



Kharazmi University

# Order arrows and stability of the numerical methods for ordinary differential equations

Ali Abdi  

1. Faculty of Mathematical Sciences, University of Tabriz, 29 Bahman Street, Tabriz, Iran. ✉ E-mail: [a\\_abdi@tabrizu.ac.ir](mailto:a_abdi@tabrizu.ac.ir)

## Article Info

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received: 18 January 2021

Accepted: 6 August 2021

Published online:

3 December 2023

### Keywords:

Stiff differential equations,

Order stars,

Order arrows,

Runge-Kutta methods,

Linear multistep methods,

General linear methods,

Second derivative methods,

Order barriers.

## ABSTRACT

### Introduction

For many numerical methods for solving ordinary differential equations, the stability function is a Padé approximation to function  $\exp$ . The numerical method is  $A$ -stable if the corresponding stability function is an  $A$ -function which is defined as follows.

**Definition.** A rational function  $R$  is an  $A$ -function if  $|R(z)| \leq 1$  whenever  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ .

**Theorem.** A rational function  $R$  is an  $A$ -function if and only if

- all poles are in the left half-plane,
- $|R(iy)| \leq 1$  for all  $y \in \mathbb{R}$  where  $i$  is the imaginary unit.

### Order stars and order arrows

Let us consider the behavior of the function  $\tilde{R}$  given by  $\tilde{R}(z) = e^{-z} R(z)$ . The functions  $R$  and  $\tilde{R}$  have the same poles and, furthermore,  $|R(iy)| = |\tilde{R}(iy)|$ . Hence the basic criterion applies equally to  $\tilde{R}$  as to  $R$ .

The “relative stability function”  $\tilde{R}$  was used as the basis for the theory of order stars. It is also the starting point of the theory of order arrows. Order stars have become a fundamental tool for the understanding of order and stability properties of numerical methods for ordinary differential equations. Order arrows were originally proposed to complement the use of order stars. This paper discusses their properties together with their applications in proving some order barriers for some class of the numerical methods with  $A$ -stability property.

**Definition.** The order star of  $R$  is the set of point in the complex plane for which  $|\tilde{R}(z)| > 1$ .

**Definition.** The order arrows of  $R$  are the lines made up from points in the complex plane for which  $\tilde{R}(z)$  is real and positive.

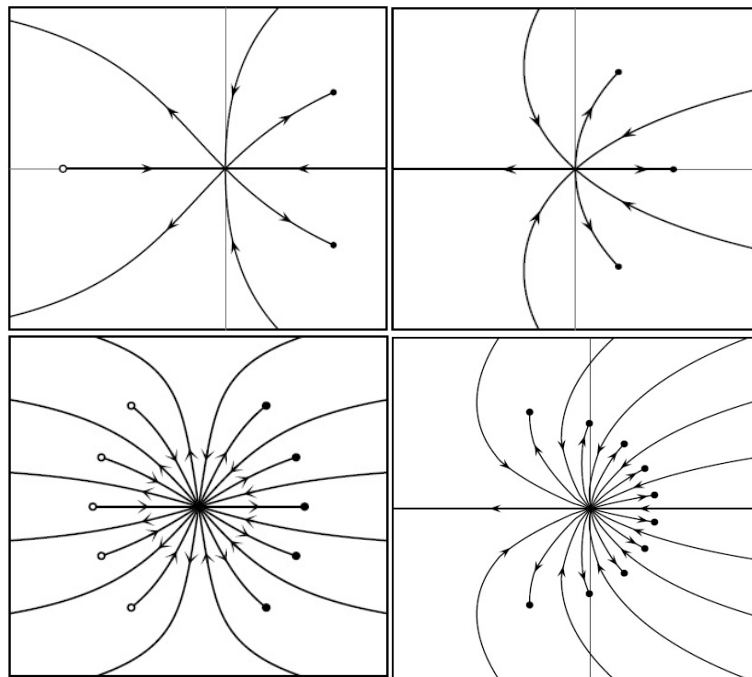
Order arrows for some Padé approximation of the form  $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

with  $\deg(N(z)) = n$  and  $\deg(D(z)) = d$  are presented in Figure 1.

For order arrows of a Padé approximation to function  $\exp$ , an up-arrow emanating from zero follows a path in the complex plane which either terminates at a pole or diverges to  $-\infty$ . Similarly a down-arrow

terminates at a zero or diverges to  $+\infty$ . Also, there are  $p + 1$  up-arrows and  $p + 1$  down-arrows emanating, alternately, from the origin. The angle between each up-arrow and the next down-arrow emanating from origin is  $\frac{\pi}{p + 1}$ . A necessary condition for  $R(z)$  to be  $A$ -function is

that up-arrows emanating from zero cannot be tangential to the imaginary axis, and cannot cross from the right half-plane to the left half-plane. Add to these restrictions, the fact that an up-arrow from zero that terminates at a pole, cannot leave zero in a negative direction. Furthermore, for the approximation  $w$  with  $\Phi(w, z) = 0$  where  $\Phi(w, z)$  is the stability function of a numerical method, the same behavior of the order arrows of  $w$  is necessary condition for  $w$  to be  $A$ -function.



**Figure 1:** Order arrows for Padé approximation of the form  $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  with  $\deg(N(z)) = n$  and  $\deg(D(z)) = d$  for:  $n = 1$  and  $d = 2$  (top-left),  $n = 0$  and  $d = 3$  (top-right),  $n = 5$  and  $d = 5$  (bottom-left),  $n = 0$  and  $d = 10$  (bottom-right).

### Some applications of order arrows

Here, we use order arrows to obtain simpler and more illuminating proof for some well-known order barriers for some numerical methods to be  $A$ -stable.

**Theorem.** An  $A$ -stable linear multistep method cannot has order greater than 2.

**Theorem.** An  $A$ -stable  $k$ -step Obrechhoff method using the first  $\bar{d}$  derivatives of  $y$  defined by cannot has order greater than  $2\bar{d}$ .

