consistent evaluation. In more general terms, the weights of the evaluated criterion or decision alternative do not only differ from different viewpoints, but they even have remarkable differences or are strongly inconsistent. Therefore, there is a clear need to integrate them into one combined criterion or decision alternative weight for each criterion or decision alternative in order to reach a single outcome. Similar to the geometric mean in Wang et al. [47], we can combine the calculated criterion or decision alternative weights from both optimistic and pessimistic viewpoints as a geometric mean as follows:

$$\omega_j = \sqrt{\hat{w}_j^* \times w_j^*}, \quad j = 1,\ldots,n \tag{5}$$

ω_j ($j = 1,\ldots,n$) calculates the mean weight of the j^{th} criterion or decision alternative from both optimistic and pessimistic viewpoints simultaneously. Since the determined criterion or decision alternative weight by (5) is the combination of calculated criterion or decision alternative weights from both optimistic and pessimistic viewpoints, we call them the criterion or decision alternative weight based on “double-frontier analysis” or criterion or decision alternative weight based on DFA in short, which is more comprehensive and realistic than criterion or decision alternative weight based on optimistic DEA/AR and can better and more accurately reflect the criterion or decision alternative weight.

Conclusions

In this paper, a new approach for weight generation in AHP is proposed which is named the DFA approach. It was shown in an example that the DFA approach reaches better decisions than DEAHP, as DEAHP sometimes over-evaluates the importance of some criteria and/or decision alternatives which lead to somewhat unreliable outcomes.

The optimistic and pessimistic DEA/AR models can be easily used and implemented and do not need prior designation of assurance region or defining it mentally, as the assurance region will be determined automatically by optimistic and pessimistic DEA/AR models and pairwise comparison matrices.

How to cite: Azizi, H., (2022) Double-Frontier Analysis Approach for Weight Derivation in Analytical Hierarchy Process. *Mathematical Researches*, 8 (3), 153-171

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵۵۴

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

رویکرد تحلیل مرز دوگانه برای تولید وزن در فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی

حسین عزیزی[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران. پست الکترونیکی: hossein.azizi@iau.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۰۵
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
تحلیل پوششی داده‌ها،
فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی،
DEAHP،
تحلیل مرز دوگانه،
تحلیل تصمیم چندمعیاری.

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) در ترکیب با فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP)، روش DEAHP را برای اشتقاق و تجمیع وزن‌ها در AHP ایجاد می‌کند. این مقاله برای اشتقاق اولویت در AHP، رویکرد «تحلیل مرز دوگانه» را پیشنهاد می‌کند که مفهوم وزن متغیر DEA را از دو دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه با AHP ادغام می‌کند، و مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین وزن‌ها را بر مبنای یک ماتریس مقایسه‌ی زوجی برای معیارها یا گزینه‌های تصمیم به دست می‌آورد. رویکرد پیشنهادی می‌تواند بر نقایص DEAHP غلبه کند، و برآورد بهتری از اولویت‌ها به دست آورد و تصمیمات بهتری نسبت به DEAHP ارائه نماید. دو مثال عددی، از جمله یک کاربرد واقعی AHP برای استخدام یک دستیار پژوهشی برای یک پروژه‌ی تحقیقاتی ارائه می‌شوند، تا مزایای رویکرد پیشنهادی و کاربردهای بالقوهٔ آن را در تحلیل تصمیم چندمعیاری مشخص کنند.

استناد: عزیزی، حسین؛ (۱۴۰۱). رویکرد تحلیل مرز دوگانه برای تولید وزن در فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۱۷۱-۱۵۳.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱- مقدمه

در مقالات فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP)، به دست آوردن اولویت‌های معیارها یا گزینه‌ها از ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی به‌صورت گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است. جدای از روش بردار ویژه‌ی (EM) ساعاتی [۱]، که متداول‌ترین روش مورد استفاده برای تعیین اولویت‌ها است، روش‌های متفاوتی در مقالات ارائه شده است. در جدول ۱ خلاصه‌ای کوتاه از مطالعات قبلی برای تعیین اولویت‌ها لیست شده است. خوانندگان علاقمند می‌توانند کاربردهای AHP را در مقاله‌ی Vaidya و Kumar [۲۳] مرور کنند.

جدول۱: خلاصه‌ای از مطالعات انجام شده برای تعیین اولویت‌ها

رویکردهای روش‌شناختی	نویسندگان
روش کمترین مربعات وزنی (WLSM)	Chu و همکاران [۲]
روش کمترین مربعات لگاریتمی (LLSM)	Crawford [۳]
روش کمترین مربعات (LSM)	Saaty و Vargas [۴]
روش وزن ویژهٔ گرادیان (GEM) و روش کمترین فاصله (LSM)	Cogger و Yu [۵]
روش کمترین مربعات هندسی (GLSM)	Islei و Lockett [۶]
روش برنامه‌ریزی آرمانی (GPM)	Bryson [۷]
رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی لگاریتمی (LGPA)	Bryson و Joseph [۸]
روش برنامه‌ریزی فازی (FPM)	Mikhailov [۹، ۱۰]
روش برآورد استوار (REM)	Lipovetsky و Conklin [۱۱]
روش DS/AHP (نظریهٔ Dempster–Shafer شواهد [۱۵] را در AHP ادغام می‌کند)	Beynon [۱۲–۱۴]
رویکرد تجزیهٔ مقدار منفرد (SVD)	Gass و Rapcsák [۱۶]
تحلیل ماتریس‌های AHP با رگرسیون استوار	Laininen و Hämäläinen [۱۷]
روش نمره‌دهی ضربی اولویت (نمونه‌ی تغییر یافته‌ای از AHP است)	Stam و Silva [۱۸]
روش اولویت بازه‌ای	Sugihara و همکاران [۱۹]
رویکرد برنامه‌ریزی خطی (LP)	Chandran و همکاران [۲۰]
ترکیب روش‌های اولویت‌بندی مختلف	Srdjevic [۲۱]
رویکرد بیشینه‌سازی ضریب همبستگی (CCMA)	Wang و همکاران [۲۲]

