



New methods for constructing shellable simplicial complexes

Mohammad Farrokhi Derakhshandeh Ghouchan¹, Ali Akbar Yazdan Pour²

1. Research Center for Basic Sciences and Modern Technologies (RBST), Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran.

E-mail: farrokhi@iasbs.ac.ir

2. Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran

✉E-mail: yazdan@iasbs.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:

15 February 2021

Received in revised form:

18 April 2021

Accepted:

1 May 2021

Published online:

31 December 2022

Keywords:

clutter,
hybrid clutter,
shellability,
Cohen-
Macaulay,
independence
complex.

Introduction

A clutter $\mathcal{C}$ with vertex set $[n] = \{1, \dots, n\}$ is an antichain of subsets of $[n]$, called circuits, covering all vertices. The clutter is d -uniform if all of its circuits have the same cardinality. If $\mathbb{K}$ is a field, then there is a one-to-one correspondence between clutters on $[n]$ and square-free monomial ideals in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ as follows: To each clutter $\mathcal{C}$ we correspond its circuit ideal $I(\mathcal{C})$ generated by monomials $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ with $\{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{C}$. Conversely, to each square-free monomial ideal I with minimal set of generators $\mathcal{G}(I)$, we correspond a clutter with circuits $\{i_1, \dots, i_k\}$, where $x_{i_1} \cdots x_{i_k} \in \mathcal{G}(I)$. The independence complex of a clutter $\mathcal{C}$ on $[n]$ is the simplicial complex $\Delta_{\mathcal{C}}$ whose faces are independent sets in $\mathcal{C}$ by which we mean sets $F \subseteq [n]$ such that $e \not\subseteq F$ for all $e \in \mathcal{C}$. It is easy to see that the Stanley-Reisner ideal of $\Delta_{\mathcal{C}}$ coincides with $I(\mathcal{C})$. The above correspondence establishes a one-to-one correspondence between simplicial complexes and independence complex of clutters. A simplicial complex Δ is shellable if there exists a total order on its facets, say $F_1 < \cdots < F_m$, such that the simplicial complex $\langle F_1, \dots, F_{i-1} \rangle \cap \langle F_i \rangle$ is pure of dimension $\dim F_i - 1$. A clutter $\mathcal{C}$ is called pure/shellable/Cohen-Macaulay if its independence complex $\Delta_{\mathcal{C}}$ is pure/shellable/Cohen-Macaulay. The shellability of simplicial complexes (and hence shellability of clutters) is an NP-complete problem in general. In this paper, we show that every clutter $\mathcal{C}$ can be embedded into a (pure) shellable clutter $\mathcal{C}'$ and that the clutter $\mathcal{C}'$ can be chosen to be d -uniform if $\mathcal{C}$ is so. Since pure shellable simplicial complexes are Cohen-Macaulay, it follows that every clutter can be embedded into a Cohen-Macaulay clutter.

Main Results

Let $\mathcal{C}$ be a d -uniform clutter with vertex set V . A subset $F \subseteq V$ is called a clique in $\mathcal{C}$ if either $|F| < d$ or else $e \in \mathcal{C}$ for all d -subsets e of F .

Definition. Let $\mathcal{C}$ be a d -uniform clutter with vertex set V and $A_1, \dots, A_\theta$ be a partition of V where each A_i is a clique in $\mathcal{C}$. For each $i = 1, \dots, \theta$ let B_i be a non-empty set such that $B_i \cap V = \emptyset$ and $B_i \cap B_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. Define the d -uniform clutter $\mathcal{C}_{A_1, \dots, A_\theta}^{B_1, \dots, B_\theta}$ as follows:

The clutter $\mathcal{C}_{A_1, \dots, A_\theta}^{B_1, \dots, B_\theta}$ is called $\mathcal{C}_{A_1, \dots, A_\theta}^{B_1, \dots, B_\theta} = \mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\theta} \{e \subseteq A_i \cup B_i : |e| = d\} \right)$

the hybrid clutter of $\mathcal{C}$ with respect to vertex partition $A_1, \dots, A_\theta$ and sets $B_1, \dots, B_\theta$

Theorem 1. Let $\mathcal{C}$ be a d -uniform clutter on the vertex set $[n]$ and $\mathcal{C}_{A_1, \dots, A_\theta}^{B_1, \dots, B_\theta}$ be called the hybrid clutter of $\mathcal{C}$ with respect to vertex partition $A_1, \dots, A_\theta$ and sets $B_1, \dots, B_\theta$ where $|B_i| \geq d-1$, for all $i = 1, \dots, \theta$. Let $\Delta' = \Delta_{\mathcal{C}'}$ be the

independence complex of $\mathcal{C}'$. Then,

- Δ' is pure shellable of dimension $(d-1)\theta-1$.
- The ring $\mathbb{K}[\Delta']$ is Cohen-Macaulay of dimension $(d-1)\theta$.