---

### Conclusion

In this paper, by studying the properties of order arrows as a complement to order stars, the differential equations of both concepts for the Padé approximation to the exponential function were obtained. Then, some applications of order arrows were presented for establishing order barriers for  $A$ -stable numerical methods within some special classes. A similar discussion can be done for each numerical method in different classes which can be very useful in constructing and analyzing numerical methods.

---

**How to cite:** Abdi, Ali, (2023). Order arrows and stability of the numerical methods for ordinary differential equations. *Mathematical Researches*, 9 (2), 15-30.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## مسیرهای مرتبه‌دار و پایداری روش‌های عددی در معادلات دیفرانسیل معمولی

علی عبدی<sup>1</sup> ✉

۱. دانشیار ریاضی کاربردی، تبریز، بلوار ۲۹ بهمن، دانشگاه تبریز، دانشکده علوم ریاضی. ✉ رایانامه: a\_abdi@tabrizu.ac.ir; [ali.abdi.kalasour@gmail.com](mailto:ali.abdi.kalasour@gmail.com)

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>ستاره‌های مرتبه‌دار به عنوان ابزاری اساسی برای درک مرتبه و خواص پایداری روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی معرفی شدند که با استفاده از آنها می‌توان برخی حدس‌ها و نتایج معروف در خصوص ارتباط بین مرتبه و خواص پایداری روش‌های عددی را اثبات نمود. همچنین مسیرهای مرتبه‌دار برای تکمیل استفاده ستاره‌های مرتبه‌دار معرفی شدند که با استفاده از آنها می‌توان اثبات‌هایی ساده‌تر و جذاب‌تر را برای موانع مرتبه روش‌های عددی با خواص پایداری مطلوب، که اثبات آنها به صورت کلاسیک و حتی با استفاده از ستاره‌های مرتبه‌دار پیچیده است، ارائه نمود. در این مقاله، به بررسی این مفاهیم پرداخته و با به‌دست آوردن معادلات دیفرانسیل مربوط به هر کدام از ستاره‌های مرتبه‌دار و مسیرهای مرتبه‌دار، راهکارهایی جذاب و در عین حال ساده برای رسم آنها ارائه می‌شود. همچنین کاربردهایی از مسیرهای مرتبه‌دار، در اثبات برخی نتایج معروف در روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، ارائه می‌شوند و اثباتی ساده و کوتاه برای قضیه مانع دوم دالکوئیست، ارائه می‌شود.</p>	<p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۲۹</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۵/۱۲</p> <p>تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲</p> <p><b>واژه‌های کلیدی:</b> معادلات دیفرانسیل سخت، ستاره‌های مرتبه‌دار، مسیرهای مرتبه‌دار، روش‌های رانگ-کوتا، روش‌های چندگامی خطی، روش‌های خطی عمومی، روش‌های مشتق دوم، موانع مرتبه</p>

استناد: عبدی، علی؛ (۱۴۰۲). مسیرهای مرتبه‌دار و پایداری روش‌های عددی در معادلات دیفرانسیل معمولی. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۲)، ۱۵-۳۰.



## ۱. مقدمه

روش‌های خطی عمومی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی با شرط اولیه

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(y(x)), & x \in [x_0, X], \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  و  $m$  بُعد دستگاه است، به صورت

$$\begin{aligned} Y_i^{[n]} &= h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_i^{[n]}) + \sum_{j=1}^r u_{ij} y_j^{[n-1]}, & i = 1, 2, \dots, s, \\ y_i^{[n]} &= h \sum_{j=1}^s b_{ij} f(Y_i^{[n]}) + \sum_{j=1}^r v_{ij} y_j^{[n-1]}, & i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (2)$$

تعریف می‌شوند. در اینجا  $h$  طول گام، مقادیر مرحله‌ای  $Y_i^{[n]}$ ،  $i = 1, 2, \dots, s$ ، تقریبی از مرتبه  $q$  به  $y(x_{n-1} + c_i h)$  و مقادیر ورودی  $y_i^{[n-1]}$  و  $y_i^{[n]}$ ،  $i = 1, 2, \dots, r$ ، خروجی به ترتیب تقریبی از مرتبه  $p$  برای  $\sum_{j=0}^p \alpha_{ij} h^j y^{(j)}(x_n)$  و  $\sum_{j=0}^p \alpha_{ij} h^j y^{(j)}(x_{n-1})$  با پارامترهای  $\alpha_{ij}$  مربوط به روش هستند. ساخت و پیاده‌سازی این روش‌ها به‌طور مفصل در [۲۲، ۱۷، ۱۳] مطالعه و بررسی شده‌اند. همچنین کدهایی عملی مبتنی بر این روش‌ها در [۲۱، ۱۴، ۱۰] طراحی شده است که نسبت به کدهای موجود مشابه برتری‌هایی دارد.

این روش‌ها خانواده بزرگی از روش‌های عددی هستند که روش‌های متعارف رانگ-کوتا، چندگامی خطی، پیشگو-اصلاحگر، پیوندی و ... به عنوان حالاتی خاص از این روش‌ها هستند. با این حال، این خانواده بزرگ از روش‌ها شامل روش‌های عددی که از مشتق دوم جواب استفاده می‌کنند، نمی‌شود؛ از این‌رو، این روش‌ها به روش‌های خطی عمومی مشتق دوم که به صورت

$$\begin{aligned} Y_i^{[n]} &= h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_i^{[n]}) + h^2 \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} g(Y_i^{[n]}) + \sum_{j=1}^r u_{ij} y_j^{[n-1]}, & i = 1, 2, \dots, s, \\ y_i^{[n]} &= h \sum_{j=1}^s b_{ij} f(Y_i^{[n]}) + h^2 \sum_{j=1}^s \bar{b}_{ij} g(Y_i^{[n]}) + \sum_{j=1}^r v_{ij} y_j^{[n-1]}, & i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (3)$$

با  $g(\cdot) = \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot) f(\cdot)$  تعریف می‌شوند، توسعه داده شدند. ساخت و پیاده‌سازی این روش‌ها در دسته‌های مختلف آن در مقالات [۱۶، ۹، ۸، ۷، ۳، ۲، ۱] بررسی شده‌اند. همچنین یک کد عملی مبتنی بر این روش‌ها در [۶] طراحی شده است که نسبت به کدهای موجود از جمله ode15s از نرم‌افزار متلب برتری‌های خاصی دارد.