Ramanathan [۲۴] رویکردی را با ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) و AHP ارائه کرده است، که آن را DEAHP برای به دست آوردن و تجمیع وزن‌ها نام نهاده است (گرچه ترکیب DEA و AHP جدید نیست، به عنوان مثال، رک. [۲۵–۲۷]). DEAHP از DEA برای ایجاد وزن‌های محلی گزینه‌ها از ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی و تجمعی آن‌ها به‌صورت وزن‌های نهایی استفاده می‌کند. Ramanathan [۲۴] ادعا می‌کند که در DEAHP زمانی که یک گزینهٔ غیرمرتبط اضافه یا حذف می‌شود، معکوس شدن رتبه اتفاق نمی‌افتد. ولی تا جایی که می‌توانیم تعیین کنیم، DEAHP معایب مهمی نیز دارد. اولین عیب آن این است که نمی‌تواند در زمان به دست آوردن وزن‌های محلی، از تمام اطلاعات موجود در ماتریس مقایسهٔ زوجی استفاده کند. در هر زمان، تنها از عناصر قضاوت رمزگذاری یک یا دو ستون ماتریس مقایسهٔ زوجی استفاده می‌شود. ثانیاً، وزن‌های محلی تولید شده توسط DEAHP ممکن است برای

ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی بسیار ناهمساز، شدیداً غیرمنطقی و حتی غلط باشد. و بالاخره، DEAHP هنوز هم در صورتی که یک گزینه‌ی کارای DEA اضافه یا حذف شود، دچار مشکل معکوس شدن رتبه می‌شود. به منظور غلبه بر این ایرادات، Wang و همکاران [۲۸] یک مدل DEA با ناحیهٔ اطمینان (DEA/AR) را برای ایجاد وزن‌ها در AHP پیشنهاد کردند. مدل DEA/AR می‌تواند هم برای ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی همساز و هم برای ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی ناهمساز، وزن‌های شهودی و حتی منطقی ارائه دهد.

به عنوان یک رویکرد مناسب برای ارزیابی عملکرد، مؤلفان متعددی پیشنهاد کرده‌اند که ارزیابی عملکرد را می‌بایستی همزمان از دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه باید مورد ارزیابی قرار داد و به این نوع ارزیابی، رویکرد DEA با مرز دوگانه می‌گویند [۲۹-۴۲]. Doyle و همکاران [۴۳] و Entani و همکاران [۴۴] از اولین کسانی هستند که عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) را از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه مورد بررسی قرار داده‌اند. خوانندگان علاقمند می‌توانند مرور جامع روش‌های رویکرد DEA با مرز دوگانه را در [۴۵] مرور کنند.

در این مقاله، رویکرد «تحلیل مرز دوگانه» را پیشنهاد می‌کنیم که مفهوم وزن DEA/AR را از دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه با AHP ادغام می‌کند، و مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین وزن‌ها را بر مبنای یک ماتریس مقایسهٔ زوجی برای معیارها یا گزینه‌های تصمیم به دست می‌آورد. ما به این روش، روش تحلیل مرز دوگانه برای تولید مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین وزن‌ها، و یا به اختصار DFA می‌گوییم. تفاوت روش DFA با روش مبتنی بر DEA/AR پیشنهاد شده توسط Wang و همکاران [۲۸] در آن است که در روش DFA از وزن‌های خوشبینانه و بدبینانه برای هر معیار یا گزینه‌ی تصمیم استفاده می‌شود، در حالی که روش Wang و همکاران [۲۸] تنها از وزن‌های خوشبینانه استفاده می‌کند. روش DFA پیشنهادی تحت محدودیت‌های DEAHP قرار ندارد، و کمک جدیدی به نظریهٔ اولویت‌های AHP و کاربردهای آن محسوب می‌شود.

مقاله به‌صورت زیر سازماندهی شده است. بخش ۲ به اختصار DEAHP را مرور می‌کند. بخش ۳ مبانی نظری DFA را بیان می‌کند. دو مثال عددی در بخش ۴ ارائه شده و مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۵ ارائه می‌شود.

۲- DEAHP: ترکیب DEA و AHP

فرض کنید

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

یک ماتریس مقایسهٔ زوجی با $a_{ii}=1$ و $a_{ji}=1/a_{ij}$ برای $j\neq i$ باشد و $W=(w_1,\ldots,w_n)^T$ بردار وزن آن باشد. DEAHP هر سطر A را به‌عنوان یک موجودیت تصمیم‌گیری در نظر می‌گیرد، که به آن در DEA، DMU

می‌گویند، و هر ستون را به‌عنوان یک خروجی در نظر می‌گیرد. برای همه‌ی DMUها یک ورودی ساختگی کـه مقـدار آن ۱ است، منظور می‌شود. هر DMU در واقع، n خروجی و یک ورودی ساختگی ثابت دارد، که بـر اسـاس آن مـدل CCR با ماهیت ورودی زیر برای برآورد وزن‌های محلی ماتریس مقایسهٔ زوجی A ساخته می‌شود:

$$\text{Max } w_o = \sum_{j=1}^{n} a_{oj} v_j$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} u_1 = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j - u_1 \le 0 \quad i = 1,\ldots,n \\ u_1, v_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n \end{cases} \tag{۲}$$

در این‌جا $o \in \{1,\ldots,n\}$ نشان دهندهٔ DMUی تحت ارزیابی، یعنی DMU_o است. مقدار بهینهٔ تابع هـدف در مـدل فوق، w_o^*، نشان دهندهٔ کارایی DEAی DMU_o است، و به عنـوان وزن محلـی آن اسـتفاده می‌شـود. مـدل LP (۲) برای همهٔ DMUها حل می‌شود، تا بردار وزن‌های محلی $W^* = (w_1^*,\ldots,w_n^*)^T$ برای ماتریس مقایسهٔ زوجـی A بـه دست آید. ثابت شده است [۲۵] که DEAHP می‌تواند در صورتی که A یک ماتریس مقایسـهٔ زوجـی کـاملاً همسـاز باشد، یعنی $a_{ij} = a_{ik} a_{kj}$ برای $\forall i, j, k \in \{1,\ldots,n\}$، وزن‌های حقیقی را تولید کند.