Theorem 2. Let $\mathcal{C}$ be a d -uniform clutter on the vertex set V . For each $i = 1, \dots, n$ consider m_i finite non-empty set $B_{i,1}, \dots, B_{i,m_i}$ such that $V, B_{i,j}$ are pairwise disjoint. Let $\mathcal{C}'$ be a clutter obtained by $\mathcal{C}$ as follows:

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \{B_{i,1} \cup \{x_i\}, \dots, B_{i,m_i} \cup \{x_i\}\} \right).$$

If $\Delta' := \Delta_{\mathcal{C}'}$ is the independence complex of $\mathcal{C}'$, then

- The simplicial complex Δ' is shellable of dimension $\sum_{i=1}^n |B_i| - 1$.
- $\mathbb{K}[\Delta']$ is Cohen-Macaulay if and only if $m_i = 1$ for all $i = 1, \dots, n$.

How to cite: Farrokhi Derakhshandeh Ghouchan, M., Yazdan Pour, A. A. (2022). New methods for constructing shellable simplicial complexes. *Mathematical Researches*, 8 (4), 164-179.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University



روش‌هایی نوین برای تولید مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر

محمد فرخی درخشنده قوچان^۱، علی اکبر یزدان‌پور^۲^۱. پژوهشکده علوم پایه و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: farrokhi@iasbs.ac.ir^۲. نویسنده مسئول، دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران، رایانامه: yazdan@iasbs.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۱/۲۷	یک کلاتر با مجموعه رؤس V یک پادزنجیر از زیرمجموعه‌های V است که همه راس‌ها را پوشش می‌دهد. ایدال مداری $I(C)$ وابسته به کلاتر C ایدالی خالی از مربع است که توسط تک‌جمله‌ای‌های $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ تولید می‌شود که در آن $\{i_1, \dots, i_k\} \in C$. همچنین مجتمع استقلال C مجتمع سادگی یکتای Δ_C است که $I_{\Delta_C} = I(C)$. در این مقاله نشان می‌دهیم هر کلاتر داده شده مانند C را می‌توان به شکل‌های متنوعی در یک کلاتر بزرگ‌تر مانند C' نشان داد به طوری که مجتمع استقلال C' پوسته‌پذیر باشد. به ویژه کلاتر C' می‌تواند طوری انتخاب شود که حلقه خارج قسمتی ایدال مداری آن کوهن-مکاولی باشد.
واژه‌های کلیدی: کلاتر، کلاتر پیوندی، پوسته‌پذیری، کوهن-مکاولی، مجتمع استقلال.	

استناد: فرخی درخشنده قوچان، محمد؛ یزدان‌پور، علی اکبر؛ (۱۴۰۱). روش‌هایی نوین برای تولید مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۴)، ۱۶۴-۱۷۹.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه و پیش‌نیازها

یک مجتمع سادگی^۱ Δ روی مجموعه رئوس $V = V(\Delta)$ ، خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های V است که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. به ازای هر $v \in V$ داریم، $\{v\} \in \Delta$.

۲. اگر $F \in \Delta$ و $G \subseteq F$ آن‌گاه $G \in \Delta$.

هر عنصر $F \in \Delta$ را یک وجه^۲ از Δ گویند و وجه‌های بیشین Δ تحت رابطه شمول را وجه‌واره^۳ می‌نامند. مجموعه وجه‌واره‌های Δ را معمولاً با $\mathcal{F}(\Delta)$ نمایش می‌دهند. اگر $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \dots, F_m\}$ به طور خلاصه می‌نویسیم $\Delta = \langle F_1, \dots, F_m \rangle$. بعد^۴ هر وجه $F \in \Delta$ را به صورت $\dim F = |F| - 1$ تعریف می‌شود که در آن $|F|$ تعداد عناصر F است و بعد مجتمع سادگی Δ که با $\dim \Delta$ نمایش داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim \Delta = \max \{ \dim F : F \in \Delta \}.$$

مجتمع سادگی Δ را محض^۵ گویند اگر بعد همه وجه‌واره‌های آن برابر باشد. مجتمع سادگی $\{F \in \Delta : |F| \leq i + 1\} = \Delta^{(i)}$ را i -اسکلت^۶ Δ می‌گویند. زیرمجتمع $S \subseteq \Delta$ را یک زیرمجتمع القایی Δ گویند هرگاه به ازای هر $F \in \Delta$ که $F \subseteq S$ داشته باشیم $F \in S$.

فرض کنید $\mathbb{K}$ یک میدان باشد و مجتمع سادگی Δ روی مجموعه رئوس $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ داده شده باشد. به ازای هر زیرمجموعه نا تهی $F = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq V$ تعریف می‌کنیم $\mathbf{x}_F = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ و قرار می‌دهیم $\mathbf{x}_\emptyset = 1$. در این صورت ایدال استنلی-رایزنر^۷ Δ را با I_Δ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_\Delta = (\mathbf{x}_F : F \notin \Delta).$$

همچنین حلقه استنلی-رایزنر Δ را به صورت $\mathbb{K}[\Delta] := S / I_\Delta$ تعریف می‌کنیم که در آن $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{K}$ است. لازم به ذکر است که $\dim \mathbb{K}[\Delta] = 1 + \dim \Delta$ که در آن $\dim \mathbb{K}[\Delta]$ بعد کرول^۸ حلقه استنلی-رایزنر Δ است (۳، قضیه ۴، ۱، ۵) را ببینید.

