

# ساختارهای توپولوژیکی حاصل از اتوماتای فازی عمومی بر اساس تکواریه مشبکه مرتب

خدیجه ابول پور

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شیراز، گروه ریاضی

پذیرش ۹۹/۱۲/۰۶

دریافت ۹۹/۱۰/۱۳

## چکیده

نقش اساسی خواص جبری در توسعه مبانی علم کامپیوتر موجب شده تا پژوهش‌گران مفاهیم تفکیک‌پذیری، هم‌بندی و معکوس‌پذیری اتوماتای فازی را در سطح وسیعی بررسی کنند. در این مقاله، اتوماتای فازی عمومی را از دیدگاه جبری و توپولوژیکی بررسی کرده و خواص جبری اتوماتای مذکور را بر اساس تکواریه مشبکه مرتب بررسی می‌کنیم. از طرف دیگر، اتوماتای فازی عمومی را با استفاده از مفاهیم عملگرها بررسی می‌کنیم. این عملگرها به ما در بررسی جبری اتوماتای فازی عمومی کمک کرده و بستر لازم را برای استفاده از مفاهیم توپولوژیکی فراهم می‌آورند. بدین منظور، با در نظر گرفتن تعریف اتوماتای فازی عمومی، اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی را که در آن  $B$  یک تکواریه مشبکه مرتب متشکل از گزاره‌های مربوط به اتوماتای فازی عمومی است، تعریف می‌کنیم. سپس، عملگرهای درونی و بستر کوراتوفسکی  $L^B$ -ارزشی را روی مجموعه حالت‌های اتوماتای مذکور تعریف کرده و ساختارهای توپولوژیکی حاصل از این عملگرها را معرفی می‌کنیم. نکته قابل توجه در این پژوهش، پیدا کردن مفاهیم جبری و توپولوژیکی برای اتوماتای فازی عمومی بر اساس تکواریه مشبکه مرتب است که به ساختارهای تکواریه وابسته، بستگی دارد. در پایان، برخی خواص هم‌بندی و تفکیک‌پذیری اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی را بررسی می‌کنیم و با ارائه مثال این مفاهیم را روشن می‌سازیم.

واژه‌های کلیدی: اتوماتای فازی عمومی، تکواریه، عملگر، هم‌بند، تفکیک‌پذیر

## مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵، به وسیله لطفی زاده ارائه شد [۲۸]؛ که علاوه بر توسعه منطق دو ارزشی یک نظریه جدید به وجود آمد. هم‌چنین، وی [۲۴] و سانتوس [۲۰] ایده اتوماتای فازی را ارائه کردند. قبل از آن، مفهوم ساده‌تری از ماشین حالت متناهی فازی (که تقریباً مشابه با اتوماتای فازی است) به وسیله مالک، موردسون و سن [۱۵]، [۱۶] معرفی شده بود. متعاقباً مفاهیم متفاوتی به وسیله کیم، کیم و چو [۱۱]، کامبوجکار و چوداری [۱۲] و کیو [۱۷] ارائه شده بود. اخیراً، ژوئن [۸]–[۱۰] مفهوم ماشین حالت متناهی فازی متناظر با مجموعه‌های فازی شهودی را تعمیم داد و ماشین حالت متناهی فازی شهودی نامیده شد. در میان طیف متعارف اتوماتا (یعنی، اتوماتای حالت متناهی قطعی (DFA)، اتوماتای حالت متناهی غیرقطعی (NFA)، اتوماتای احتمالی (PA) و اتوماتای حالت متناهی فازی (FFA))، DFA بیش‌تر از اتوماتاهای دیگر در سطوح مختلف به کار برده شده است. همه انتقال‌ها در اتوماتای حالت متناهی قطعی و اتوماتای حالت متناهی غیرقطعی ارزش ضمنی یک دارند، جایی که ارزش انتقال‌ها در اتوماتای احتمالی و اتوماتای حالت متناهی فازی متعلق به بازه  $[0, 1]$  است. بنابراین، در انواع متعارف اتوماتاها، یک انتقال با ارزش صفر به این معنی است که انتقالی وجود ندارد. در صورتی که، در تعریف جدید برای اتوماتای حالت متناهی فازی ممکن است یک انتقال با ارزش صفر موجود باشد. این دلیلی است که از بازه  $[0, 1]$  به‌عنوان بازه فازی استفاده شده است.

\*نویسنده مسئول abolpor\_kh@yahoo.com

هم‌چنین، چند عضویتی از ویژگی‌های ذاتی و طبیعی اتوماتای فازی است، که برای هدف‌های کاربردی مناسب است مسئله چند عضویتی را به صورتی حل کنیم که تنها یک مقدار عضویت به هر حالت فعال منتسب شود. یک نکته بسیار مهم آن است که روش رفع چند عضویتی ساختار FFA را تغییر نمی‌دهد، یعنی بدون اضافه کردن حالت یا انتقال انجام می‌شود. در سال ۲۰۰۵، دوست فاطمه و کرمر مفهوم اتوماتای فازی را توسعه دادند و هم‌چنین مفهوم اتوماتای فازی عمومی را ارائه کردند [۵]. طی سال‌های اخیر، محققان زیادی روی اتوماتای فازی با مقادیر عضویت در شبکه‌های مانده کامل، تکواری‌های شبکه مرتب و برخی دیگر از انواع ساختارهای جبری کار کردند [۱]، [۲]، [۳]، [۷]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۶]. با توجه به این که خواص جبری در توسعه مبانی علم کامپیوتر نقش اساسی دارند، مفاهیم تفکیک‌پذیری، هم‌بندی و معکوس‌پذیری اتوماتای فازی به وسیله موردسون و مالک معرفی و بررسی شد [۱۶]. مفاهیم توپولوژیکی قطعی و توپولوژیکی فازی را می‌توان در نظریه اتوماتای فازی برای به دست آوردن نتایج قطعی، شامل خواص هم‌بندی و تفکیک‌پذیری آنها استفاده کرد [۴]، [۲۱]، [۲۲]، [۲۳]. چندن مشخص‌سازی توپولوژیکی در بررسی اتوماتای فازی با مقادیر عضویت در شبکه‌های مانده کامل ارائه شده است [۱۸]، [۱۹]. علاوه بر این، اساس برخی از جبرهای مرتب شده (به‌عنوان مثال، BL-جبر، MV-جبر و BCK-جبر) از شبکه مانده گرفته شده است. بنابراین، هنگامی که ما شبکه مانده را به‌عنوان یک جبر مرتب در نظر می‌گیریم شباهت زیادی به  $[0,1]$  دارد. از این رو، کار با آن هم به‌عنوان تعمیم مفهوم مجموعه فازی است و هم ارتباط بین منطق جبری و اتوماتای فازی است. مفهوم نظریه اتوماتای L-ارزشی بر اساس منطق کوانتوم در بینگ [۲۷] معرفی شده است. منطق کوانتوم را می‌توان منطقی دانست که مجموعه ارزش درستی آن یک شبکه ارتمودولار است و یک عنصر از شبکه ارتمودولار به هر انتقال از یک اتوماتا تخصیص داده می‌شود. در [۱۸]، [۱۹] نشان داده شده است، که مفاهیم عملگرهای منبع L-ارزشی و جانشین L-ارزشی وابسته به یک اتوماتای L-ارزشی توپولوژیکی L-ارزشی روی مجموعه حالت‌های اتوماتا تعریف می‌کنند. در پژوهشی دیگر تیواری و همکارانش [۲۱]، [۲۲] نظریه اتوماتای  $L^M$  - ارزشی را از دیدگاه جبری و توپولوژیکی معرفی کردند، جایی که L یک شبکه مانده کامل و M یک شبکه توزیع‌پذیر کامل است. در این مقاله، ابتدا خواص جبری اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی را که در آن B یک تکواری شبکه مرتب متشکل از گزاره‌های مربوط به اتوماتای فازی عمومی است بررسی می‌کنیم. سپس، عملگرهای  $L^B$ -ارزشی مختلفی را روی مجموعه حالت‌های اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی تعریف کرده و ساختارهای توپولوژیکی حاصل از آنها را بررسی می‌کنیم.