به منظور تجمیع وزن‌های محلی به وزن‌های نهایی، DEAHP گزینه‌های تصمیم را به‌عنوان DMUها در نظر می‌گیرد، و وزن‌های محلی آن‌ها نسبت به هر معیار را به عنوان خروجی منظـور می‌کنـد. DEAHP دو حالـت ترکیـب را ایجـاد می‌کند: حالت (I) و حالت (II). در حالت (I)، وزن‌های مرتبط با معیار v_j ($j = 1,\ldots,J$)، مشخص نمی‌شـوند، بلکـه با مدل CCR با ماهیت ورودی زیر تعیین می‌شوند:

$$\text{Max } \sum_{j=1}^{J} w_{oj} v_j$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} u_1 = 1 \\ \sum_{j=1}^{J} w_{ij} v_j - u_1 \le 0 \quad i = 1,\ldots,N \\ u_1, v_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,J \end{cases} \tag{۳}$$

در این‌جا w_{ij} وزن محلی گزینه‌ی i-اُم ($i = 1,\ldots,N$) نسبت به معیار j-اُم ($j = 1,\ldots,J$) است. در حالـت (II)، وزن‌های معیارها در مدل (۳) به‌عنوان قیود اضافی به‌صـورت $v_j = d_j v_1$ ($j = 1,\ldots,J$ و $d_1 = 1$) تلفیـق می‌شـود. این مدل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\text{Max } v_1\left(\sum_{j=1}^{J} w_{oj} d_j\right)\\ &\text{s.t.}\begin{cases} v_1\left(\sum_{j=1}^{J} w_{ij} d_j\right) \le 1 \quad i=1,\dots,N \\ v_1 \ge 0\end{cases}\end{aligned} \tag{۴}$$

در این‌جا v_1 تنها متغیر تصمیم است.

پیشنهاد شده است که حالت (I) برای محاسبهٔ وزن‌های نهایی گزینه‌های تصمیم ترجیح داده شود، مگر آن‌که دلایل قوی برای وارد کردن وزن‌های معیارها وجود داشته باشد [۲۵]. اگر وزن‌های معیارها اهمیت داشته باشند، آن‌گاه باید وزن‌های نهایی محاسبه شده بامحدودیت و بدون محدودیت با هم ارائه شوند.

در بخش بعد، یک روش DFA ایجاد می‌کنیم که از مفهوم وزن‌های خوشبینانه و بدبینانهٔ DEA/AR برای فرمول‌بندی مسئله‌ی اولویت یک ماتریس مقایسهٔ زوجی استفاده می‌کند.

۳- تحلیل مرز دوگانه

۳-۱- مدل DEA/AR خوشبینانه برای AHP

Wang و همکاران [۲۸] برای تعیین مطلوب‌ترین وزن‌های معیارها یا گزینه‌های تصمیم، مدل DEA/AR زیر را ابداع کردند:

$$\begin{aligned}&\text{Max } w_o\\ &\text{s.t.}\begin{cases} w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \le 1 \quad i=1,\dots,n \\ w_j / \beta \le v_j \le w_j / n \quad j=1,\dots,n\end{cases}\end{aligned} \tag{۵}$$

در این‌جا اندیس پایین « o » نشان دهندهٔ گزینه یا معیار تصمیم تحت ارزیابی است و β از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\beta = \min\left\{\max_i\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j\right), \max_i\left(\frac{1}{c_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j\right)\right\} \tag{۶}$$

در این‌جا $r_1,\dots,r_n$ و $c_1,\dots,c_n$ به ترتیب مجموع سطری و مجموع ستونی ماتریس مقایسهٔ زوجی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ هستند. روشی را که از مدل (۵) برای به دست آوردن وزن‌ها از ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی استفاده می‌کند، روش DEA/AR خوشبینانه می‌نامند، و وزن‌های حاصله را وزن‌های خوشبینانه می‌نامند.

قضیهٔ ۱: مدل (۵) شدنی است.

برهان: فرض کنید $a_j^{\max} = \max\{a_{ij} \mid i=1,\dots,n\}$، با انتخاب $\tilde{v}_j = \dfrac{1}{\beta a_j^{\max}}$ ($j=1,\dots,n$) روشن است که حداقل یک جواب برای مدل (۵) وجود دارد. □

در مورد ساختارهای سلسله‌مراتبی، وزن‌های موضعی را باید به‌صورت وزن‌های سراسری تجمیع کرد. فرض کنید

$w_1,\ldots,w_J$ وزن‌های موضعی J معیار تصمیم و $w_{1j},\ldots,w_{nj}$ وزن‌های موضـعی n گزینـه‌ی تصـمیم در رابطـه بـا معیار j -اُم ($j=1,\ldots,J$) باشند. فرض بر این است که همه‌ی آن‌ها قبلاً با حل مدل DEA/AR (۵) تولید شـده‌اند، و مطابق جدول ۲، یک ماتریس تصمیم را تشکیل می‌دهند، که بر اساس آن، وزن سراسری هر گزینهٔ تصمیم را می‌توان با استفاده از روش وزن‌دهی جمعی ساده [۴۶] در تصمیم‌گیری چندشاخصـی (MCDM) محاسـبه کـرد، و سـپس بـا ماکزیمم آنها به‌صورت زیر نرمال‌سازی کرد:

$$w_{A_i}^{*}=\frac{\sum_{j=1}^{J}w_{ij}w_j}{\max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}}\left\{\sum\limits_{j=1}^{J}w_{kj}w_j\right\}}\qquad i=1,\ldots,n \tag{۷}$$

این نتایج دقیقاً همان نتایجی است که با حل مدل (۴) به دست می‌آید.

جدول ۲: تجمیع وزن‌های موضعی DEA/AR.

گزینه	معیار				وزن‌های سراسری	
	w_1	w_2	...	w_J	نرمال‌سازی نشده	نرمال‌سازی شده
A_1	w_{11}	w_{12}	$\cdots$	w_{1J}	$\sum_{j=1}^{J}w_{1j}w_j$	$\sum_{j=1}^{J}w_{1j}w_j/\max\limits_i\{\sum_{j=1}^{J}w_{ij}w_j\}$
A_2	w_{21}	w_{22}	$\cdots$	w_{2J}	$\sum_{j=1}^{J}w_{2j}w_j$	$\sum_{j=1}^{J}w_{2j}w_j/\max\limits_i\{\sum_{j=1}^{J}w_{ij}w_j\}$
...	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	...	...
A_n	w_{n1}	w_{n2}	$\cdots$	w_{nJ}	$\sum_{j=1}^{J}w_{nj}w_j$	$\sum_{j=1}^{J}w_{nj}w_j/\max\limits_i\{\sum_{j=1}^{J}w_{ij}w_j\}$