مشابه دیگر روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، برای بررسی پایداری خطی روش‌های خطی عمومی (۱) کافی است آنها را روی مسأله آزمون دالکوئیست  $y' = \xi y$  اعمال کنیم، که در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Y^{[n]} &= zAY^{[n]} + Uy^{[n-1]}, \\ y^{[n]} &= zBY^{[n]} + Vy^{[n-1]}, \end{aligned}$$

که در آن  $z := h\xi$ ، بردار متشکل از مقادیر مرحله‌ای با مولفه‌های  $Y_i^{[n]}$  و  $y^{[n-1]}$  و  $y^{[n]}$  به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی با مولفه‌های  $y_i^{[n]}$  و  $y_i^{[n-1]}$  هستند. حال، با به دست آوردن  $Y^{[n]}$  از معادله اول به صورت

$$Y^{[n]} = (I_s - zA)^{-1}Uy^{[n-1]}$$

با  $I_s$  بردار همانی از بُعد  $s$ ، و جایگذاری آن در معادله دوم خواهیم داشت

$$y^{[n]} = M(z)y^{[n-1]}, \quad (۴)$$

که در آن  $M(z) := V + zB(I_s - zA)^{-1}U$  ماتریس پایداری روش (۲) نامیده می‌شود. به طور مشابه، ماتریس پایداری روش خطی عمومی با مشتق دوم (۳) به صورت  $M(z) := V + (zB + z^T\bar{B})(I_s - zA - z^T\bar{A})^{-1}U$  تعریف می‌شود.

**تعریف ۱.** روش به ازای  $z \in \mathbb{C}$  داده شده، به طور مطلق پایدار گفته می‌شود هرگاه مقادیر ویژه ماتریس پایداری  $M(z)$  روش، یا به طور معادل ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه ماتریس پایداری تعریف شده با

$$\Phi(w, z) = \det(wI_r - M(z)),$$

که تابع پایداری روش نامیده می‌شود، داخل و یا روی دایره واحد قرار بگیرند و ریشه‌هایی که روی دایره واحد قرار دارند، ریشه‌هایی ساده باشند.

**تعریف ۲.** ناحیه پایداری مطلق روش مجموعه  $S$  متشکل از تمام نقاط  $z \in \mathbb{C}$  است که روش به ازای آن نقاط به طور مطلق پایدار است. همچنین روش  $-A$  پایدار گفته می‌شود هرگاه ناحیه پایداری مطلق روش شامل نیم‌صفحه چپ صفحه مختلط باشد.

**تعریف ۳.** روش خطی عمومی (۲) (یا به طور مشابه روش خطی عمومی با مشتق دوم (۳)) روشی با خاصیت پایداری رانگ-کوتا گفته می‌شود هرگاه تنها یک مقدار ویژه ماتریس پایداری  $M(z)$  غیر صفر باشد و یا به عبارتی دیگر، هرگاه تابع پایداری روش شکل خاص

$$\Phi(w, z) = w^{r-1}(w - R(z)),$$

را داشته باشد.

در تعریف ۳، تابع  $R(z)$  که تقریبی (در مواردی تقریبی پایه) برای تابع نمایی  $e^z$  از مرتبه  $p$  (مرتبه روش) است، همان تابع پایداری روش رانگ-کوتا از مرتبه  $p$  است. بنابراین یک روش با خاصیت پایداری رانگ-کوتا  $-A$  پایدار است هرگاه به ازای هر  $z \in \mathbb{C}^-$  داشته باشیم  $|R(z)| \leq 1$ . تابع  $R(z)$  با این خاصیت  $-A$  تابع گفته می‌شود و برای

روش‌های ضمنی به صورت گویای  $\frac{N(z)}{D(z)}$  است. قضیه زیر که به قضیه E-چندجمله‌ای معروف است، محکی جالب و جذاب برای بررسی  $A$ -تابع بودن تابع داده شده  $R(z)$  است.

قضیه ۱ [۱۳]. تابع گویای  $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  یک  $A$ -تابع است اگر و فقط اگر

• تمام قطب‌های  $R(z)$  (یا به‌طور معادل تمام ریشه‌های  $D(z)$ ) در نیم‌صفحه‌ی راست قرار گیرند؛

• به ازای هر عدد حقیقی  $y$  داشته باشیم  $1 \leq |R(iy)|$  که در آن  $i$  واحد موهومی است.

همواره تعارضی بین سه هدف اصلی:

- دقت مطلوب روش با استفاده از روش‌های مرتبه بالا،
- خواص پایداری مطلوب روش، به‌ویژه خاصیت  $A$ -پایداری،
- مقرون به‌صرفه بودن روش از نقطه نظر هزینه محاسباتی،

در طراحی و ساخت یک روش عددی برای معادلات دیفرانسیل وجود دارد. در این مقاله، تعارض بین مرتبه بالا و پایداری مطلوب یک روش عددی، با استفاده از مسیرهای مرتبه‌دار، بحث خواهد شد. در بخش بعدی با بررسی مسیرهای مرتبه‌دار برای توابع گویا به عنوان تقریبی از تابع نمایی، محکی جدید برای  $A$ -تابع بودن تابع داده شده  $R(z)$  معرفی می‌شود. همچنین، معادله دیفرانسیل مربوط به هر کدام از ستاره‌های مرتبه‌دار و مسیرهای مرتبه‌دار یک تقریب پاده به تابع نمایی را به‌دست می‌آوریم. سپس در بخش ۴، کاربردهایی از مسیرهای مرتبه‌دار در اثبات موانع مرتبه روش‌های عددی  $A$ -پایدار ارائه شده و همچنین اثباتی ساده و جذاب برای مانع دوم دالکوئیست که بیان می‌کند حداکثر مرتبه یک روش چندگامی خطی  $A$ -پایدار دو بوده و روش مورد نظر باید ضمنی باشد، ارائه می‌شود.