### تعاریف و مفاهیم اولیه

**تعریف ۱.** [۵]، اتوماتای فازی عمومی (GFA)، یک ماشین هشت‌تایی به صورت

$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

است که در آن:

$$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\} : \text{مجموعه متناهی غیرفازی از حالت‌ها است.}$$

$$\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} : \text{مجموعه متناهی غیرفازی از الفبای ورودی است.}$$

$$\tilde{R} : \text{مجموعه حالت‌های فازی آغازین است و } \tilde{R} \subseteq \tilde{P}(Q)$$

$$Z = \{b_1, b_2, \dots, b_l\} : \text{مجموعه متناهی غیرفازی از عناوین خروجی است.}$$

$$F_1 : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] : \text{یک نگاشت تابعی است که به وسیله } \tilde{\delta} \text{ برای تعیین مقادیر عضویت حالت‌های فعال}$$

به کار برده می‌شود. بنابراین تابع تعیین عضویت نامیده شده است.

تابع  $F_1 = (\mu, \delta)$  به وسیله دو پارامتر به دست می آید:

۱.  $\mu$ : مقدار عضویت ما قبل بلا فصل،

۲.  $\delta$ : ارزش انتقال.

در این تعریف، روندی که به وسیله انتقال از حالت  $q_i$  به حالت  $q_j$  روی نماد ورودی  $a_k$  رخ می دهد بدین صورت تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \mu^{t+1}(q_j) &= \tilde{\delta}((q_i, \mu^t(q_i)), a_k, q_j) \\ &= F_1(\mu^t(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j)) \end{aligned}$$

عبارت بالا بدان معنی است که مقدار عضویت حالت  $q_j$  در زمان  $t+1$ ، به وسیله تابع  $F_1$  با استفاده از مقدار عضویت  $q_i$  در زمان  $t$  و ارزش انتقال محاسبه می شود. در این جا انتخاب های متفاوتی برای تابع  $F_1(\mu, \delta)$  وجود دارد، که مهم ترین انتخاب به کاربرد مورد نظر بستگی دارد. برای مثال، می تواند  $t$ -نرم، بیشینه، کمینه، میانگین یا هر تابع ریاضی مربوط دیگری باشد. تابع  $F_1(\mu, \delta)$  باید در اصول زیر صدق کند:

$$(i) \quad 0 \leq F_1(\mu, \delta) \leq 1$$

$$(ii) \quad F_1(1, 1) = 1, F_1(0, 0) = 0$$

$\tilde{\delta}: (Q \times [0, 1]) \times \Sigma \times Q \rightarrow [0, 1]$ : تابع انتقال تقویت شده است که با استفاده از تابع  $F_1(\mu, \delta)$  حالت فعال به دست آمده از ماقبل بلا فصل اش را به بازه فازی  $[0, 1]$  می نگارد.

$F_2: [0, 1]^* \rightarrow [0, 1]$ : روش رفع چند عضویتی است که چند عضویتی حالت های فعال را بر طرف می کند و یک

مقدار عضویت برای آنها تعیین می کند. بنابراین تابع رفع چند عضویتی نامیده شده است.

**تعریف ۲.** [۵] مجموعه تالی حالت  $q_m$ ، روی نماد ورودی  $a_k$  که با نماد  $Q_{Succ}(q_m, a_k)$  نشان داده می شود، مجموعه همه حالت های  $q_j$  است که به وسیله انتقال های  $\delta(q_m, a_k, q_j)$  ظاهر می شوند.

$$Q_{Succ}(q_m, a_k) = \{q_j \mid \delta(q_m, a_k, q_j) \in \Delta\}$$

به طریق مشابه، مجموعه ماقبل بلا فصل حالت  $q_m$ ، روی نماد ورودی  $a_k$  بدین صورت تعریف می شود:

$$Q_{Pred}(q_m, a_k) = \{q_j \mid \delta(q_j, a_k, q_m) \in \Delta\}$$

**تعریف ۳.** [۶]، جبر  $L = (\ell, \leq, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1)$  را تکواره شبکه مرتب گوئیم هرگاه

(۱)  $L = (\ell, \leq, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1)$  یک شبکه باشد که کوچک ترین عضو آن صفر و بزرگ ترین عضو آن یک است.

(۲)  $(\ell, \otimes, e)$  یک تکواره با عضو همانی  $e \in \ell$  باشد به طوری که برای هر  $a, b, c \in \ell$

$$a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0 \quad (i)$$

(ii) برای هر  $x \in \ell$

$$a \leq b \Rightarrow a \otimes x \leq b \otimes x, x \otimes a \leq x \otimes b$$

$$a \otimes (b \vee c) = (a \otimes b) \vee (a \otimes c) \quad (iii)$$

$$(b \vee c) \otimes a = (b \otimes a) \vee (c \otimes a) \quad \text{و}$$

**تعریف ۴.** [۶]، تکواره  $(\ell, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم علیه صفر نامیده می شود هرگاه برای هر  $a, b \in \ell$

$$a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a \otimes b \neq 0$$

**تعریف ۵.** [۲۵]، فرض کنید  $X$  یک مجموعه ناتهی باشد. یک مجموعه  $L$ -ارزشی در  $X$  با ارزش ثابت  $a$  با نماد  $\mathbf{a}$  نمایش داده می‌شود. از نماد  $L^X$  برای نمایش خانواده‌ای از مجموعه‌های  $L$ -ارزشی در  $X$  استفاده می‌شود.