¹ Simplicial complex

² Face

³ Facet

⁴ Dimension

⁵ Pure

⁶ i-skeleton

⁷ Stanley-Reisner

⁸ Krull dimension

تعریف (مجتمع پوسته‌پذیر)^۹. مجتمع سادگی Δ را پوسته‌پذیر گویند هرگاه یک ترتیب کلی روی وجه‌واره‌های آن به شکل $F_1 < F_2 < \dots < F_r$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $i = 2, \dots, r$ مجتمع سادگی $\langle F_1, \dots, F_{i-1} \rangle \cap \langle F_i \rangle$ یک مجتمع سادگی محض از بعد $\dim F_i - 1$ باشد. هر چنین ترتیبی را یک ترتیب پوسته‌ای^{۱۰} از Δ گویند. به سادگی دیده می‌شود که $F_1 < F_2 < \dots < F_r$ یک ترتیب پوسته‌ای از Δ است اگر و تنها اگر به ازای هر $F_j < F_i$ ، عنصر $F_i \setminus F_j$ و $F_k < F_i$ موجود باشند به طوری که $x \in F_i \setminus F_j$ و $F_i \setminus F_k = \{x\}$.

بررسی پوسته‌پذیری مجتمع‌های سادگی در حالت کلی یک مسأله NP-کامل است [۹]. از آن‌جا که در این مقاله تولید مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم در زیر درباره اهمیت چنین مجتمع‌های سادگی نکته‌هایی را یادآور می‌شویم.

کاربردهایی از مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر: مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر هم در ترکیبیات و هم در جبر جابجایی نقش مهمی ایفا می‌کنند. از نقطه‌نظر ترکیبیاتی مفهوم پوسته‌پذیری منجر به این می‌شود که یک اثبات استقرایی برای فرمول اویلر-پوانکاره^{۱۱} در بعد دلخواه به‌دست بیاوریم. اگر f_i تعداد i -وجه‌های یک چندوجهی^{۱۲} از بعد d را نشان دهد (که در آن $f_{-1} = f_d = 1$)، آن‌گاه فرمول اویلر-پوانکاره بیان می‌کند که

$$\sum_{i=-1}^d (-1)^i f_i = 1.$$

از لحاظ تاریخی این فرمول توسط اویلر در سال ۱۷۵۲ برای چندوجهی‌های از بعد ۳ کشف شد. سپس فرمول اویلر توسط شلافل^{۱۳} (۱۸۵۲) تعمیم داده شد. با این وجود اولین اثبات درست از این فرمول توسط پوانکاره ارائه شد. برای این منظور، پوانکاره متوسل به مبانی توپولوژی جبری شد و پس از ارائه اثبات اولیه در سال ۱۸۹۳ که دارای برخی اشکالات بود، در نهایت در سال ۱۸۹۹ اولین اثبات صحیح از این فرمول را بیان کرد. اثبات‌های استقرایی اولیه‌ای که از این فرمول بیان شدند، به‌ویژه اثبات ارائه شده توسط شلافل در سال ۱۸۵۲، بر این واقعیت استوار است که مرز هر چندوجهی را می‌توان به شکل خوبی به‌صورت استقرایی در کنار هم قرار داد که امروزه آن را ترتیب پوسته‌ای می‌گویند. در عین حال، اثبات این‌که مجتمع مرزی هر چندوجهی پوسته‌پذیر است بعدها توسط بروگس^{۱۴} و منی^{۱۵} در سال ۱۹۷۰ بیان شد و خیلی زود کاربرد قابل توجه و برجسته پوسته‌پذیری توسط مک‌مولن^{۱۶} بیان شد که همان اثبات مربوط به "قضیه کران

^۹ Shellable

^{۱۰} Shelling order

^{۱۱} Euler-Poincaré

^{۱۲} Polytope

^{۱۳} Schläfli

^{۱۴} Bruggesser

^{۱۵} Mani

^{۱۶} McMullen

بالا^{۱۷} برای چندوجهی‌ها می‌باشد. در هر حال، پوسته‌پذیری مجتمع مرزی^{۱۸} یک چندوجهی منجر به این می‌شود که یکی از روشن‌ترین اثبات‌های استقرایی را برای فرمول اوایلر-پوانکاره بیان کنیم (مراجعه شود به فصل ۷ از مرجع [۸]). از نقطه‌نظر جبری این نکته قابل توجه است که حلقه استنلی-رایزنر مجتمع‌های سادگی محض و پوسته‌پذیر، کوهن-مک‌اولی^{۱۹} است و در نتیجه با توجه به مفهوم دوگان الکساندر^{۲۰}، دوگان ایدآل استنلی-رایزنر چنین مجتمع‌هایی، دارای خارج قسمت‌های خطی^{۲۱} (و در نتیجه تحلیل خطی^{۲۲}) هستند. برای درک اهمیت مفهوم پوسته‌پذیری در جبر جابجایی، به کتاب برجسته استنلی بسنده می‌کنیم. در کتاب استنلی [۱۴] بیان شده است «پوسته‌پذیری یک ابزار ساده اما قدرتمند برای اثبات خاصیت کوهن-مک‌اولی است و تقریباً همه مجتمع‌های سادگی کوهن-مک‌اولی که به طور معمول در جبر جابجایی ظاهر می‌شوند در حقیقت پوسته‌پذیر هستند. به‌علاوه برخی از ناوردهای جبری متناظر با مجتمع‌های سادگی کوهن-مک‌اولی در حالت پوسته‌پذیر بودن راحت‌تر محاسبه می‌شوند یا این‌که به‌طور روشن‌تری شرح داده می‌شوند.»