## ۲. مسیرهای مرتبه‌دار

مسیرهای مرتبه‌دار برای تکمیل استفاده از ستاره‌های مرتبه‌دار معرفی شدند. تابع  $\tilde{R}$  تعریف شده با

$$\tilde{R}(z) = e^{-z} R(z),$$

را در نظر بگیرید. واضح است که توابع  $R$  و  $\tilde{R}$  دارای قطب‌های یکسانی هستند و همچنین به ازای هر عدد حقیقی  $y$  داریم  $|R(iy)| = |\tilde{R}(iy)|$ . بنابراین محک اساسی معرفی شده در قضیه ۱ برای  $A$ -تابع بودن  $R$  را می‌توان برای تابع  $\tilde{R}$  به‌کار برد، یعنی، تابع  $R$  یک  $A$ -تابع است اگر و فقط اگر  $\tilde{R}$  در شرایط قضیه ۱ صدق کند. تابع  $\tilde{R}$  به عنوان

اساس نظریه ستاره‌های مرتبه‌دار استفاده می‌شود. همچنین این تابع نقطه شروع برای مسیرهای مرتبه‌دار است که در ادامه این بخش مطالعه خواهیم کرد.

تعریف ۴ [۲۴،۲۰]. ستاره مرتبه‌دار  $R$  مجموعه  $A$  تعریف شده با

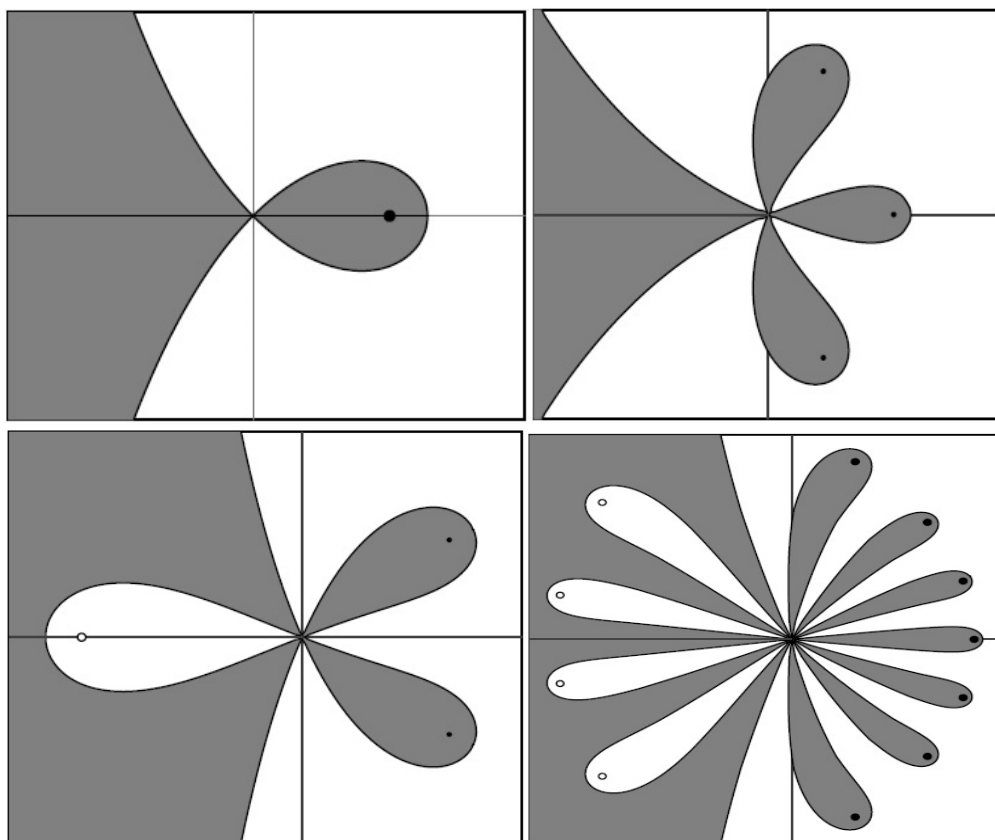
$$A = \{z \in \mathbb{C} : |\tilde{R}(z)| > 1\},$$

است. دوگان ستاره مرتبه‌دار  $R$ ، متمم مجموعه  $A$  یعنی  $A^c$  است.

شرط دوم در قضیه ۱ برای تابع  $\tilde{R}$  با شرط  $A \cap i\mathbb{R} = \emptyset$  معادل است. بنابراین  $-A$  تابع بودن تابع  $R$  معادل با این است که اولاً تمامی قطب‌های  $R$  در نیم صفحه راست قرار گیرند و ثانیاً ستاره مرتبه‌دار آن با محور موهومی اشتراکی

نداشته باشد. در شکل ۱، ستاره‌های مرتبه‌دار برای چهار تقریب پاده  $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  به تابع نمایی به ازای مقادیر

مختلفی از  $\deg(N) = n$  و  $\deg(D) = d$  رسم شده‌اند. در این شکل، قطب‌های تابع  $R$  با دایره توپر و صفرهای آن با دایره توخالی نشان داده شده‌اند. همچنانکه از این شکل درمی‌یابیم، تقریب پاده به تابع نمایی به ازای  $(n, d) = (0, 1)$  و  $(n, d) = (1, 2)$ ،  $-A$  تابع بوده در حالی که به ازای  $(n, d) = (0, 3)$  و  $(n, d) = (4, 7)$ ،  $-A$  تابع نیست.



شکل ۱: ستاره‌های مرتبه‌دار (نواحی خاکستری) و دوگانه ستاره‌های مرتبه‌دار (نواحی سفید) برای تقریبات پاده  $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  به تابع نمایی



با  $n = 0$  و  $d = 1$  (بالا-چپ)،  $n = 0$  و  $d = 3$  (بالا-راست)،  $n = 1$  و  $d = 2$  (پایین-چپ)،  $n = 4$  و  $d = 7$  (پایین-راست).

**تعریف ۵** [۱۱، ۱۲، ۱۵]. مسیر مرتبه‌دار  $R$  مجموعه نقاط  $z$  در صفحه مختلط است که به ازای آنها  $\tilde{R}(z)$  حقیقی و مثبت است.