**تعریف ۶.** [۲۵]، یک عملگر بستار کوراتوفسکی  $L$ -ارزشی روی مجموعه  $X$  نگاشتی است مانند  $c: L^X \rightarrow L^X$  که برای هر  $a \in L$  و  $\lambda, \mu \in L^X$  در این اصول صدق می‌کند:

$$c(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \quad (\text{i})$$

$$\lambda \leq c(\lambda) \quad (\text{ii})$$

$$c(\lambda \cup \mu) = c(\lambda) \cup c(\mu) \quad (\text{iii})$$

$$c(c(\lambda)) = c(\lambda) \quad (\text{iv})$$

**تعریف ۷.** [۲۵]، یک عملگر درونی کوراتوفسکی  $L$ -ارزشی روی مجموعه  $X$  نگاشتی است مانند  $i: L^X \rightarrow L^X$  که برای هر  $a \in L$  و  $\lambda, \mu \in L^X$  در اصول زیر صدق می‌کند:

$$i(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \quad (\text{i})$$

$$i(\lambda) \leq \lambda \quad (\text{ii})$$

$$i(\lambda \cap \mu) = i(\lambda) \cap i(\mu) \quad (\text{iii})$$

$$i(i(\lambda)) = i(\lambda) \quad (\text{iv})$$

## دست‌آوردهای پژوهش

### ۱. اتوماتای فازی عمومی $L^B$ -ارزشی

فرض کنید

$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی باشد. ورودی  $a_k \in \Sigma$  را در زمان  $t_i$  ثابت در نظر می‌گیریم. از این‌رو، گزاره  $\alpha|_{a_k}$  با استفاده از  $\mu^{t_i}(q_i)$  محاسبه می‌شود هرگاه اتوماتای فازی عمومی  $\tilde{F}$  در زمان  $t_i$  در حالت  $q_i$  باشد. در غیر این‌صورت، گزاره  $\alpha|_{a_k}$  صفر در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از مطالب مذکور، برای هر حالت  $q_i \in Q$  ارزش درستی  $\alpha|_{a_k}$  با استفاده از نماد  $\alpha|_{a_k}(q_i) \in [0, 1]$  نشان داده می‌شود. از این‌رو،

در این زیر بخش، منطق  $B$  را که مجموعه‌ای متشکل از گزاره‌های مربوط به اتوماتای فازی عمومی  $\tilde{F}$  است در نظر می‌گیریم. ترتیب  $\leq$  را روی  $B$  بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \leq \beta \quad \text{اگر و تنها اگر برای هر } q \in Q, \alpha(q) \leq \beta(q).$$

هم‌چنین برای  $\alpha, \beta \in B$  و  $q_i \in Q$ ،  $i \geq 0$  تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \otimes \beta = \min(\alpha(q_i), \beta(q_i))$$

یک گزاره با ارزش درستی ثابت 0 را به‌عنوان کوچک‌ترین عضو  $B$  و یک گزاره با ارزش درستی ثابت 1 را به‌عنوان بزرگ‌ترین عضو  $B$  در نظر می‌گیریم. در این صورت، ساختار جبری  $B = (B, \leq, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1)$  یک تکواره مشبکه مرتب است.

در این مقاله  $L = [0, 1]$  در نظر گرفته می‌شود.

زیر مجموعه  $L^B$ -ارزشی،  $\delta: Q \times \Sigma \times Q \rightarrow L^B$  را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\delta(q, a_k, p)(\alpha) = \begin{cases} 1, & q = p \quad \text{اگر} \\ \alpha(q) \vee \alpha(p), & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به عبارت دیگر، نگاشت انتقال  $\delta$  را می توان به صورت خانواده  $\{\delta^\alpha : \alpha \in B\}$  از مجموعه های L-ارزشی  $\delta^\alpha \in L^{Q \times \Sigma \times Q}$  با استفاده از عناصر B در نظر گرفت.

**تعریف ۸.** یک اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی هشت تایی  $\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$  است، جایی که  $\tilde{\delta}$  یک زیرمجموعه  $L^B$ -ارزشی از  $(Q \times L) \times \Sigma \times Q$  است. یعنی،  $\tilde{\delta} : (Q \times L) \times \Sigma \times Q \rightarrow L^B$  به طوری که

$$\tilde{\delta}((q_i, \mu^i(q_i)), a_k, q_j)(\alpha) = F_1(\mu^i(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j)(\alpha)).$$

فرض کنید  $\Sigma^*$  تکواریه تولید شده به وسیله مجموعه ناتهی  $\Sigma$  باشد. تعریف می کنیم:

$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^i(q)), \Lambda, p)(\alpha) = \begin{cases} 1, & q = p \quad \text{اگر} \\ 0, & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

و برای هر  $q, p \in Q, u \in \Sigma^*, x \in \Sigma$  و  $\alpha \in B$

$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^i(q)), ux, p)(\alpha) = \vee \{ \tilde{\delta}^*((q, \mu^i(q)), u, q')(\alpha) \otimes \tilde{\delta}^*((q', \mu^j(q')), x, p)(\alpha) \mid q' \in Q_{\text{Pred}}(p, x) \}.$$

**مثال ۹.** اتوماتای فازی عمومی

$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

را در نظر بگیرید که در آن:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \text{ مجموعه حالت ها،}$$

$$\Sigma = \{a, b\} \text{ مجموعه الفبای ورودی،}$$

$$\tilde{R} = \{(q_0, 1)\} \text{ مجموعه حالت آغازین و}$$

$$Z = \emptyset \text{ است.}$$

عمل اتوماتای فازی عمومی مثال ۹ را تحت رشته ورودی "ab<sup>2</sup>ab" بررسی می کنیم.

$$\text{هر گاه } F_1(\mu, \delta) = \delta$$

$$F_2(\mu) = \mu^{i+1}(q_m) = \bigwedge_{i=1}^n (F_1(\mu^i(q_i), \delta(q_i, a_k, q_m)))$$