از نقطه‌نظر هندسی، مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر در واقع از خوشه‌ای^{۲۳} از کره‌ها تشکیل شده‌اند [۲]. یعنی اگر Δ یک مجتمع سادگی پوسته‌پذیر باشد، آن گاه Δ به‌طور هموتوپی هم‌ارز با ضرب وجی^{۲۴} (گوه‌ای) تعدادی کره است. به‌طور دقیق‌تر داریم:

$$\Delta \cong \bigwedge_{F_j} \mathbb{S}^{\dim F_j}.$$

با توجه به اهمیت مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر که در بالا ذکر شد، در این مقاله دو خانواده نامتناهی و نسبتاً بزرگ از مجتمع‌های سادگی معرفی می‌کنیم که در ویژگی پوسته‌پذیری صدق می‌کنند. شیوه ساخت این مجتمع‌های سادگی به این صورت است که با یک مجتمع سادگی دلخواه شروع کرده و با اضافه کردن راس‌های جدید و وجه‌های مناسب به مجتمع سادگی جدیدی می‌رسیم که مجتمع اولیه را به طور القایی در بر دارد و علاوه بر آن پوسته‌پذیر نیز می‌باشد. چنین مجتمع‌های سادگی در کنار کاربردهای متنوعی که دارند، نشان می‌دهند ساختار مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر و در حالت کلی‌تر کوهن-مک‌اولی می‌تواند بسیار پیچیده باشد به این معنا که خانواده مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر یا کوهن-مک‌اولی می‌توانند در حالت کلی هر مجتمع سادگی دلخواهی را به عنوان زیرمجتمع سادگی القایی داشته باشند. این مسأله در حالت خاصی که مجتمع سادگی اولیه مجتمع استقلال^{۲۵} یک گراف باشد و مجتمع استقلال گراف بزرگ‌تر

¹⁷ Upper bound theorem

¹⁸ Boundary complex

¹⁹ Cohen-Macaulay

²⁰ Alexander dual

²¹ Linear quotient

²² Linear resolution

²³ Bouquets

²⁴ Wedge product

²⁵ Independence complex

جدید در خاصیت‌های ترکیبیاتی یا توپولوژیکی مانند پوسته‌پذیری، کوهن-مک‌اولی بودن یا شرایط جبری دیگر صدق کند در مقالات متعددی از جمله مراجع [۱، ۴، ۵، ۷، ۱۱، ۱۲، ۱۳] مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۲. تولید مجتمع‌های سادگی پوسته‌پذیر

در این بخش، دو روش متفاوت برای گسترش یک مجتمع سادگی داده شده مانند Δ به یک مجتمع سادگی بزرگ‌تر مانند Δ' ارائه می‌کنیم به‌طوری که Δ' پوسته‌پذیر بوده و Δ را به‌عنوان زیرمجتمع القایی^{۲۶} در بر داشته باشد. در روش اول مجتمع سادگی Δ مجتمع استقلال یک کلاتر d -یکنواخت^{۲۷} دلخواه مانند C است و مجتمع سادگی Δ' که به کمک یک افزاز خوشه‌ای^{۲۸} از C تعریف می‌شود، خود مجتمع استقلال یک کلاتر d -یکنواخت خواهد بود (قضیه ۱). در روش دوم Δ مجتمع استقلال یک کلاتر^{۲۹} دلخواه مانند C بوده و لذا Δ می‌تواند هر مجتمع سادگی دلخواهی باشد اما در تعریف Δ' به جای یک افزاز خوشه‌ای دلخواه از C ، افزازی که در آن هر راس C نقش یک خوشه را بازی می‌کند در نظر گرفته می‌شود (قضیه ۲). گزاره ۳ نشان می‌دهد که دو روش ذکر شده تنها در حالت‌های خیلی خاص بر هم منطبق هستند.