در ادامه ستاره مرتبه‌دار و مسیر مرتبه‌دار برای تابع پایداری در شکل کلی  $\Phi(w, z)$  بیان شده در تعریف ۱، تعریف می‌شود.

**تعریف ۶** [۵، ۴]. ستاره مرتبه‌دار برای تقریب  $w$ ، با  $\Phi(w, z) = 0$ ، مجموعه زوج مرتب‌های  $(w, z)$  صادق در  $\Phi(we^z, z) = 0$  به طوری که  $|w| > 1$  (ستاره مرتبه‌دار) یا  $|w| < 1$  (دوگان ستاره مرتبه‌دار)، است. همچنین مسیرهای مرتبه‌دار برای چنین تقریبی، مجموعه زوج مرتب‌های  $(w, z)$  صادق در  $\Phi(we^z, z) = 0$  است به طوری که  $w$  حقیقی و مثبت باشد.

ایده اساسی در استفاده از مسیرهای مرتبه‌دار، مسیرهای کاهشی و مسیرهای افزایشی است. مسیر نشأت گرفته از مبدأ که در آن مقدار  $we^{-z}$ ، با  $\Phi(w, z) = 0$ ، کاهشی (یا افزایشی) باشد، مسیر کاهشی (یا افزایشی) نامیده می‌شود. بنابراین، در نمایش تصویری مسیرهای مرتبه‌دار، اضافه کردن نوک پیکان برای نشان دادن افزایش  $we^{-z}$  ضروری به نظر می‌رسد.

خواص زیر از مسیرهای مرتبه‌دار برای تقریب  $w$  از مرتبه  $p$ ، با  $\Phi(w, z) = 0$ ، برای تابع نمایی  $e^z$  اثبات شده‌اند:

- تعداد  $p + 1$  مسیر افزایشی و با همان تعداد مسیر کاهشی نشأت گرفته از مبدأ وجود دارند که به‌طور متناوب و یک در میان ظاهر می‌شوند، وجد دارد؛

- زاویه بین هر مسیر افزایشی و مسیر کاهشی بعدی  $\frac{p}{\pi + 1}$  است؛

- مسیرهای افزایشی در قطب‌ها یا در  $-\infty$  خاتمه می‌یابند؛

- مسیرهای کاهشی در صفرها یا در  $+\infty$  خاتمه می‌یابند؛

- چون مسیرهای افزایشی و کاهشی نشأت گرفته از مبدأ نمی‌توانند همدیگر را قطع کنند، هر قطب و هر صفر در انتهای یک مسیر قرار دارد.

در ادامه معادله دیفرانسیل مربوط به مسیر مرتبه‌دار متناظر با تقریب پاده  $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  به تابع نمایی را به‌دست می‌آوریم: چون هدف یافتن مقادیری از  $z$  در صفحه مختلط است که مقدار  $w$  در

$$wD(z)e^z - N(z) = o, \quad (5)$$

حقیقی و مثبت باشد و با توجه به اینکه  $e^t$  تابعی پوشا برای  $\mathbb{R}^+$  است، لذا در (۵) قرار می‌دهیم  $w = e^t$  و خواهیم داشت

$$e^{z+t}D(z) - N(z) = o, \quad (6)$$

حال می‌توانیم معادله دیفرانسیلی برای  $z$  به عنوان تابعی از  $t$  به دست آوریم. با مشتق‌گیری از (۶) خواهیم داشت

$$e^{z+t}(z'(t)(D'(z) + D(z)) + D(z)) - z'(t)N'(z) = o, \quad (7)$$

با حذف  $e^{z+t}$  از (۶) و (۷)، معادله دیفرانسیل

$$z'(t)F = N(z)D(z), \quad (8)$$

به دست می‌آید، که در آن

$$F = D(z)N'(z) - D'(z)N(z) - D(z)N(z). \quad (9)$$

برای ساده کردن عبارت  $F$ ، فرض کنید  $C$  نشان دهنده ثابت خطا باشد به طوری که

$$e^z D(z) = N(z) + Cz^{p+1} + O(z^{p+2}), \quad (10)$$

که در آن  $p$  مرتبه تقریب پاده  $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  بوده و برابر با  $\deg(N) + \deg(D)$  است. اکنون با مشتق‌گیری خواهیم داشت

$$e^z (D(z) + D'(z)) = N'(z) + (p+1)Cz^p + O(z^{p+1}). \quad (11)$$

با جایگذاری  $D(z)$  و  $D'(z)$  به ترتیب از (۱۰) و (۱۱) در (۹)، خواهیم داشت

$$F = -(p+1)Cz^p + O(z^{p+1}), \quad (12)$$

اما با توجه به اینکه  $F$  یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $p$  است، جمله  $O(z^{p+1})$  در (۱۲) را می‌توان حذف کرد و در نتیجه داریم

$$F = -(p+1)Cz^p,$$

بنابراین، زمانی که  $t$  از صفر در جهت مثبت (مسیر افزایشی) یا در جهت منفی (مسیر کاهششی) انتقال می‌یابد، مقداری از  $z$  که یک مسیر را مشخص می‌کند در معادله دیفرانسیل

$$C(p+1)z^p \frac{dz}{dt} = -N(z)D(z), \quad (13)$$

صدق می‌کند. بایستی توجه شود که چون نقطه  $z = 0$  از مسیره مرتبه‌دار برای تقریب پاده به تابع نمایی از هر مرتبه‌ای است، درمی‌یابیم معادله دیفرانسیل (۱۳) در این نقطه تکین است. بنابراین برای حل این معادله در همسایگی  $z = 0$  از تغییر متغیر  $Z = z^{p+1}$  و  $t = \pm u^{p+1}$  (علامت مثبت و منفی به ترتیب برای مشخص کردن نقاط روی مسیرهای افزایشی و کاهش‌ی در نظر گرفته می‌شود) استفاده می‌کنیم. همچنین، با توجه به اینکه تابع  $e^{it}$  تابعی پوша برای مجموعه نقاط روی دایره واحد است، به‌طور مشابه با روند انجام شده در فوق، نقاط مرزی ستاره مرتبه‌دار در معادله دیفرانسیل