داریم:

$$\begin{aligned} \mu^{t_0}(q_0) &= 1, \\ \mu^{t_1}(q_1) &= F_1(\mu^{t_0}(q_0), \delta(q_0, a, q_1)) = \delta(q_0, a, q_1) = 0.3, \\ \mu^{t_2}(q_0) &= F_1(\mu^{t_1}(q_1), \delta(q_1, b, q_0)) = \delta(q_1, b, q_0) = 0.8, \\ \mu^{t_2}(q_2) &= F_1(\mu^{t_1}(q_1), \delta(q_1, b, q_2)) = \delta(q_1, b, q_2) = 0.2, \\ \mu^{t_3}(q_3) &= F_1(\mu^{t_2}(q_0), \delta(q_0, b, q_3)) \wedge F_1(\mu^{t_2}(q_2), \delta(q_2, b, q_3)) \\ &= \delta(q_0, b, q_3) \wedge \delta(q_2, b, q_3) = 0.5 \wedge 0.1 = 0.1, \\ \mu^{t_4}(q_0) &= F_1(\mu^{t_3}(q_3), \delta(q_3, a, q_0)) = \delta(q_3, a, q_0) = 0.3, \\ \mu^{t_4}(q_2) &= F_1(\mu^{t_3}(q_3), \delta(q_3, a, q_2)) = \delta(q_3, a, q_2) = 0.2, \\ \mu^{t_5}(q_3) &= F_1(\mu^{t_4}(q_0), \delta(q_0, b, q_3)) \wedge F_1(\mu^{t_4}(q_2), \delta(q_2, b, q_3)) \\ &= \delta(q_0, b, q_3) \wedge \delta(q_2, b, q_3) = 0.5 \wedge 0.1. \end{aligned}$$

اتوماتای فازی عمومی  $\tilde{F}$  و جدول انتقال آن به ترتیب در نمودار ۱ و جدول ۱ نشان داده شده است. مجموعه  $B = \{0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, 1\}$  از گزاره‌های ممکن درباره اتوماتای فازی عمومی  $\tilde{F}$  بدین صورت تعریف می‌شود:

0: نشان می‌دهد  $\tilde{F}$  در هیچ یک از حالت‌های فعال مجموعه  $Q$  قرار ندارد.

$\alpha_0$ : نشان می‌دهد  $\tilde{F}$  در حالت‌های فعال در زمان  $t_0$  قرار دارد.

$\alpha_1$ : نشان می‌دهد  $\tilde{F}$  در حالت‌های فعال در زمان  $t_1$  قرار دارد.

$\alpha_2$ : نشان می‌دهد  $\tilde{F}$  در حالت‌های فعال در زمان  $t_2$  قرار دارد.

$\alpha_3$ : نشان می‌دهد  $\tilde{F}$  در حالت‌های فعال در زمان  $t_3$  قرار دارد.

$\alpha_4$ : نشان می‌دهد  $\tilde{F}$  در حالت‌های فعال در زمان  $t_4$  قرار دارد.

$\alpha_5$ : نشان می‌دهد  $\tilde{F}$  در حالت‌های فعال در زمان  $t_5$  قرار دارد.

1: نشان می‌دهد که برای هر  $i \geq 0$ ،  $\tilde{F}$  حداقل در یکی از حالت‌های فعال در زمان  $t_i$  قرار دارد.

با توجه به مطالب بالا عناصر  $B$  بدین صورت در نظر گرفته می‌شوند:

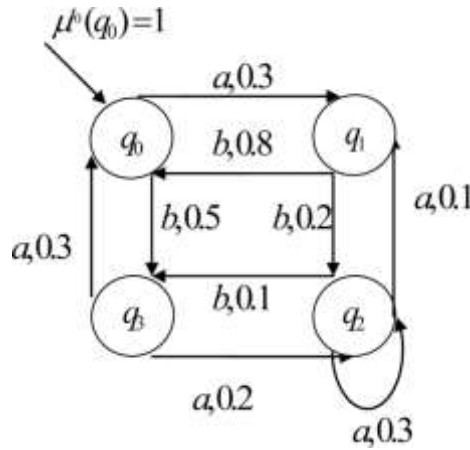
$$0 = (0, 0, 0, 0), \alpha_0 = (1, 0, 0, 0),$$

$$\alpha_1 = (0, 0.3, 0, 0), \alpha_2 = (0.8, 0, 0.2, 0),$$

$$\alpha_3 = (0, 0, 0, 0.1), \alpha_4 = (0.3, 0, 0.2, 0),$$

$$\alpha_5 = (0, 0, 0, 0.1), 1 = (1, 0.3, 0.2, 0.1).$$

در تعریف مذکور برای هر  $i \geq 0$ ،  $\alpha(q_i)$  بیشینه مقادیر عضویت حالت‌های فعال در زمان  $t_i$  است.



نمودار ۱. اتوماتای فازی عمومی مثال ۹

جدول ۱. حالت‌های فعال و مقادیر عضویت آنها در زمان‌های مختلف مثال ۹

| زمان                               | t <sub>0</sub> | t <sub>1</sub> | t <sub>2</sub> |                | t <sub>3</sub> | t <sub>4</sub> |                | t <sub>5</sub> |
|------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| ورودی                              | ∧              | a              | b              |                | b              | a              |                | b              |
| Q <sub>act</sub> (t <sub>i</sub> ) | q <sub>0</sub> | q <sub>1</sub> | q <sub>0</sub> | q <sub>2</sub> | q <sub>3</sub> | q <sub>0</sub> | q <sub>2</sub> | q <sub>3</sub> |
| مقدار                              | 1              | 0.3            | 0.8            | 0.2            | 0.1            | 0.3            | 0.2            | 0.1            |
| عضویت                              |                |                |                |                |                |                |                |                |

با استفاده از تعریف اتوماتای فازی عمومی L<sup>B</sup>-ارزشی داریم:

$$\delta(q_0, a, q_1)(\alpha_1) = \alpha_1(q_0) \vee \alpha_1(q_1) = 0 \vee 0.3 = 0.3,$$

$$\delta(q_2, a, q_2)(\alpha_1) = 1,$$

$$\delta(q_2, b, q_3)(\alpha_3) = \alpha_3(q_2) \vee \alpha_3(q_3) = 0 \vee 0.1 = 0.1,$$

$$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), ab, q_2)(\alpha_1) = \tilde{\delta}((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), a, q_1)(\alpha_1) \otimes \tilde{\delta}((q_1, \mu^{t_1}(q_1)), b, q_2)(\alpha_1)$$

$$= F_1((\mu^{t_0}(q_0), \delta(q_0, a, q_1)(\alpha_1))) \otimes F_1((\mu^{t_1}(q_1), \delta(q_1, b, q_2)(\alpha_1)))$$

$$= \delta(q_0, a, q_1)(\alpha_1) \otimes \delta(q_1, b, q_2)(\alpha_1)$$

$$= [\alpha_1(q_0) \vee \alpha_1(q_1)] \otimes [\alpha_1(q_1) \vee \alpha_1(q_2)] = \alpha_1(q_1) \otimes \alpha_1(q_1) = 0.3.$$

تعریف ۱۰. فرض کنید

$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی L<sup>B</sup>-ارزشی و Q' ⊆ Q. همچنین فرض کنید q ∈ Q', a ∈ Σ, α ∈ B و تالی و ماقبل بلافضل

L<sup>B</sup>-ارزشی مجموعه Q' به ترتیب با استفاده از مجموعه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$S^\alpha(Q') = \{p \in Q' \mid \delta(q, a, p) \in \Delta, \tilde{\delta}((q, \mu^t(q)), a, p)(\alpha) > 0\},$$

$$P^\alpha(Q') = \{p \in Q' \mid \delta(p, a, q) \in \Delta, \tilde{\delta}((p, \mu^t(p)), a, q)(\alpha) > 0\}$$

قضیه ۱۱. فرض کنید (B, ⊗, e) یک تکواره بدون مقسوم‌علیه‌های صفر و F̃ اتوماتای فازی عمومی L<sup>B</sup>-ارزشی باشد.