۳-۲- مدل DEA/AR بدبینانه برای AHP

به خاطر نیاز به توسـعهٔ نظریـهٔ DEAHP و روش‌هـای آن و هـم کاربردهـای واقعـی آن، مـدل DEAHP بدبینانـهٔ جدیدی را پیشنهاد می‌کنیم که یک معیار یا گزینهٔ تصمیم را از دیدگاه بدبینانه ارزیابی می‌کند. وزن‌هایی که از دیـدگاه بدبینانه اندازه‌گیری شده‌اند، وزن‌های بدبینانه نامیده می‌شوند. وزن بدبینانهٔ معیار یا گزینهٔ تصمیم تحت ارزیابی نسـبت به معیارها یا گزینه‌های تصمیم دیگر را می‌توان با مدل DEA/AR بدبینانه‌ی زیر اندازه‌گیری کرد:

$$\begin{aligned}&\text{Min }\ \hat{w}_o\\&\text{s.t.}\begin{cases}\hat{w}_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}v_j\geq 1 & i=1,\ldots,n\\ \hat{w}_j/\beta\leq v_j\leq \hat{w}_j/n & j=1,\ldots,n\end{cases}\end{aligned} \tag{۸}$$

در این‌جا نیز اندیس پایین « o » نشان دهندهٔ گزینه یا معیار تصـمیم تحـت ارزیـابی اسـت و β از رابطـهٔ (۶) تعیـین می‌شود. در صورتی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد کـه سـبب شـود $\hat{w}_o^{*}=1$ باشـد، آن‌گـاه گفتـه می‌شود که گزینه یا معیار تصمیم تحت ارزیابی ناکارای DEA/AR یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صـورت، گفتـه

می‌شود که غیرناکارای بدبینانه است. واضح است که غیرکارای خوشبینانه لزوماً به معنای ناکارای بدبینانه نیست. به همین ترتیب، غیرناکارای بدبینانه لزوماً به معنای کارای خوشبینانه نیست. بر خلاف مدل (۵)، که به آن مدل DEA/AR خوشبینانه می‌گویند، مدل DEA/AR بدبینانهٔ (۸) در جستجوی نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر گزینه یا معیار تصمیم می‌باشد.

در رابطه با مدل DEA/AR بدبینانهٔ (۸)، قضایای زیر را داریم.

قضیهٔ ۲: مدل (۸) شدنی است.

برهان: اثبات مشابه قضیهٔ ۱ است. □

قضیهٔ ۳: اگر $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مقایسهٔ زوجی کاملاً همساز باشد، آن‌گاه مدل DEA/AR (۸) وزن‌های زیر را تولید می‌کند:

$$\hat{w}_i^* = \hat{w}_i / \min_{j\in\{1,\ldots,n\}}\{\hat{w}_j\} \quad i=1,\ldots,n$$

که نرمال‌سازی وزن‌های حقیقی $\hat{w}_i$ ($i=1,\ldots,n$) ماتریس مقایسهٔ زوجی A هستند.

برهان: چون A یک ماتریس مقایسهٔ زوجی کاملاً همساز است، می‌توان آن را با وزن‌های بردار ویژه‌ی $\hat{w}_j = 1/\sum_{i=1}^n a_{ij}$ ($j=1,\ldots,n$) به صورت $a_{ij} = \hat{w}_i / \hat{w}_j$ ($i,j=1,\ldots,n$) مشخص‌سازی کرد. بر این اساس،

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n (\hat{w}_i / \hat{w}_j) v_j = \hat{w}_i \sum_{j=1}^n (v_j / \hat{w}_j) \ge 1 \quad (i=1,\ldots,n),$$

که از آن می‌توان

$$\sum_{j=1}^n (v_j / \hat{w}_j) \ge 1/\hat{w}_i \quad (i=1,\ldots,n)$$

را به دست آورد. بنابراین،

$$\sum_{j=1}^n (v_j / \hat{w}_j) \ge \max_i (1/\hat{w}_i) = 1/\min_{j\in\{1,\ldots,n\}}\{\hat{w}_j\}.$$

به این ترتیب، مقدار مینیمم تابع هدف معادلهٔ (۸) را می‌توان به صورت

$$\hat{w}_o^* = \hat{w}_o \sum_{j=1}^n (v_j^* / \hat{w}_j) = \hat{w}_o / \min_{j\in\{1,\ldots,n\}}\{\hat{w}_j\}$$

به دست آورد، که

$$\hat{w}_o \in \{\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_n\}.$$ □

۳-۳- وزن میانگین هندسی—ادغام وزن‌های خوشبینانه و بدبینانه

وقتی که گزینه یا معیار تصمیم از دیدگاه‌های متفاوت ارزیابی می‌شود، هیچ تضمینی وجود ندارد که بتوان به یک ارزیابی همساز دست یافت. به بیان کلی، وزن‌های گزینه یا معیار تصمیم اندازه‌گیری شده از دیدگاه‌های متفاوت یکسان نیستند، بلکه حتی با یکدیگر تفاوت قابل توجه داشته و یا قویاً ناهمساز هستند. لذا نیاز روشنی برای تجمیع آن‌ها به

صورت یک وزن گزینه یا معیار تصمیم تلفیق شده برای هر گزینه یا معیار تصمیم جهت رسیدن به یک نتیجه‌گیری وجود دارد. مشابه میانگین هندسی در Wang و همکاران [۴۷]، می‌توانیم وزن‌های گزینه یا معیار تصمیم اندازه‌گیری شده از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه را به صورت یک میانگین هندسی به‌صورت زیر تلفیق کنیم:

$$\omega_j = \sqrt{\hat{w}_j^* \times w_j^*}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{۹}$$

ω_j ($j = 1, \ldots, n$) میانگین وزن گزینه یا معیار تصمیم j -اُم را از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه به طور همزمان اندازه‌گیری می‌کند. از آن‌جا که وزن گزینه یا معیار تصمیم تعریف شده توسط (۹) تلفیق وزن‌های گزینه یا معیار تصمیم اندازه‌گیری شده از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه است، ما به آن وزن گزینه یا معیار تصمیم مبتنی بر «تحلیل مرز دوگانه» یا به اختصار وزن گزینه یا معیار تصمیم مبتنی بر DFA می‌گوییم، که جامع‌تر و واقع‌گرایانه‌تر از وزن گزینه یا معیار تصمیم مبتنی بر DEA/AR خوشبینانه است و به‌صورت بهتر و دقیق‌تری می‌تواند منعکس کنندهٔ وزن گزینه یا معیار تصمیم باشد.

۴- مثال‌های عددی

در این بخش، دو مثال عددی را برای نشان دادن مزایا و کاربردهای بالقوهٔ DFA در AHP بررسی می‌کنیم. مثال ۱ با ماتریس مقایسهٔ زوجی انفرادی سر و کار دارد و مثال ۲ یک کاربرد AHP برای استخدام یک دستیار پژوهشی است.