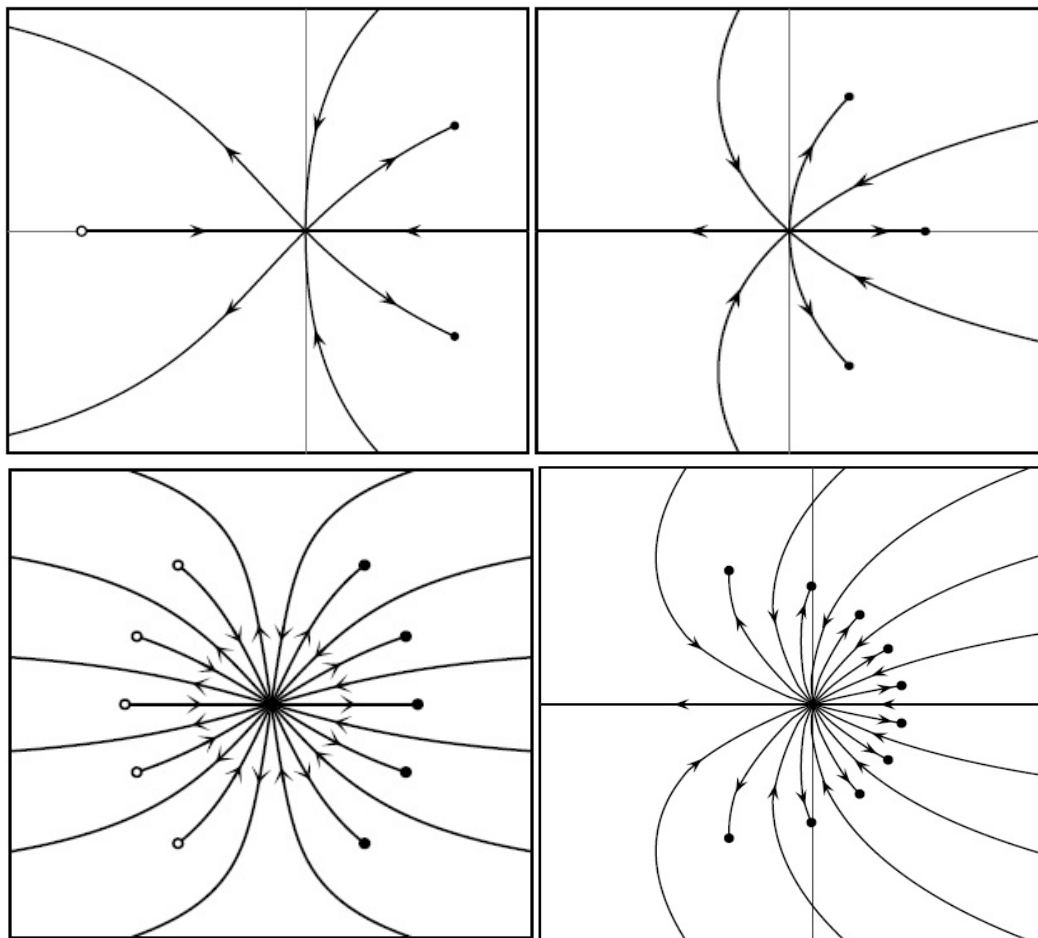
$$C(p+1)z^p \frac{dz}{dt} = -iN(z)D(z),$$

صدق می‌کنند.

حال رفتار مسیرها را در یک  $-A$  تابع بررسی می‌کنیم. بنا به قضیه ۱، در حالت تقریب گویا،  $R(z)$  یک  $-A$  تابع است هرگاه برای مقادیر  $z$  روی محور موهومی  $|R(z)| \leq 1$  باشد و هیچ قطبی در نیم صفحه چپ صفحه مختلط نداشته باشد. با توجه به اینکه ضرب  $e^{-z}$  در  $R(z)$ ، هیچ تأثیری در کران آن روی محور موهومی ندارد و هیچ قطبی از آن را حذف یا اضافه نمی‌کند، می‌توان نتیجه گرفت که یک شرط لازم برای  $-A$  تابع بودن  $R(z)$  این است که مسیرهای افزایشی نشأت گرفته از مبدأ مماس به محور موهومی نباشند (زیرا در غیر این صورت به ازای  $y$  حقیقی کوچکی  $|R(iy)| > 1$  خواهد بود) و از نیم صفحه راست به نیم صفحه چپ عبور نکنند (چون دوباره به ازای  $y$  حقیقی کوچکی  $|R(iy)| > 1$  خواهد بود). شرط اینکه یک مسیر افزایشی نشأت گرفته از مبدأ که به یک قطب ختم می‌شود، نتواند در یک جهت منفی از مبدأ دور شود را به محدودیت‌های قبلی برای  $-A$  تابع بودن اضافه کنید؛ زیرا در غیر این صورت یا این قطب در نیم صفحه چپ قرار خواهد داشت یا این مسیر افزایشی با قطع کردن محور موهومی به نیم صفحه راست برخورد گشت که دوباره رفتار لازم روی محور موهومی برای  $-A$  تابع بودن، نقض می‌شود. همچنین با توجه به اینکه، در تقریب  $w$ ، با  $\Phi(w, z) = 0$ ، یکی از ریشه‌های  $w$ ، در نزدیکی مبدأ تقریبی از مرتبه  $p$  به  $e^z$  است، همین رفتارها برای مسیرهای مرتبه‌دار تقریب  $w$ ، با  $\Phi(w, z) = 0$ ، نیز شرایط لازم برای  $-A$  تابع بودن آنها است.

در شکل ۲، مسیرهای مرتبه‌دار برای چهار تقریب پاده  $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  به تابع نمایی به ازای مقادیر مختلفی از  $\deg(N) = n$  و  $\deg(D) = d$  رسم شده‌اند. در این شکل قطب‌های تابع  $R$  با دوائر توپر و صفرهای آن با دوائر توخالی نشان داده شده‌اند. همچنانکه از این شکل نیز درمی‌یابیم، تقریب پاده به تابع نمایی  $(n, d) = (0, 3)$  و  $(n, d) = (0, 10)$ ،  $-A$  تابع نیست.