منظور از یک کلاتر C روی مجموعه رئوس $V = V(C)$ ، خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های V است که اولاً $\bigcup C = V$ و ثانیاً به ازای هر $e_1, e_2 \in C$ داشته باشیم $e_1 \not\subseteq e_2$. هر عنصر $e \in C$ را یک مدار^{۳۰} می‌گوییم و کلاتر C را d -یکنواخت می‌گوییم هرگاه هر مدار آن d راس داشته باشد. اگر C یک کلاتر باشد ایدآل مداری^{۳۱} C را با $I(C)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(C) = \{x_e : e \in C\}.$$

زیر مجموعه $I \subseteq V$ را یک مجموعه مستقل^{۳۲} در C می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر $e \in C$ داشته باشیم $e \not\subseteq I$. خانواده همه مجموعه‌های مستقل در C یک مجتمع سادگی است که آن را مجتمع استقلال C می‌نامیم و با Δ_C نمایش می‌دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود که $I_{\Delta_C} = I(C)$. در نتیجه، هر مجتمع سادگی در واقع مجتمع استقلال یک کلاتر است.

²⁶ Induced subcomplex

²⁷ d-uniform clutter

²⁸ Clique partition

²⁹ Clutter

³⁰ Circuit

³¹ Circuit ideal

³² Independent set

در تعریف کلاتر پیوندی، مفهوم خوشه^{۳۳} نقشی کلیدی دارد. خوشه‌ها در یک کلاتر یکنواخت تعریف می‌شوند. فرض کنید C یک کلاتر d -یکنواخت روی مجموعه رئوس V باشد. یک زیرمجموعه $F \subseteq V$ را یک خوشه در C می‌گوییم اگر $|F| < d$ یا این که به‌ازای هر زیرمجموعه d -تایی e از F ، داشته باشیم $e \in C$.

تعریف (کلاتر پیوندی). فرض کنید C یک کلاتر d -یکنواخت روی مجموعه رئوس V باشد و $A_1, \dots, A_\theta$ یک افراز از مجموعه V باشد که در آن هر A_i یک خوشه (نه لزوماً ناتهی) در C است. به‌ازای هر $i=1, \dots, \theta$ ، فرض کنیم B_i یک مجموعه متناهی ناتهی باشد که $B_i \cap V = \emptyset$ و به‌ازای هر $i \neq j$ ، $B_i \cap B_j = \emptyset$. کلاتر d -یکنواخت $C_{A_1, \dots, A_\theta}^{B_1, \dots, B_\theta}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_{A_1, \dots, A_\theta}^{B_1, \dots, B_\theta} = C \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\theta} \{e \subseteq A_i \cup B_i : |e| = d\} \right)$$

کلاتر $C_{A_1, \dots, A_\theta}^{B_1, \dots, B_\theta}$ را کلاتر پیوندی C نسبت به افراز $A_1, \dots, A_\theta$ از رئوس و مجموعه‌های $B_1, \dots, B_\theta$ می‌نامیم.

قضیه ۱. فرض کنید C یک کلاتر d -یکنواخت روی مجموعه رئوس $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ باشد و $C' = C_{A_1, \dots, A_\theta}^{B_1, \dots, B_\theta}$ کلاتر پیوندی C نسبت به افراز $A_1, \dots, A_\theta$ از رئوس و مجموعه‌های $B_1, \dots, B_\theta$ باشد که در آن به‌ازای هر $i=1, \dots, \theta$ ، داشته باشیم $|B_i| \geq d-1$. فرض کنیم $\Delta' = \Delta_{C'}$ مجتمع استقلال C' باشد. در این صورت

$$(۱) \quad \Delta' \text{ یک مجتمع سادگی محض و پوسته‌پذیر از بعد } (d-1)\theta - 1 \text{ است؛}$$

$$(۲) \quad \text{حلقه } \mathbb{K}[\Delta'] \text{ کوهن-مک‌اولی از بعد } (d-1)\theta \text{ است.}$$

برهان. فرض کنیم $\Delta = \Delta_C$ مجتمع استقلال C باشد. به‌ازای هر $F \in \Delta$ یک بلوک از وجه‌واره‌های Δ' را به شرح زیر می‌سازیم:

به‌ازای $F \in \Delta$ ، فرض کنیم $a_i^F = |F \cap A_i|$. در این صورت $0 \leq a_i^F \leq d-1$ ، زیرا F یک مجموعه مستقل در C است. به‌ازای $i=1, \dots, \theta$ ، فرض کنیم $G_{i,1}^F, \dots, G_{i,k_i^F}^F$ زیرمجموعه‌های B_i باشند که $a_i^F + |G_{i,j}^F| = d-1$ ، چون $|B_i| \geq d-1$ ، می‌توان $G_{i,j}^F$ را با این خاصیت انتخاب کرد. در حقیقت داریم $\langle G_{i,1}^F, \dots, G_{i,k_i^F}^F \rangle = \langle B_i \rangle^{(d-2-a_i^F)}$. اکنون بلوکی از مجموعه‌های متناظر با F را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{j_1, \dots, j_\theta}^F = F \cup G_{1,j_1}^F \cup \dots \cup G_{\theta,j_\theta}^F$$

که در آن به‌ازای هر $p=1, \dots, \theta$ ، داریم $j_p \in \{1, \dots, k_p^F\}$. توجه کنید که به‌ازای هر $i=1, \dots, \theta$ داریم $|G_{i,j_i}^F| = d-1-a_i^F$. بنابراین

³³ Clique

$$\begin{aligned}
 |H_{j_1, \dots, j_\theta}^F| &= |F| + \sum_{i=1}^{\theta} (d-1-a_i^F) \\
 &= |F| + \theta(d-1) - \sum_{i=1}^{\theta} a_i^F \\
 &= (d-1)\theta.
 \end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم هر وجه‌واره از Δ' به شکل $H_{j_1, \dots, j_\theta}^F$ است که در آن $F \in \Delta$.