مثال ۱: ماتریس مقایسهٔ زوجی زیر را در نظر بگیرید، که همسازی مطلوب $CR = 0.0999$ دارد [۴۸]:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1/2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای این ماتریس مقایسهٔ زوجی، روش DEAHP [۲۴] وزن‌های پنج معیار یا گزینه را همگی یک برآورد می‌کند، یعنی $W_{\text{DEAHP}}^* = (1,1,1,1,1)^T$. چنین بردار اولویتی فاقد معنا است، و بنابراین، رد می‌شود. جدول ۳ اولویت‌های به دست آمده از مدل‌های DEA/AR (۵) و (۸) را نشان می‌دهد، که بر اساس آن دیده می‌شود که دو مدل متمایز همگی C_1 را به‌عنوان کم اهمیت‌ترین معیار یا گزینه تصمیم ارزیابی می‌کنند که C_2 و C_5 به دنبال آن قرار گرفته‌اند (برای این مثال $\beta = 6.381$ به دست آمده است). تفاوت این مدل‌ها در چگونگی ارزیابی C_3 و C_4 است. مدل DEA/AR (۵)، C_3 و C_5 را در یک سطح یکسان اهمیت ارزیابی می‌کند، در حالی که مدل DEA/AR (۸) C_3 را مهم‌تر از C_4 ارزیابی می‌کند. بر اساس رابطهٔ (۹) در جدول ۳، منطقی به نظر می‌رسد که C_3 باید مهم‌تر از C_4 باشد. بدین معنا، رابطهٔ (۹) یک رتبه‌بندی کلی بر اساس دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه ارائه می‌کند، که متوسط

هندسی وزن‌های خوشبینانه و بدبینانه هستند. بنابراین، بر این باور هستیم که منطقی‌تر است که C_3 کمی از C_4 مهم‌تر است.

جدول ۳: اولویت‌های ماتریس مقایسهٔ زوجی A و رتبه‌های آنها.

مدل	معیار یا گزینه‌ی تصمیم				
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
مدل DEA/AR (۵)	۰٫۴۴۵ (۵)	۰٫۶۸۴ (۴)	۱٫۰۰۰ (۱)	۱٫۰۰۰ (۱)	۰٫۶۹۵ (۳)
مدل DEA/AR (۸)	۱٫۰۰۰ (۵)	۱٫۴۷۲ (۴)	۲٫۲۲۹ (۱)	۲٫۱۸۳ (۲)	۱٫۵۴۵ (۳)
معادله‌ی (۹)	۰٫۶۶۷ (۵)	۱٫۰۰۳ (۴)	۱٫۴۹۳ (۱)	۱٫۴۷۷ (۲)	۱٫۰۳۶ (۳)

جدول‌های ۴ و ۵ مجموعه وزن‌های خوشبینانه و بدبینانه به دست آمده از دو مدل مختلف DEA/AR را نشان می‌دهند.

جدول ۴: مطلوب‌ترین وزن‌ها بر اساس مدل DEA/ARی (۵).

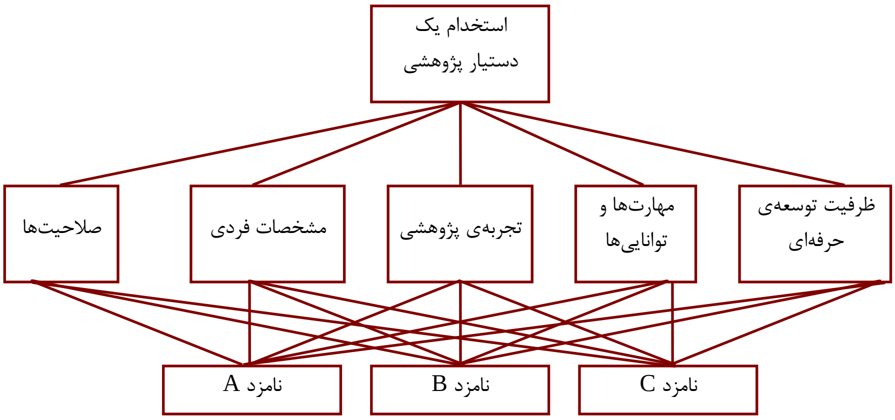
تابع هدف	وزن‌ها				
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
w_1	۰٫۰۸۹	۰٫۱۰۷	۰٫۱۹۲	۰٫۲۰۰	۰٫۱۱۳
w_2	۰٫۰۸۹	۰٫۱۰۷	۰٫۱۹۲	۰٫۲۰۰	۰٫۱۱۳
w_3	۰٫۰۸۰	۰٫۱۳۲	۰٫۱۹۴	۰٫۱۵۷	۰٫۱۱۲
w_4	۰٫۰۶۳	۰٫۱۲۵	۰٫۱۹۵	۰٫۱۶۸	۰٫۱۲۹
w_5	۰٫۰۸۹	۰٫۱۰۷	۰٫۱۹۲	۰٫۲۰۰	۰٫۱۱۳

جدول ۵: نامطلوب‌ترین وزن‌ها بر اساس مدل DEA/AR (۸).

تابع هدف	وزن‌ها				
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
w_1	۰٫۱۹۸	۰٫۲۳۹	۰٫۴۴۶	۰٫۴۵۳	۰٫۲۴۳
w_2	۰٫۱۵۷	۰٫۲۳۸	۰٫۴۴۹	۰٫۴۶	۰٫۳۰۹
w_3	۰٫۱۹۸	۰٫۲۳۹	۰٫۴۴۶	۰٫۴۵۳	۰٫۲۴۳
w_4	۰٫۲۰۰	۰٫۲۵۱	۰٫۳۶۳	۰٫۴۳۷	۰٫۳۱۷
w_5	۰٫۱۵۷	۰٫۲۳۸	۰٫۴۴۹	۰٫۴۶۰	۰٫۳۰۹

مثال ۲: یک گروه آموزشی در یک دانشگاه معتبر در صدد است که یک دستیار پژوهشی را برای انجام یک پروژهٔ تحقیقاتی به مدت سه سال استخدام کند [۲۸]. پس از غربالگری اولیه، سه نامزد برای مصاحبه تعیین می‌شوند. معیارهایی که هیئت مصاحبه متشکل از سه استاد از گروه آموزشی در نظر می‌گیرند، شامل موارد زیر است: *صلاحیت‌ها* (C_1)، *مشخصات فردی* (C_2)، *تجربه‌ی پژوهشی* (C_3)، *مهارت‌ها و توانایی‌ها* (C_4)، و *ظرفیت توسعهٔ حرفه‌ای* (C_5)، که در شکل ۱ نشان داده شده است. پنج معیار انتخاب در جدول ۶ به تفصیل شرح داده شده‌اند. ماتریس‌های مقایسهٔ

زوجی مربوط به پنج معیار انتخاب و سه نامزد که توسط هیئت مصاحبه ارائه شده است، در جدول‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. اگر اعضای هیأت نتوانند به اتفاق نظر دست پیدا کنند و در خصوص یک یا چند مقایسه با یکدیگر اختلاف نظر داشته باشند، آن‌گاه میانگین هندسی یا میانگین هندسی وزن داده شده‌ی آنها باید برای آن مقایسه یا مقایسه‌ها مورد استفاده قرار گیرند.