در این صورت، برای هر p, q, r ∈ Q و α ∈ B

$$p \in S^\alpha(q), q \in S^\alpha(r) \Rightarrow p \in S^\alpha(r)$$

اثبات: فرض کنید  $p \in S^\alpha(q)$  و  $q \in S^\alpha(r)$ . طبق تعریف ۱۰،  $a, b \in \Sigma$  موجود هستند به طوری که  $\tilde{\delta}((q, \mu^i(q)), a, p)(\alpha) > 0$

$$\tilde{\delta}((r, \mu^j(r)), b, q)(\alpha) > 0$$

چون  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم‌علیه‌های صفر است داریم:

$$\tilde{\delta}((r, \mu^j(r)), b, q)(\alpha) \otimes$$

$$\tilde{\delta}((q, \mu^i(q)), a, p)(\alpha) > 0$$

یا به عبارت دیگر،

$$\tilde{\delta}^*((r, \mu^j(r)), ba, p)(\alpha) > 0$$

در نتیجه  $p \in S^\alpha(r)$ .

**قضیه ۱۲.** فرض کنید  $\tilde{F}$  اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی،  $Q', Q'' \subseteq Q$  و  $\alpha \in B$  باشد. آن‌گاه

(الف)  $Q' \subseteq P^\alpha(Q')$  و  $Q' \subseteq S^\alpha(Q')$

(ب)  $S^\alpha(Q' \cup Q'') = S^\alpha(Q') \cup S^\alpha(Q'')$

و  $P^\alpha(Q' \cup Q'') = P^\alpha(Q') \cup P^\alpha(Q'')$

(ج) اگر  $Q' \subseteq Q''$ ، آن‌گاه  $S^\alpha(Q') \subseteq S^\alpha(Q'')$  و  $P^\alpha(Q') \subseteq P^\alpha(Q'')$

اثبات: بدیهی است.

**قضیه ۱۳.** فرض کنید  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم‌علیه‌های صفر و  $\tilde{F}$  اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی باشد.

آن‌گاه برای هر  $Q' \subseteq Q$  و  $\alpha \in B$ ،  $S^\alpha(S^\alpha(Q')) = S^\alpha(Q')$

اثبات: با توجه به قسمت (ج) قضیه ۱۲ داریم:  $S^\alpha(Q') \subseteq S^\alpha(S^\alpha(Q'))$ . بر عکس، فرض کنید  $q \in S^\alpha(S^\alpha(Q'))$

آن‌گاه برای  $p \in S^\alpha(Q')$  و  $a \in \Sigma$ ،  $\tilde{\delta}((p, \mu^i(p)), a, q)(\alpha) > 0$

چون  $p \in S^\alpha(Q')$ ، طبق تعریف برای  $r \in Q'$  و  $b \in \Sigma$

$$\tilde{\delta}((r, \mu^j(r)), b, p)(\alpha) > 0$$

و چون  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم‌علیه‌های صفر است داریم:

$$\tilde{\delta}((r, \mu^j(r)), b, p)(\alpha) \otimes$$

$$\tilde{\delta}((p, \mu^i(p)), a, q)(\alpha) > 0$$

در نتیجه  $\tilde{\delta}^*((r, \mu^j(r)), ba, q)(\alpha) > 0$ . بنابراین  $q \in S^\alpha(Q')$ . ثابت کردیم،  $S^\alpha(S^\alpha(Q')) \subseteq S^\alpha(Q')$  و از

این‌رو،  $S^\alpha(S^\alpha(Q')) = S^\alpha(Q')$

**تعریف ۱۴.** فرض کنید  $\tilde{F}$  اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی باشد.

هم‌چنین فرض کنید  $Q' \subseteq Q$ ،  $q_0 \in Q'$ ،  $\omega' = \omega|_{Q'}$ ،  $B' = B|_{Q'}$ ،  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}|_{(Q' \times L) \times \Sigma \times Q'}$  و  $S^\alpha(Q') = (Q')$

در این صورت،  $\tilde{F}' = (Q', \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}', \omega', F_1, F_2)$  زیر اتوماتای تالی  $L^{B'}$ -ارزشی اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی  $\tilde{F}$

نامیده می‌شود:

علاوه بر این زیر اتوماتای مذکور را زیر اتوماتای تالی  $L^{B'}$ -ارزشی مجزا گوئیم هرگاه  $S^\alpha(Q - Q') \cap Q' = \emptyset$

به طریق مشابه، می‌توان زیر اتوماتای ماقبل بلافصل  $L^{B'}$ -ارزشی اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی  $\tilde{F}$  را تعریف کرد.

**تعریف ۱۵.** اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی



$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

را

الف) همبند قوی گوییم هرگاه برای هر  $p, q \in Q$  و  $\alpha \in B$ ،  $q \in S^\alpha(p)$ .  
 ب) همبند گوییم هرگاه هیچ زیر اتوماتای تالی یا ماقبل بلافصل مجزا نداشته باشد.  
 ج) معکوس پذیر گوییم هر گاه برای هر  $p, q \in Q$ ،  $a, b \in \Sigma$  و  $\alpha \in B$ ،

$$\tilde{\delta}((q, \mu^i(q)), a, p)(\alpha) > 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{\delta}((p, \mu^j(p)), b, q)(\alpha) > 0$$

قضیه ۱۶. اگر اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی  $\tilde{F}$  همبند قوی باشد، آن گاه  $\tilde{F}$  زیر اتوماتای محض ندارد.

اثبات: فرض کنید  $\tilde{F}$  همبند قوی باشد. در این صورت، طبق تعریف برای هر  $p, q \in Q$  و  $\alpha \in B$  داریم:  $q \in S^\alpha(p)$ . بنابراین  $\tilde{F}$  زیر اتوماتای محض ندارد.