در بخش بعدی، کاربردهایی جذاب از مسیرهای مرتبه‌دار در اثبات برخی موانع مرتبه برای روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با خاصیت  $-A$  پایداری، ارائه و معرفی می‌شوند.



شکل ۱: مسیره‌های مرتبه‌دار برای تقریبات پاده  $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  به تابع نمایی با  $n = 1$  و  $d = 2$  (بالا-چپ)،  $n = 0$  و  $d = 3$  (بالا-راست)،  $n = 5$  و  $d = 5$  (پایین-چپ)،  $n = 0$  و  $d = 10$  (پایین-راست).

### ۳. کاربردهایی از مسیره‌های مرتبه‌دار

در این بخش، کاربردهایی از مسیره‌های مرتبه‌دار در اثبات برخی موانع مرتبه برای روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی، به خصوص مانع دوم دالکوئیست، ارائه و معرفی می‌شوند.

روش  $k$ -گامی خطی

$$y_{n+k} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(y_{n+j}) - \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j}, \quad (14)$$

با  $\alpha_0 + \beta_0 \neq 0$ ، را برای حل عددی (۱) در نظر بگیرید. واضح است که روش به ازای  $\beta_k = 0$  روشی صریح و به ازای  $\beta_k \neq 0$  روشی ضمنی است. محدودیت استفاده از این روش‌ها در حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل سخت

را مانع دوم دالکوئیست به‌خوبی روشن می‌کند که در ادامه این قضیه بیان شده و با استفاده از مسیرهای مرتبه‌دار ثابت می‌شود.

**قضیه ۲** (مانع دوم دالکوئیست): مرتبه یک روش چندگامی خطی  $A$ -پایدار نمی‌تواند از دو تجاوز کند و روش مورد نظر باید ضمنی باشد.

برهان. با اعمال روش  $k$ -گامی خطی (۱۴) روی مسأله آزمون دالکوئیست  $y' = \xi y$ ، خواهیم داشت

$$(1 - z\beta_k)y_{n+k} + (\alpha_{k-1} - z\beta_{k-1})y_{n+k-1} + \dots + (\alpha_1 - z\beta_1)y_{n+1} + (\alpha_0 - z\beta_0)y_n = 0.$$

بنابراین، تابع پایداری روش به‌صورت

$$\Phi(w, z) := (1 - z\beta_k)w^k + (\alpha_{k-1} - z\beta_{k-1})w^{k-1} + \dots + (\alpha_1 - z\beta_1)w + (\alpha_0 - z\beta_0),$$

است. فرض کنید روش مورد نظر  $A$ -پایدار باشد. ابتدا توجه می‌کنیم که زاویه جاروب شده توسط دو مسیر افزایشی

همسایه برابر  $\frac{2p}{\pi + 1}$  است و بنا به فرض  $A$ -تابع بودن  $w$  با  $\Phi(w, z) = 0$ ، مسیر افزایشی نشأت گرفته از مبدأ

که قاطع یا مماس به محور موهومی باشد، وجود ندارد. واضح است که تنها قطب ریشه  $w$  از  $\Phi(w, z) = 0$ ، صفر

چندجمله‌ای  $1 - z\beta_k$  (ضریب  $w^k$  در  $\Phi(w, z)$ ) است. فرض کنیم تعداد  $\delta$   $\kappa \leq \delta$  برای روش صریح و

$\delta = 1$  (برای روش ضمنی) مسیر افزایشی به قطب ختم شوند. بنابراین، با توجه به زاویه جاروب شده توسط مسیر

افزایشی مختوم به قطب و دو مسیر افزایشی مجاور، باید داشته باشیم

$$\pi < \frac{2\pi(\kappa + 1)}{p + 1},$$

و در نتیجه

$$\pi < \frac{2\pi(\delta + 1)}{p + 1},$$

که ایجاب می‌کند

$$p \leq 2\delta.$$

بنابراین حداکثر مرتبه روش چندگامی خطی برابر دو (به‌ازای  $\delta = 1$ ) است و روش باید ضمنی باشد. ■

در قضیه بعدی تعمیمی از مانع دوم دالکوئیست را که در خصوص حداکثر مرتبه روش‌های  $A$ -پایدار چندگامی

چندمشتی (روش‌های اُبرشکف) تعریف شده با [۲۳]

$$y_{n+k} = \sum_{i=1}^{\bar{d}} h^i \sum_{j=0}^k \beta_{ij}^{(i)} y_{n+j}^{(i)} - \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j}, \quad (15)$$

که از مشتقات بالاتر جواب در روش استفاده می‌کنند، است، بیان و ثابت می‌کنیم.

**قضیه ۳.** مرتبه یک روش ابرشکف  $A$  پایدار تعریف شده با (۱۵)، نمی‌تواند از  $2\bar{d}$  تجاوز کند.

برهان. با اعمال روش (۱۵) روی مسأله آزمون دالکوئیست  $y' = \xi y$ ، خواهیم داشت

$$(1 - \sum_{i=1}^{\bar{d}} z^i \beta_{ik}) y_{n+k} + (\alpha_{k-1} - \sum_{i=1}^{\bar{d}} z^i \beta_{i,k-1}) y_{n+k-1} + \dots + (\alpha_1 - \sum_{i=1}^{\bar{d}} z^i \beta_{i1}) y_{n+1} + (\alpha_0 - \sum_{i=1}^{\bar{d}} z^i \beta_{i0}) y_n = 0.$$

بنابراین، تابع پایداری روش به صورت

$$\Phi(w, z) := (1 - \sum_{i=1}^{\bar{d}} z^i \beta_{ik}) w^k + (\alpha_{k-1} - \sum_{i=1}^{\bar{d}} z^i \beta_{i,k-1}) w^{k-1} + \dots + (\alpha_1 - \sum_{i=1}^{\bar{d}} z^i \beta_{i1}) w + (\alpha_0 - \sum_{i=1}^{\bar{d}} z^i \beta_{i0}),$$

است. فرض کنید روش مورد نظر در شکل (۱۵)  $A$  پایدار باشد. واضح است که قطب‌های ریشه  $w$  از  $\Phi(w, z) = 0$

همان صفرهای چندجمله‌ای  $1 - \sum_{i=1}^{\bar{d}} z^i \beta_{ik}$  هستند. فرض کنیم تعداد  $\kappa \leq \bar{d}$  مسیر افزایشی به قطب‌ها ختم شوند.