شکل ۱: ساختار سلسله‌مراتبی استخدام یک دستیار پژوهشی.

جدول ۶: شرح معیارهای انتخاب.

معیار	شرح
صلاحیت‌ها	مدرک کارشناسی ارشد یا بالاتر در یک رشتهٔ مرتبط، ترجیحاً درجهٔ دکترا در یک رشتهٔ مرتبط.
مشخصات فردی	تمایل برای گذراندن آموزش بیشتر در صورت نیاز و پذیرش روال‌های جدید در صورت نیاز و در هنگام ضرورت. تمایل به همکاری در یک تیم پژوهشی چندرشته‌ای.
تجربه‌ی پژوهشی	تجربه و سوابق انجام تحقیقات و تأمین منابع مالی خارجی. سوابق انتشار مقاله در مجلات دانشگاهی مرور شده توسط همتایان. تجربهٔ ارائه سخنرانی در همایش‌ها و اجلاس‌های دانشگاهی و غیردانشگاهی.
مهارت‌ها و توانایی‌ها	مهارت‌های عالی برای ارتباط کتبی و شفاهی و روابط بین‌فردی. توانایی کار کردن بر اساس اراده‌ی شخصی با حداقل نظارت. توانایی ایجاد یک برنامه‌ی پژوهشی و نوشتن مقاله در مجلات پژوهشی خوب. توانایی جذب منابع مالی پژوهشی از منابع خارجی. توانایی آموزش و مشاوره‌ی دانشجویان کارشناسی و ارشد.
ظرفیت توسعه‌ی حرفه‌ای	علاقه به داشتن حرفه‌ی دانشگاهی به عنوان یک تحصیل‌کردهٔ مدیریتی و استاد.

برای ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی ارائه شده در جدول‌های ۷ و ۸، وزن‌های موضعی آنها به جهت مقایسه با استفاده از دو روش اولویت خوشبینانه و بدبینانه محاسبه شده‌اند. تمام وزن‌های موضعی با استفاده از معادلهٔ (۷) به وزن‌های سراسری تجمیع می‌شوند. نتایج در جدول ۹ نشان داده شده‌اند، که بر اساس آن معلوم می‌شود که مدل DEA/AR (۵) نامزد B را به عنوان بهترین نامزد ارزیابی می‌کند، در حالی که مدل DEA/AR (۸) نامزد C را به عنوان بهترین

نامزد معین می‌کند. نهایتاً با استفاده از رابطهٔ (۹) نامزد C به‌عنوان بهترین نامزد تعیین می‌شود.

جدول ۷: ماتریس مقایسهٔ زوجی برای پنج معیار انتخاب و وزن‌های موضعی آن‌ها.

معیار	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	وزن‌های DEA/AR (۵)	وزن‌های DEA/AR (۸)
C_1	۱	۱/۲	۱/۳	۱/۴	۱/۲	۰,۲۲۷	۱,۰۰۰
C_2	۲	۱	۱/۲	۱/۲	۱	۰,۴۳۲	۱,۸۹۴
C_3	۳	۲	۱	۱/۲	۲	۰,۷۱۸	۳,۱۴۸
C_4	۴	۲	۲	۱	۲	۱,۰۰۰	۴,۴۰۰
C_5	۲	۱	۱/۲	۱/۲	۱	۰,۴۳۲	۱,۸۹۴
نسبت همسازی $0.1 > CR = 0.012$ و $\beta = 5.303$							

جدول ۸: ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی برای سه نامزد از نظر معیارهای مختلف و وزن‌های موضعی آنها.

	نامزد A	نامزد B	نامزد C	وزن‌های DEA/AR (۵)	وزن‌های DEA/AR (۸)
مقایسهٔ سه نامزد از نظر صلاحیت‌ها (C_1)					
نامزد A	۱	۲	۱	۱,۰۰۰	۲,۰۰۰
نامزد B	۱/۲	۱	۱/۲	۰,۵۰۰	۱,۰۰۰
نامزد C	۱	۲	۱	۱,۰۰۰	۲,۰۰۰
نسبت همسازی $CR = 0$ و $\beta = 3$					
مقایسهٔ سه نامزد از نظر مشخصات فردی (C_2)					
نامزد A	۱	۱/۲	۳	۰,۵۷۳	۲,۶۱۸
نامزد B	۲	۱	۴	۱,۰۰۰	۴,۵۷۱
نامزد C	۱/۳	۱/۴	۱	۰,۲۱۹	۱,۰۰۰
نسبت همسازی $0.1 > CR = 0.016$ و $\beta = 3.190$					
مقایسهٔ سه نامزد از نظر تجربه‌ی پژوهشی (C_3)					
نامزد A	۱	۱/۳	۱/۵	۰,۱۸۸	۱,۰۰۰
نامزد B	۳	۱	۱/۲	۰,۵۳۱	۲,۸۲۳
نامزد C	۵	۲	۱	۱,۰۰۰	۵,۳۱۲
نسبت همسازی $0.1 > CR = 0.003$ و $\beta = 3.083$					
مقایسهٔ سه نامزد از نظر مهارت‌ها و توانایی‌ها (C_4)					
نامزد A	۱	۱/۲	۱/۲	۰,۴۰۰	۱,۰۰۰
نامزد B	۲	۱	۲	۱,۰۰۰	۲,۵۰۰
نامزد C	۲	۱/۲	۱	۰,۶۳۳	۱,۵۷۹
نسبت همسازی $0.1 > CR = 0.046$ و $\beta = 3.2$					
مقایسهٔ سه نامزد از نظر ظرفیت توسعه‌ی حرفه‌ای (C_5)					
نامزد A	۱	۵	۱	۱,۰۰۰	۳,۶۳۶
نامزد B	۱/۵	۱	۱/۲	۰,۲۷۵	۱,۰۰۰
نامزد C	۱	۲	۱	۰,۷۵	۲,۶۶۷
نسبت همسازی $0.1 > CR = 0.081$ و $\beta = 3.6$					

بر اساس DFA، ما دلایل کافی داریم که باور کنیم که اهمیت نسبی نامزد C توسط معادله‌ی (۹) به درستی ارزیابی شده است. لذا انتخاب نامزد C به عنوان بهترین نامزد، مناسب و نیز قابل اعتمادتر است. این نشان دهندهٔ این واقعیت

است که روش DFA می‌تواند نتیجه‌گیری‌های تصمیم بهتری نسبت به DEA/AR خوشبینانه ارائه کند.