اثبات ادعا. ابتدا توجه کنید که بنابر تعریف هر یک از مجموعه‌های $H_{j_1, \dots, j_\theta}^F$ یک مجموعه مستقل بیشین در C' است، یعنی $H_{j_1, \dots, j_\theta}^F \in \mathcal{F}(\Delta')$. در ادامه نشان می‌دهیم به‌ازای هر عنصر $G \in \Delta'$ ، عنصر $F \in \Delta$ و اندیس‌های $j_1, \dots, j_\theta$ موجود هستند که $G \subseteq H_{j_1, \dots, j_\theta}^F$. فرض کنیم $G \in \Delta'$ داده شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 F &:= G \cap V, \\
 a_i &:= F \cap A_i, \quad i=1, \dots, \theta, \\
 G_i &:= G \cap B_i, \quad i=1, \dots, \theta.
 \end{aligned}$$

چون G یک مجموعه مستقل در C' است، پس F یک مجموعه مستقل در C است و به‌ازای هر $i=1, \dots, \theta$ داریم $|G_i| \leq d-1-a_i$. لذا $j_i \in \{1, \dots, k_i^F\}$ موجود است که $G_i \subseteq G_{i, j_i}^F$. بنابراین داریم

$$G = F \cup G_1 \cup \dots \cup G_r \subseteq F \cup G_{1, j_{p_1}}^F \cup \dots \cup G_{r, j_{p_r}}^F = H_{j_{p_1}, \dots, j_{p_r}}^F.$$

با توجه به آن‌چه تاکنون بیان کرده‌ایم مجتمع سادگی Δ' یک مجتمع سادگی محض از بعد $(d-1)\theta-1$ است.

به‌ازای هر $i=1, \dots, \theta$ ، فرض کنیم $B_i = \{y_{i,1}, \dots, y_{i,s_i}\}$. ترتیب زیر را روی $y_{i,j}$ ها در نظر می‌گیریم:

$$y_{1,1} > y_{1,2} > \dots > y_{1,s_1} > y_{2,1} > \dots > y_{2,s_2} > \dots > y_{\theta,1} > \dots > y_{\theta,s_\theta}. \quad (1)$$

اکنون برای اثبات این‌که Δ' پوسته‌پذیر است، ترتیب زیر را روی وجه‌واره‌های Δ' اعمال می‌کنیم:

ابتدا وجه‌های Δ را بر حسب بعد آنها مرتب می‌کنیم. برای وجه‌هایی از Δ که دارای بعد یکسان هستند، آنها را بر حسب ترتیب $v_1 > \dots > v_n$ مرتب می‌کنیم. حال متناظر با هر وجه $F \in \Delta$ ، بلوک متناظر با F را مطابق با ترتیب داده شده در رابطه (۱) مرتب می‌کنیم.

نشان می‌دهیم مطابق با ترتیب بالا، مجتمع سادگی Δ' پوسته‌پذیر است. فرض کنیم $H_{j_1, \dots, j_r}^F < H_{j'_1, \dots, j'_r}^{F'}$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $F = F'$. در این حالت قرار می‌دهیم $j_p = \min\{j_p : j_p \neq j'_p\}$ و

$$\begin{aligned}
 y_{\rho, \theta} &= \min\{y_{\rho, j} \in G_{\rho, j_\rho}^F : y_{\rho, j} \notin G_{\rho, j_\rho}^{F'}\}, \\
 y_{\rho, \theta'} &= \min\{y_{\rho, j} \in G_{\rho, j_\rho}^{F'} : y_{\rho, j} \notin G_{\rho, j_\rho}^F\}.
 \end{aligned}$$

توجه داریم که چون $H_{j_1, \dots, j_r}^F$ و $H_{j'_1, \dots, j'_r}^F$ وجه‌واره‌های Δ' هستند پس تعداد عناصر G_{ρ, j_ρ}^F و G_{ρ, j'_ρ}^F برابر هستند. بنابراین عناصر $\mathcal{Y}_{\rho, \theta}$ و $\mathcal{Y}_{\rho, \theta'}$ تعریف شده به صورت فوق موجودند و به علاوه داریم $\mathcal{Y}_{\rho, \theta} < \mathcal{Y}_{\rho, \theta'}$. در نتیجه $\mathcal{Y}_{\rho, \theta} \in H_{j'_1, \dots, j'_r}^F \setminus H_{j_1, \dots, j_r}^F$. فرض کنیم $H = (H_{j'_1, \dots, j'_r}^F \setminus \{y_{\rho, \theta}\}) \cup \{y_{\rho, \theta}\}$. در این صورت به وضوح H یک وجه‌واره از Δ' است و شیوه ترتیب ما ایجاب می‌کند که $H < H_{j'_1, \dots, j'_r}^F$. از طرف دیگر داریم $H_{j'_1, \dots, j'_r}^F \setminus H = \{y_{\rho, \theta}\}$. حالت دوم: $F < F'$. عنصر $x \in F' \setminus F$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $x \in H_{j'_1, \dots, j'_r}^{F'} \setminus H_{j_1, \dots, j_r}^F$. به علاوه $i \in \{1, \dots, \theta\}$ موجود است که $x \in F \cap A_i$. در این صورت عنصر $y \in B_i \setminus G_{i, j'_i}$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم

$$H = (F' \setminus \{x\}) \cup G_{1, j'_1} \cup \dots \cup G_{i, j'_i} \cup \{y\} \cup \dots \cup G_{r, j'_r}.$$

واضح است که H یک وجه‌واره از Δ' است و شیوه ترتیب ما ایجاب می‌کند که $H < H_{j'_1, \dots, j'_r}^{F'}$. به علاوه داریم

$$H_{j'_1, \dots, j'_r}^F \setminus H = \{x\}.$$

با توجه به آن‌چه تاکنون ثابت کرده‌ایم Δ' یک مجتمع سادگی محض و پوسته‌پذیر است. قسمت دوم گزاره از این واقعیت نتیجه می‌شود که هر مجتمع سادگی محض و پوسته‌پذیر، کوهن-مک‌اولی است [۳، قضیه ۱۳، ۱۵].

■

قضیه بالا در حالت‌های خاص برخی از نتایج ویلاریال^{۳۴} [۱۵ و ۱۶]، هیبی^{۳۵} و دیگران [۱۰]، کوک^{۳۶} و نیگل^{۳۷} [۴] را پوشش می‌دهد که در مثال زیر به آنها اشاره می‌کنیم.

مثال ۱.

۱. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف باشد که در آن $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ و G' گرافی باشد که با استفاده از G به صورت زیر به دست آمده باشد:

$$\begin{aligned} V(G') &= V \cup \{w_1, \dots, w_n\}, \\ E(G') &= E \cup \{v_i w_i : i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

ویلاریال [۱۵، گزاره ۲، ۲] نشان می‌دهد که حلقه $\mathbb{K}[\Delta_{G'}]$ کوهن-مک‌اولی است. سپس ویلاریال در [۱۶، گزاره ۵، ۴، ۱۰] نشان می‌دهد که در واقع $\Delta_{G'}$ پوسته‌پذیر است. واضح است که این دو نتیجه از ویلاریال حالت خاصی از قضیه ۱ است.

۲. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف باشد. هیبی و دیگران [۱۰، قضیه ۱، ۱] با تعمیمی از نتیجه ویلاریال، نشان می‌دهند که مجتمع استقلال گراف G' که با استفاده از گراف G و چسباندن یک گراف کامل به هر راس از G

³⁴ Villarreal

³⁵ Hibi

³⁶ Cook II

³⁷ Nagel

به دست می‌آید محض و تجزیه‌پذیر راسی^{۳۸} است. بنابراین $\Delta_{G'}$ محض و پوسته‌پذیر و در نتیجه کوهن-مک‌اولی است [۳، قضیه ۱۳، ۵]. نتیجه اخیر نیز حالت خاصی از قضیه ۱ است.

۳. فرض کنیم $G=(V, E)$ یک گراف باشد و $V=W_1 \cup \dots \cup W_r$ یک افراز خوشه‌ای از راس‌های G باشد یعنی هر W_i یک خوشه در G است. فرض کنیم G^π گرافی باشد که با استفاده از گراف G به صورت زیر به دست آمده باشد:

$$V(G^\pi) = V \cup \{y_1, \dots, y_r\},$$

$$E(G^\pi) = E \cup \left(\bigcup_{i=1}^r \{y_i w_j : w_j \in W_i\} \right).$$

کوک و نیگل در [۴، قضیه ۳، ۳ و نتیجه ۳، ۵] نشان می‌دهند که مجتمع استقلال گراف G^π محض و تجزیه‌پذیر راسی است. بنابراین Δ_{G^π} محض و پوسته‌پذیر و در نتیجه کوهن-مک‌اولی است [۳، قضیه ۱۳، ۵]. نتیجه اخیر نیز حالت خاصی از قضیه ۱ است. در واقع قضیه ۱ بیانی از قضیه کوک و نیگل برای ابرگراف‌ها است.

در حالتی که W_i ها در این مثال لزوماً خوشه نباشند، ایدآل یالی^{۳۹} گراف G' در [۱۱، گزاره ۲] مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که $\text{ara}(I) = \text{bight}(I)$ ، که در آن $I = I(G')$ ایدآل یالی G' است، $\text{ara}(I)$ رتبه حسابی^{۴۰} I و $\text{bight}(I)$ بیشینه ارتفاع‌های ایدآل‌های اول وابسته I است.