بنابراین، با توجه به زاویه جاروب شده توسط مسیرهای افزایشی مختوم به قطب‌ها و دو مسیر افزایشی مجاور و همچنین فرض  $A$  پایدار روش، باید داشته باشیم

$$\pi < \frac{2\pi(\kappa + 1)}{p + 1},$$

و در نتیجه

$$\pi < \frac{2\pi(\bar{d} + 1)}{p + 1},$$

که ایجاب می‌کند

$$p \leq 2\bar{d}.$$

بنابراین حداکثر مرتبه روش  $A$  پایدار (۱۵) برابر با  $2\bar{d}$  است. ■

**نتیجه ۱.** با استفاده از قضیه ۳، مشخص می‌شود که حداکثر مرتبه روش‌های چندگامی خطی مشتق دوم در شکل کلی

$$y_{n+k} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(y_{n+j}) + h^\nu \sum_{j=0}^k \gamma_j g(y_{n+j}) - \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j}, \quad (16)$$

با خاصیت  $A$  پایداری، برابر چهار است. لازم به اشاره است که چون روش‌های SDBDF [۱۹] تعریف شده با

$$y_{n+k} = h\beta_k f(y_{n+k}) + h^\gamma \gamma_k g(y_{n+k}) - \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j},$$

و روش‌های معرفی شده توسط انزایت [۱۸] به صورت

$$y_{n+k} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(y_{n+j}) + h^\gamma \gamma_k g(y_{n+k}) + y_{n+k-1},$$

حالت‌های خاصی از روش‌های (۱۶) هستند، درمی‌یابیم حداکثر مرتبه این روش‌ها با خاصیت  $A$ -پایداری، برابر چهار است.

#### ۴. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با مطالعه خواص مسیرهای مرتبه‌دار به عنوان ابزاری تکمیل کننده برای ستاره‌های مرتبه‌دار، معادله دیفرانسیل مربوط به هر دو مفهوم برای تقریبات پایه به تابع نمایی به‌دست آمدند. سپس، با استفاده از خواص مطالعه شده، کاربردهایی از مسیرهای مرتبه‌دار در اثبات نتایج قبلی و یا به‌دست آوردن نتایج جدید در خصوص موانع مرتبه برای دسته‌های خاصی روش‌های عددی با خاصیت  $A$ -پایداری ارائه و معرفی شدند. بحث مشابه در این مقاله، برای هر روش عددی در دسته‌های مختلفی نیز قابل انجام است که می‌تواند بسیار مفید در ساخت و آنالیز روش‌ها باشد.

#### References

1. A. Abdi, Construction of high-order quadratically stable second-derivative general linear methods for the numerical integration of stiff ODEs, *J. Comput. Appl. Math.*, **303** (2016), 218–228.
2. A. Abdi and B. Behzad, Efficient Nordsieck second derivative general linear methods: construction and implementation, *Calcolo*, **55** (2018), 1–16.
3. A. Abdi, M. Braš and G. Hojjati, On the construction of second derivative diagonally implicit multistage integration methods, *Appl. Numer. Math.*, **76** (2014), 1–18.
4. A. Abdi and J. C. Butcher, Order bounds for second derivative approximations, *BIT*, **52** (2012), 273–281.
5. A. Abdi, and J. C. Butcher, Applications of order arrows, *Appl. Numer. Math.*, **62** (2012), 556–566.
6. A. Abdi and D. Cone, Implementation of second derivative general linear methods, *Calcolo*, **57** (2020), 1–29.
7. A. Abdi and G. Hojjati, An extension of general linear methods, *Numer. Algorithms*, **57** (2011), 149–167.
8. A. Abdi and G. Hojjati, Implementation of Nordsieck second derivative methods for stiff ODEs, *Appl. Numer. Math.*, **94** (2015), 241–253.
9. A. Abdi and G. Hojjati, Maximal order for second derivative general linear methods with Runge–Kutta stability, *Appl. Numer. Math.* **61** (2011), 1046–1058.

10. A. Abdi and Z. Jackiewicz, Towards a code for nonstiff differential systems based on general linear methods with inherent Runge–Kutta stability, *Appl. Numer. Math.*, **136** (2019), 103–121.
11. J. C. Butcher, The A–stability of methods with Padé and generalized Padé stability functions, *Numer. Algorithms*, **31** (2002), 47–58.
12. J. C. Butcher, Order and stability of generalized Padé approximations, *Appl. Numer. Math.* **59** (2009), 558–567.
13. J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York 2016.
14. J. C. Butcher, P. Chartier and Z. Jackiewicz, Experiments with a variable-order type 1 DIMSIM code, *Numer. Algorithms*, **22** (1999), 237–261.
15. J. C. Butcher and F. H. Chipman, Generalized Padé approximations to the exponential function, *BIT* **32** (1992), 118–130.
16. J. C. Butcher and G. Hojjati, Second derivative methods with RK stability, *Numer. Algorithms*, **40** (2005), 415–429.
17. J. C. Butcher and Z. Jackiewicz, Implementation of diagonally implicit multistage integration methods for ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **34** (1997), 2119–2141.
18. W. H. Enright, Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **11** (1974), 321–331.
19. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential–Algebraic Problems*. Springer, Berlin, 2010.
20. A. Iserles and S. P. Nørsett, *Order Stars*, Chapman & Hall, London, 1991.
21. Z. Jackiewicz, Implementation of DIMSIMs for stiff differential systems, *Appl. Numer. Math.*, **42** (2002), 251–267.
22. Z. Jackiewicz, *General Linear Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, New Jersey, 2009.
23. J. D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, London, 1973.
24. G. Wanner, E. Hairer and S. P. Nørsett, Order stars and stability theorems, *BIT*, **18** (1978), 475–489.