جدول ۹: وزن‌های سراسری و رتبهٔ سه نامزد از نظر هدف کلی.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	وزن‌های سراسری	معادله‌ی (۹)
وزن‌های سراسری سه نامزد بر اساس روش DEA/AR (۸)							
وزن‌های موضعی معیارها	۱٫۰۰۰	۱٫۸۹۴	۳٫۱۴۸	۴٫۴۰۰	۱٫۸۹۴	با نرمال‌سازی (۷)	
نامزد *A*	۲٫۰۰۰	۲٫۶۱۸	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۳٫۶۳۶	۰٫۶۵۶	
نامزد *B*	۱٫۰۰۰	۴٫۵۷۱	۲٫۸۲۳	۲٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۹۶۴	
نامزد *C*	۲٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۵٫۳۱۲	۱٫۵۷۹	۲٫۶۶۷	۱٫۰۰۰	
وزن‌های سراسری سه نامزد بر اساس روش DEA/AR (۵)							
وزن‌های موضعی معیارها	۰٫۲۲۷	۰٫۴۳۲	۰٫۷۱۸	۱٫۰۰۰	۰٫۴۳۲	با نرمال‌سازی (۷)	
نامزد *A*	۱٫۰۰۰	۰٫۵۷۳	۰٫۱۸۸	۰٫۴۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۷۰۵	
نامزد *B*	۰٫۵۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۵۳۱	۱٫۰۰۰	۰٫۲۷۵	۱٫۰۰۰	
نامزد *C*	۱٫۰۰۰	۰٫۲۱۹	۱٫۰۰۰	۰٫۶۳۳	۰٫۷۵۰	۰٫۹۷۶	
رتبه‌ی سه نامزد بر اساس معادله‌ی (۹)							
نامزد *A*							۰٫۶۸۰ (۳)
نامزد *B*							۰٫۹۸۲ (۲)
نامزد *C*							۰٫۹۸۸ (۱)

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، معایب اصلی DEAHP را تحلیل کردیم و یک رویکرد جدید را برای تولید وزن در AHP پیشنهاد کردیم که رویکرد DFA نامیده می‌شود، و می‌توان از آن برای غلبه بر معایب DEAHP، مانند غیرشهودی بودن وزن‌های موضعی برای ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی ناهمساز، غیرحساسیت زیاد نسبت به برخی از مقایسه‌ها، از دست رفتن اطلاعات در ماتریس مقایسهٔ زوجی، و بیش از حد برآورد کردن بعضی از وزن‌های موضعی استفاده کرد. با استفاده از مثال‌های عددی نشان دادیم که رویکرد DFA پیشنهادی می‌تواند بر تمام این معایب غلبه کند. با مثالی در مورد استخدام یک دستیار پژوهشی نشان دادیم که رویکرد DFA تصمیماتی بهتر از DEAHP اتخاذ می‌کند، زیرا DEAHP گاه اهمیت برخی از معیارها و/یا گزینه‌های تصمیم را بیش از حد ارزیابی می‌کند، و موجب نتیجه‌گیری‌هایی می‌شود که زیاد قابل اعتماد نیستند.

علاوه بر این، مدل‌های DEA/AR خوشبینانه و بدبینانه به سهولت قابل استفاده و اجرا هستند، و نیازی به تعیین قبلی ناحیهٔ اطمینان و یا مشخص کردن آن به‌صورت ذهنی ندارند، زیرا ناحیهٔ اطمینان به طور خودکار توسط مدل‌های DEA/AR خوشبینانه و بدبینانه و ماتریس‌های مقایسهٔ زوجی تعیین می‌شود. در مقایسه با روش مشهور EM، مدل‌های DEA/AR خوشبینانه و بدبینانه خطی هستند، نه غیرخطی، و لذا حل آن‌ها آسان‌تر است. این ویژگی‌های خوب موجب می‌شوند که مدل‌های DEA/AR بسیار عملی و جذاب باشند. انتظار می‌رود که رویکرد DFA بتواند کاربردهای بالقوهٔ بیشتری در آینده‌ی نزدیک به دست آورد.

References

1. Saaty T.L., "Fundamentals of decision making and priority theory with the analytic hierarchy process", Pittsburgh: RWS Publications; 2000.

2. Chu A.T.W., Kalaba R.E., Spingarn K., "A comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy sets", Journal of Optimization Theory and Applications, 27(4), (1979) 531–538.

3. Crawford G.B., "The geometric mean procedure for estimating the scale of a judgment matrix", Mathematical Modelling, 9(3-5), (1987) 327–334.

4. Saaty T.L., Vargas L.G., "Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios", Mathematical Modelling, 5(5), (1984) 309–324.

5. Cogger K.O., Yu P.L., "Eigenweight vectors and least-distance approximation for revealed preference in pairwise weight ratios", Journal of Optimization Theory and Applications, 46(4), (1985) 483–491.

6. Islei G., Lockett A.G., "Judgemental modelling based on geometric least square", European Journal of Operational Research, 36(1), (1988) 27–35.

7. Bryson N., "A goal programming method for generating priority vectors", Journal of the Operational Research Society, 46(5), (1995) 641–648.

8. Bryson N., Joseph A., "Generating consensus priority point vectors: a logarithmic goal programming approach", Computers & Operations Research, 26(6), (1999) 637–643.

9. Mikhailov L., "A fuzzy programming method for deriving priorities in the analytic hierarchy process", Journal of the Operational Research Society, 51(3), (2000) 341–349.

10. Mikhailov L., "Group prioritization in the AHP by fuzzy preference programming method", Computers & Operations Research, 31(2), (2004) 293–301.

11. Lipovetsky S., Conklin W.M., "Robust estimation of priorities in the AHP", European Journal of Operational Research, 137(1), (2002) 110–22.

12. Beynon M.J., "Understanding local ignorance and non-specificity within the DS/AHP method of multi-criteria decision making", European Journal of Operational Research, 163(2), (2005) 403–417.

13. Beynon M., "DS/AHP method: a mathematical analysis, including an understanding of uncertainty", European Journal of Operational Research, 140(1), (2002) 148–164.