قضیه ۱۷. فرض کنید  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم علیه صفر باشد. هم چنین فرض کنید اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی  $\tilde{F}$  زیر اتوماتای محض نداشته باشد. آن گاه  $\tilde{F}$  همبند قوی است.

اثبات: فرض کنید  $q \in Q$ ،  $\alpha \in B$  و

$$\tilde{F}' = (S^\alpha(q), \Sigma, \tilde{R}, \omega', \tilde{\delta}', F_1, F_2)$$

جایی که  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}|_{S^\alpha(q) \times \Sigma \times S^\alpha(q)}$  و  $\omega' = \omega|_{S^\alpha(q)}$ . در این صورت،  $\tilde{F}'$  زیر اتوماتای، اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی  $\tilde{F}$  است. حال چون  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم علیه صفر است داریم:  $S^\alpha(q) \neq \emptyset$ . بنابراین  $S^\alpha(q) = Q$ .

در نتیجه  $\tilde{F}$  همبند قوی است.

قضیه ۱۸. اگر اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی  $\tilde{F}$  همبند قوی باشد، آن گاه  $\tilde{F}$  همبند و معکوس پذیر است.

اثبات: بدیهی است.

قضیه ۱۹. فرض کنید  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم علیه های صفر و  $\tilde{F}$  اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی باشد. اگر  $\tilde{F}$  همبند و معکوس پذیر باشد، آن گاه  $\tilde{F}$  همبند قوی است.

اثبات: فرض کنید  $p, q \in Q$ ،  $\alpha \in B$  و  $p \notin S^\alpha(q)$ . آن گاه  $S^\alpha(q) \neq Q$ .

در این صورت،  $(S^\alpha(q), \Sigma, \tilde{R}, \omega', \tilde{\delta}', F_1, F_2)$  جایی که  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}|_{S^\alpha(q) \times \Sigma \times S^\alpha(q)}$  و  $\omega' = \omega|_{S^\alpha(q)}$  زیرا اتوماتای محض  $\tilde{F}$  است. چون  $\tilde{F}$  همبند است، بنابراین  $S^\alpha(Q - S^\alpha(q)) \cap S^\alpha(q) \neq \emptyset$ .

فرض کنید  $r \in S^\alpha(Q - S^\alpha(q)) \cap S^\alpha(q)$ . آن گاه برای  $q' \in Q - S^\alpha(q)$ ،  $r \in S^\alpha(q')$  و  $r \in S^\alpha(q)$  یا به عبارت دیگر،  $a \in \Sigma$  موجود است به طوری که

$$\tilde{\delta}((q', \mu^i(q')), a, r)(\alpha) > 0$$

چون  $\tilde{F}$  معکوس پذیر است  $b \in \Sigma$  موجود است به طوری که

$$\tilde{\delta}((r, \mu^j(r)), b, q')(\alpha) > 0$$

بنابراین  $q' \in S^\alpha(r)$  و در نتیجه

$$q' \in S^\alpha(r) \subseteq S^\alpha(S^\alpha(q)) = S^\alpha(q)$$

و این تناقض است. از این‌رو، برای هر  $p, q \in Q$  و  $\alpha \in B$  داریم:  $p \in S^\alpha(q)$ . از این‌رو  $\tilde{F}$  هم‌بند قوی است.

## ۲. توپولوژی‌های حاصل از اتوماتای فازی عمومی $L^B$ -ارزشی

در این زیر بخش، با استفاده از مفاهیم مجموعه‌های تالی و ماقبل بلا فصل  $L^B$ -ارزشی، دو توپولوژی روی مجموعه حالت‌های اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی  $\tilde{F}$  تعریف می‌کنیم، جایی که  $(B, \otimes, e)$  به‌عنوان یک تک‌واره بدون مقسوم‌علیه صفر ارائه شده است. علاوه‌براین، خواص هم‌بندی و تفکیک‌پذیری اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی با توجه به این توپولوژی‌ها شرح داده می‌شود.

قضیه ۲۰. فرض کنید

$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی باشد.

الف) مجموعه‌های تالی و ماقبل بلا فصل  $L^B$ -ارزشی که به‌صورت توابع  $S: B \rightarrow L^Q$  و  $P: B \rightarrow L^Q$  معرفی شدند، به‌عنوان عملگرهای بستار کوراتوفسکی روی  $Q$  در نظر گرفته می‌شوند و توپولوژی‌های  $\tau^\alpha(Q)$  و  $\tau'^\alpha(Q)$  را روی مجموعه حالت‌های  $Q$  تولید می‌کنند.

ب) توپولوژی‌های  $\tau^\alpha(Q)$  و  $\tau'^\alpha(Q)$  اشباع شده هستند (یعنی تحت اشتراک دلخواه بسته هستند).

ج) توپولوژی‌های  $\tau^\alpha(Q)$  و  $\tau'^\alpha(Q)$  دوگان هم هستند. یعنی  $Q' \subseteq Q$ ،  $\tau^\alpha(Q)$ -باز است اگر و تنها اگر  $Q'$ ،  $\tau'^\alpha(Q)$ -بسته باشد.

اثبات: الف) با استفاده از قضایای ۱۲ و ۱۳ ثابت می‌شود.

ب) فرض کنید  $\{Q_j | j \in J\}$  یک خانواده از زیر مجموعه‌های  $\tau'^\alpha(Q)$ -بسته از  $Q$  باشند.

هم‌چنین فرض کنید  $A = \bigcup \{Q_j | j \in J\}$ ،  $\alpha \in B$  و  $r \in P^\alpha(A)$ .

در این صورت، طبق تعریف  $a \in \Sigma$  و  $p \in A$  موجود است به‌طوری‌که  $\tilde{\delta}((r, \mu^i(r)), a, p)(\alpha) > 0$ . چون  $p \in A$  از این‌رو، برای تعدادی  $j \in J$  داریم:  $p \in Q_j$ . اما  $p \in P^\alpha(Q_j) = Q_j$  و در نتیجه

$$P^\alpha(p) \subseteq P^\alpha(P^\alpha(Q_j)) = P^\alpha(Q_j)$$

بنابراین  $r \in P^\alpha(Q_j) = Q_j \subseteq A$ .

در نتیجه  $P^\alpha(A) \subseteq A$  و با توجه به این که  $A \subseteq P^\alpha(A)$  نشان دادیم  $A$ ،  $\tau'^\alpha(Q)$ -بسته است.

برای  $\tau^\alpha(Q)$  به طریق مشابه اثبات می‌شود.

ج) بدیهی است.