14. Beynon M., Curry B., Morgan P., "The Dempster–Shafer theory of evidence: an alternative approach to multicriteria decision modeling", Omega, 28(1), (2000) 37–50.

15. Shafer G., "A mathematical theory of evidence", Princeton: Princeton University Press; 1976.

16. Gass S.I., Rapcsák T., "Singular value decomposition in AHP", European Journal of Operational Research, 154(3), (2004) 573–584.

17. Laininen P., Hämäläinen R.P., "Analyzing AHP-matrices by regression", European Journal of Operational Research, 148(3), (2003) 514–524.

18. Stam A., Silva A.P.D., "On multiplicative priority rating methods for the AHP", European Journal of Operational Research, 145(1), (2003) 92–108.

19. Sugihara K., Ishii H., Tanaka H., "Interval priorities in AHP by interval regression analysis", European Journal of Operational Research, 158(3), (2004) 745–754.

20. Chandran B., Golden B., Wasil E., "Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process", Computers & Operations Research, 32(9), (2005) 2235–2254.

21. Srdjevic B., "Combining different prioritization methods in the analytic hierarchy process synthesis", Computers & Operations Research, 32(7), (2005) 1897–1919.

22. Wang Y.-M., Parkan C., Luo Y. "Priority estimation in the AHP through maximization of correlation coefficient", Applied Mathematical Modelling, 31(12), (2007) 2711–2718.

23. Vaidya O.S., Kumar S., "Analytic hierarchy process: an overview of applications", European Journal of Operational Research, 169(1), (2006) 1–29.

24. Ramanathan R., "Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process", Computers & Operations Research, 33(5), (2006) 1289–1307.

25. Yang T., Kuo C., "A hierarchical AHP/DEA methodology for the facilities layout design problem", European Journal of Operational Research, 147(1), (2003) 128–136.

26. Ertay T., Ruan D., Tuzkaya U.R., "Integrating data envelopment analysis and analytic hierarchy for the facility layout design in manufacturing systems", Information Sciences, 176(3), (2006) 237–262.

27. Sinuany-Stern Z., Mehrez A., Hadad Y., "An AHP/DEA methodology for ranking decision making units", International Transactions in Operational Research, 7(2), (2000) 109–124.
28. Wang Y.-M., Chin K.-S., Poon G.K.K., "A data envelopment analysis method with assurance region for weight generation in the analytic hierarchy process", Decision Support Systems, 45(4), (2008) 913–921.
29. Azizi H., Wang Y.-M., "Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision-making units", Measurement, 46(3), (2013) 1325-1332.
30. Amirteimoori A., "DEA efficiency analysis: Efficient and anti-efficient frontier", Applied Mathematics and Computation, 186, (2007) 10-16.
31. Wang Y.M., Lan Y.X., "Measuring Malmquist productivity index: A new approach based on double frontiers data envelopment analysis", Mathematical and Computer Modelling, 54, (2011) 2760–2771.
32. Wang Y.M., Luo Y., "DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units", Applied Mathematics and Computation, 173, (2006) 902-915.
33. Wang Y.M., Chin K.S., "A new approach for the selection of advanced manufacturing technologies: DEA with double frontiers", International Journal of Production Research, 47, (2009) 6663-6679.
34. Foroughi A.A., Aouni B., "Ranking units in DEA based on efficiency intervals and decision-maker’s preferences", International Transactions in Operational Research, 19, (2012) 567–579.
35. Chen J.X., "A comment on DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units", Applied Mathematics and Computation, 219, (2012) 583–591.
36. Hatami-Marbini A., Saati S., Tavana M., "An ideal-seeking fuzzy data envelopment analysis framework", Applied Soft Computing, 10, (2010) 1062–1070.
37. Mirhedayatian S.M., Vahdat S.E., Jafarian Jelodar M., Farzipoor Saen R., "Welding process selection for repairing nodular cast iron engine block by integrated fuzzy data envelopment analysis and TOPSIS approaches", Materials and Design, 43, (2013) 272–282.

38. Amirteimoori A., Azizi H., Kordrostami S., "Double frontier two-stage fuzzy data envelopment analysis", International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 28(1), (2020) 117–152.

۳۹. عزیزی حسین، حسین‌زاده حسن، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری با استفاده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه، مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، دوره‌ی ۱۷، شماره‌ی ۱، ۱۱۸-۱۰۳، بهار ۱۳۹۹.

۴۰. عزیزی حسین، مدل‌های جدیدی برای انتخاب ارائه دهندگان طرف ثالث تدارکات معکوس در حضور عوامل متعدد دارای نقش دوگانه: یک رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها با مرز دوگانه، تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دورهٔ ۵، شمارهٔ ۲، ۲۳۲-۲۲۱، تابستان ۱۳۹۹.

۴۱. عزیزی حسین، فرضی‌پور صائن رضا، انتخاب بهترین فناوری در حضور هر دو نوع داده‌های اصلی و ترتیبی: DEA با مرزهای کارآ و ناکارآ، فصلنامه مدیریت توسعه و تحول، دوره‌ی ۱۳۹۵، شماره‌ی ۲۶، ۲۳-۱۳، پاییز ۱۳۹۵.

۴۲. عزیزی حسین، یک رویکرد جدید مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها با مرز دوگانه برای رتبه‌بندی قواعد کشف شده از داده‌کاوی، پژوهش‌های نوین در ریاضی، دوره‌ی ۴، شماره‌ی ۱۳، ۳۰-۱۷، بهار ۱۳۹۷.

43. Doyle J.R., Green R.H., Cook W.D., "Upper and lower bound evaluation of multiattribute objects: Comparison models using linear programming", Organizational Behavior and Human Decision Processes, 64, (1995) 261-273.

44. Entani T., Maeda Y., Tanaka H., "Dual models of interval DEA and its extension to interval data", European Journal of Operational Research, 136, (2002) 32-45.

45. Jahed R., Amirteimoori A., Azizi H. "Performance measurement of decision-making units under uncertainty conditions: An approach based on double frontier analysis", Measurement, 69, (2015) 264-279.

46. Hwang C.L., Yoon K., "Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications", Springer-Verlag, Berlin, 1981.

47. Wang Y.-M., Chin K.-S., Yang J.-B., "Measuring the performances of decision-making units using geometric average efficiency", Journal of the Operational Research Society, 58(7), (2007) 929–937.

48. Wang Y.-M., Chin K.-S., "A new data envelopment analysis method for priority determination and group decision making in the analytic hierarchy process", European Journal of Operational Research, 195(1), (2009) 239–250.