قضیه ۲۱. فرض کنید

$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

و  $\tilde{F}' = (Q', \Sigma', \tilde{R}', Z', \tilde{\delta}', \omega', F_1', F_2')$  اتوماتاهای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی و  $L^{B'}$ -ارزشی باشند. آن‌گاه

الف)  $\tilde{F}'$  زیر اتوماتای تالی  $\tilde{F}$  است اگر و تنها اگر  $Q'$ ،  $\tau^\alpha(Q)$ -باز باشد.

ب)  $\tilde{F}'$  زیر اتوماتای تالی مجزا از  $\tilde{F}$  است اگر و تنها اگر  $Q'$ ،  $\tau^\alpha(Q)$ -باز و بسته باشد.

اثبات: الف) با استفاده از تعریف ۱۴ و قضیه ۲۰ اثبات می‌شود.

ب) فرض کنید  $\tilde{F}'$  یک زیر اتوماتای تالی مجزا از  $\tilde{F}$  باشد. آن‌گاه برای  $\alpha \in B$  داریم:  $S^\alpha(Q') = Q'$  و

$S^\alpha(Q - Q') = Q - Q'$ . از این‌رو،  $Q'$  و  $Q - Q'$ ،  $\tau^\alpha(Q)$ -باز هستند در نتیجه  $Q'$ ،  $\tau^\alpha(Q)$ -باز و بسته است.

برعکس، فرض کنید  $Q'$ ،  $\tau^\alpha(Q)$  -باز و بسته باشد.

آن‌گاه برای  $\alpha \in B$  داریم،  $S^\alpha(Q') = Q'$  و  $S^\alpha(Q - Q') = Q - Q'$ . در نتیجه  $\tilde{F}$  یک زیر اتوماتای تالی مجزا از  $\tilde{F}$  است.

قضیه ۲۲. فرض کنید

$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی  $L^B$  -ارزشی باشد.

(الف)  $\tilde{F}$  همبند قوی است اگر و تنها اگر  $\tau^\alpha(Q)$  توپولوژی بدیهی باشد.

(ب)  $\tilde{F}$  همبند است اگر و تنها اگر  $\tau^\alpha(Q)$  توپولوژی همبند باشد.

(ج)  $\tilde{F}$  معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر  $\tau^\alpha(Q) - R_0$  توپولوژی باشد.

اثبات: (الف) طبق فرض به‌ازای هر  $q \in Q$  و  $\alpha \in B$ ،  $S^\alpha(q) = Q$ . بنابراین  $\tau^\alpha(Q)$  یک توپولوژی بدیهی است و برعکس.

(ب) فرض کنید  $\tilde{F}$  اتوماتای فازی عمومی  $L^B$  -ارزشی همبند باشد. از این‌رو، طبق تعریف  $\tilde{F}$  زیر اتوماتای تالی محض مجزا ندارد. بنابراین  $Q, \emptyset$  تنها زیر مجموعه‌های  $\tau^\alpha(Q)$  -باز و بسته از  $Q$  هستند. در نتیجه  $\tau^\alpha(Q)$  یک توپولوژی همبند است. برعکس، فرض کنید  $\tau^\alpha(Q)$  یک توپولوژی همبند باشد. در این صورت،  $Q, \emptyset$  تنها زیر مجموعه‌های  $\tau^\alpha(Q)$  -باز و بسته از  $Q$  هستند. از این‌رو  $\tilde{F}$  زیر اتوماتای تالی محض مجزا ندارد و در نتیجه همبند است.

(ج) با توجه به این که به‌ازای هر  $p \in Q$  و  $\alpha \in B$ ،  $S^\alpha(p)$  تنها بستار  $\{p\}$  تحت توپولوژی  $\tau^\alpha(Q)$  است، مطلب فوق ثابت می‌شود.

### ۳. عملگر هسته

در این زیر بخش، عملگر دیگری را روی مجموعه حالت‌های  $Q$  از اتوماتای فازی عمومی  $L^B$  -ارزشی  $\tilde{F}$  معرفی می‌کنیم. با توجه به این که  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر است، عملگر فوق یک عملگر درونی برای توپولوژی  $\tau^\alpha(Q)$  می‌باشد و عملگر هسته نامیده می‌شود.

تعریف ۲۳. فرض کنید

$$\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \tilde{\delta}, \omega, F_1, F_2)$$

اتوماتای فازی عمومی  $L^B$  -ارزشی،  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر،  $\alpha \in B$  و  $Q' \subseteq Q$  باشد. هسته  $Q'$  با استفاده از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$R^\alpha(Q') = \{q \in Q' \mid P^\alpha(q) \subseteq Q'\}$$

برای خلاصه‌نویسی از نماد  $R^\alpha(q)$  به جای  $R^\alpha(\{q\})$  استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲۴. فرض کنید  $\tilde{F}$  اتوماتای فازی عمومی  $L^B$  -ارزشی و  $\alpha \in B$  باشد. آن‌گاه برای هر  $Q', Q'' \subseteq Q$

(الف)  $R^\alpha(Q') \subseteq Q'$

(ب)  $R^\alpha(Q' \cap Q'') = R^\alpha(Q') \cap R^\alpha(Q'')$

(ج) اگر  $Q' \subseteq Q''$ ، آن‌گاه  $R^\alpha(Q') \subseteq R^\alpha(Q'')$

اثبات: بدیهی است.

**قضیه ۲۴.** فرض کنید  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر و  $\tilde{F}$  اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی باشد. آن‌گاه برای هر  $Q' \subseteq Q$  و  $\alpha \in B$ ،  $R^\alpha(R^\alpha(Q')) = R^\alpha(Q')$ .  
اثبات: فرض کنید  $q \in R^\alpha(Q')$ .

آن‌گاه  $P^\alpha(q) \subseteq Q'$ .

برای اثبات این که  $q \in R^\alpha(R^\alpha(Q'))$  کافی است نشان دهیم  $P^\alpha(q) \subseteq R^\alpha(Q')$ .

بدین منظور، فرض کنید  $p \in P^\alpha(q)$ . آن‌گاه برای  $a \in \Sigma$ ،  $\tilde{\delta}((p, \mu^i(p)), a, q)(\alpha) > 0$ .  
هم‌چنین هرگاه  $r \in P^\alpha(p)$ ، برای  $b \in \Sigma$  داریم:

$\tilde{\delta}((r, \mu^j(r)), b, p)(\alpha) > 0$ . چون  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر است، داریم:

$$\tilde{\delta}((r, \mu^j(r)), b, p)(\alpha) \otimes$$

$$\tilde{\delta}((p, \mu^i(p)), a, q)(\alpha) > 0$$

از این‌رو،  $\tilde{\delta}^*((r, \mu^j(r)), ba, q)(\alpha) > 0$  و این نشان می‌دهد  $r \in P^\alpha(q)$ .

حال با توجه به این که  $P^\alpha(q) \subseteq Q'$  و  $r \in P^\alpha(q)$ ،  $P^\alpha(p) \subseteq Q'$  و این ایجاب می‌کند  $P^\alpha(q) \subseteq R^\alpha(Q')$ .  
در نتیجه با استفاده از این مطلب که  $R^\alpha(R^\alpha(Q')) \subseteq R^\alpha(Q')$  داریم:

$$R^\alpha(R^\alpha(Q')) = R^\alpha(Q')$$

**قضیه ۲۵.** فرض کنید  $(B, \otimes, e)$  یک تکواره بدون مقسوم‌علیه صفر و  $\tilde{F}$  اتوماتای فازی عمومی  $L^B$ -ارزشی باشد. آن‌گاه نگاشت  $R: B \rightarrow L^Q$  یک عملگر درونی روی  $Q$  است.  
اثبات: با استفاده از قضایای ۲۳ و ۲۴ ثابت می‌شود.

**قضیه ۲۶.** توپولوژی تعریف شده روی مجموعه  $Q$  به وسیله عملگر  $R$ ، همان  $\tau^\alpha(Q)$  است.

اثبات: کافی است نشان دهیم برای  $Q' \subseteq Q$  و  $\alpha \in B$ ،  $R^\alpha(Q') = Q'$  اگر و تنها اگر  $P^\alpha(Q') = Q'$ . ابتدا فرض کنید  $P^\alpha(Q') = Q'$ . آن‌گاه

$$q \in Q' \Rightarrow P^\alpha(q) \subseteq P^\alpha(Q')$$

$$\Rightarrow q \in R^\alpha(Q') \Rightarrow R^\alpha(Q') = Q'$$

برعکس، فرض کنید  $R^\alpha(Q') = Q'$ . آن‌گاه برای  $q \in R^\alpha(Q')$ ،  $p \in Q'$  وجود دارد به طوری که  $q \in P^\alpha(p)$ .  
چون  $P^\alpha(p) \subseteq Q'$  و در نتیجه  $q \in Q'$ . بنابراین  $P^\alpha(Q') \subseteq Q'$  و از این‌رو  $P^\alpha(Q') = Q'$ .

### نتیجه‌گیری

در این مقاله اتوماتای فازی عمومی را بر اساس تکواره مشبکه مرتب بررسی کردیم. خواص هم‌بندی و تفکیک‌پذیری را بررسی کردیم و توپولوژی‌های به‌دست آمده روی مجموعه حالت‌های اتوماتای مذکور را معرفی کردیم. در آینده مفاهیم جبری و توپولوژیکی دیگری را بر اساس تکواره مشبکه مرتب برای اتوماتای فازی عمومی ارائه می‌دهیم.

### منابع

1. Abolpour Kh., Zahedi M. M., "Isomorphism between two BL-general fuzzy automata", Soft Computing, 16 (2012) 729-736.

2. Abolpour Kh., Zahedi M. M., "BL-general fuzzy automata and accept behavior", *Journal of Applied Mathematics and Computing* 38 (2012) 103-118.
3. Abolpour Kh., Zahedi M. M., "General fuzzy Automata Based on Complete Residuated Lattice-Valued", *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 14 (2017) 103-121.
4. Das P., "A fuzzy topology associated with a fuzzy finite state machine", *Fuzzy Sets and Systems* 105 (1999) 469-479.
5. Doostfateme M., Kremer S. C., "New directions in fuzzy automata", *International Journal of Approximate Reasoning* 38 (2005) 175-214.
6. Guo X., "Grammar theory based on lattice-order monoid", *Fuzzy Sets and Systems* 160 (2009) 1152-1161.
7. Ignjatović J., Ćirić M., Bogdanović S., "Determinization of fuzzy automata with membership values in complete residuated lattices", *Information Sciences* 178 (2008) 164-180.
8. Jun Y. B., "Intuitionistic fuzzy finite state machines", *Journal of Applied Mathematics and Computing* 17 (2005) 109-120.
9. Jun Y. B., "Intuitionistic fuzzy finite switchboard state machines", *Journal of Applied Mathematics and Computing* 20 (2006) 315-325.
10. Jun Y. B., "Quotient structures of intuitionistic fuzzy finite state machines", *Information Sciences* 177 (2007) 4977-4986.
11. Kim Y. H., Kim J. G., Cho S. J., "Products of T-generalized state machines and T-generalized transformation semigroups", *Fuzzy Sets and Systems* 93 (1998) 87-97.
12. Kumbhojkar H. V., Chaudhri S. R., "On proper fuzzification of fuzzy finite state machines", *International Journal of Fuzzy Mathematics* 4 (2008) 1019-1027.
13. Li Y., Pedrycz W., "Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice-orderd monoids", *Fuzzy Sets and Systems* 156 (2005) 68-92.
14. Lihua W., Qiu D., "Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: Reduction and minimization", *Fuzzy Sets and Systems* 161 (2010) 1635-1656.
15. Malik D. S., Mordeson J. N., Sen M. K., "Submachines of fuzzy finite state machine", *Journal of Fuzzy Mathematics* 2 (1994) 781-792.
16. Mordeson J. N., Malik D. S., "Fuzzy automata and languages: theory and applications", London/Boca Raton: Chapman and Hall/CRC (2002).
17. Qiu D., "Characterizations of fuzzy finite automata", *Fuzzy Sets and Systems* 141(2004) 391-414.
18. Qiu D., "Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic (I)", *Science in China* 44 (2001) 419-429.
19. Qiu D., "Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic (II)", *Science in China* 45 (2002) 442-452.

20. Santos E. S., "Maximin automata", *Information and Control* 12 (1968) 367-377.
21. Srivastava A. K., Tiwari S. P., "A topology for fuzzy automata", *Proceedings of the International Conference on Fuzzy Systems. Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer-verlag, 2275 (2002) 485- 490.*
22. Srivastava A. K., Tiwari S. P., "On relationships among fuzzy approximation operators, fuzzy topology, and fuzzy automata", *Fuzzy Sets and Systems* 138 (2003) 197-204.
23. Tiwari S. P., Srivastava A. K., "On a decomposition of fuzzy automata", *Fuzzy Sets and Systems* 151 (2005) 503-511.
24. Wee W. G., "On generalizations of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification", Ph. D. Thesis, Purdue University (1967).
25. Willard S., "General topology", Reading, MA: Addison-Wesley (1972).
26. Xing H., Qiu D., Liu F., Fan Z., "Equivalence in automata theory based on complete residuated lattice-valued logic", *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 1407-1422.
27. Ying M. S., "Automata theory based on quantum logic (I)", *International Journal of Theoretical Physics* 39 (2000) 981-991.
28. Zadeh L. A., "Fuzzy sets", *Information and Control* 8 (1965) 338-353.