قضیه ۲. فرض کنید C یک کلاتر با مجموعه رئوس $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. به‌ازای هر $i=1, \dots, n$ مجموعه‌ناتهی و متناهی $B_{i,1}, \dots, B_{i,m_i}$ را در نظر بگیرید به طوری که V و $B_{i,j}$ ها دوبه‌دو جدا از هم هستند. فرض کنید $C' = C_{\{B_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i}}$ کلاتری باشد که با استفاده از کلاتر C به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C' = C \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \{B_{i,1} \cup \{v_i\}, \dots, B_{i,m_i} \cup \{v_i\}\} \right).$$

اگر $\Delta' = \Delta_{C'}$ آن‌گاه

$$(1) \quad \text{مجتمع سادگی } \Delta' \text{ پوسته‌پذیر از بعد } -1 \text{ است؛} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} |B_{i,j}|$$

$$(2) \quad \text{حلقه } \mathbb{K}[\Delta'] \text{ کوهن-مک‌اولی است اگر و تنها اگر به ازای هر } i=1, \dots, n, \text{ داشته باشیم } m_i = 1.$$

³⁸ Vertex-decomposable

³⁹ Edge ideal

⁴⁰ Arithmetic rank

برهان. برای بیان اثبات این قضیه، از برهانی کم و بیش مشابه با برهان قضیه ۱ پیروی می‌کنیم. فرض کنیم $\Delta = \Delta_C$ مجتمع استقلال C باشد. به ازای هر $F \in \Delta$ یک بلوک از وجه‌واره‌های Δ' را به شرح زیر می‌سازیم:

در ابتدا فرض کنیم به ازای $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, m_i$ مجموعه $B_{i,j}$ به صورت $B_{i,j} = \{y_{i,j}^{(1)}, \dots, y_{i,j}^{(t_{i,j})}\}$ داده شده باشد. سپس به ازای $F \in \Delta$ قرار می‌دهیم

$$\{G_{i,1}^F, \dots, G_{i,k_i^F}^F\} = \begin{cases} \left\{ \bigcup_{j=1}^{m_i} B_{i,j} \right\}, & x_i \notin F, \\ \left\{ \bigcup_{j=1}^{m_i} (B_{i,j} \setminus \{y_{i,j}^{(\theta_j)}\}) : 1 \leq \theta_j \leq t_{i,j} \right\}, & x_i \in F. \end{cases}$$

در نهایت بلوکی از مجموعه‌های متناظر با F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_{j_1, \dots, j_n}^F := F \cup G_{1,j_1}^F \cup \dots \cup G_{n,j_n}^F$$

که در آن به ازای هر $i = 1, \dots, n$ داریم $j_i \in \{1, \dots, k_i^F\}$. ادعا می‌کنیم هر وجه‌واره از Δ' به شکل $H_{j_1, \dots, j_n}^F$ است که در آن $F \in \Delta$.

اثبات ادعا. ابتدا توجه کنید که بنابر تعریف هر یک از مجموعه‌های $H_{j_1, \dots, j_n}^F$ یک مجموعه مستقل بیشین در C' است، یعنی $H_{j_1, \dots, j_n}^F \in \mathcal{F}(\Delta')$. در ادامه نشان می‌دهیم به ازای هر عنصر $G \in \Delta'$ ، عنصر $F \in \Delta$ و اندیس‌های $j_1, \dots, j_n$ موجود هستند که $G \subseteq H_{j_1, \dots, j_n}^F$. فرض کنیم $G \in \Delta'$ داده شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} F &:= G \cap \{v_1, \dots, v_n\}, \\ G_{i,j} &:= G \cap B_{i,j}, & i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i, \\ G_i &:= \bigcup_{j=1}^{m_i} G_{i,j}, & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

در این صورت $G_{i,j} \subseteq B_{i,j}$ و چون G یک مجموعه مستقل در C' است، نتیجه می‌شود که F یک مجموعه مستقل در C است یعنی $F \in \Delta$. به علاوه اگر $1 \leq i \leq n$ به گونه‌ای باشد که $x_i \in F$ ، آن‌گاه به ازای هر $j = 1, \dots, m_i$ داریم $G_{i,j} \neq B_{i,j}$. بنابراین شیوه ساخت ما از $G_{i,j}^F$ ‌ها ایجاب می‌کند که به ازای هر $i = 1, \dots, n$ ، عنصر $j_i \in \{1, \dots, k_i^F\}$ موجود است به طوری که $G_i \subseteq G_{i,j_i}^F$. در نتیجه داریم:

$$G = F \cup G_1 \cup \dots \cup G_n \subseteq F \cup G_{1,j_1}^F \cup \dots \cup G_{n,j_n}^F = H_{j_1, \dots, j_n}^F.$$

ترتیب زیر را روی $y_{i,j}^{(k)}$ ‌ها در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} y_{1,1}^{(1)} &> y_{1,1}^{(2)} > \dots > y_{1,1}^{(t_{1,1})} > y_{1,2}^{(1)} > \dots > y_{1,2}^{(t_{1,2})} > \dots > y_{1,m_1}^{(1)} > \dots > y_{1,m_1}^{(t_{1,m_1})} > \dots \\ y_{n,1}^{(1)} &> y_{n,1}^{(2)} > \dots > y_{n,1}^{(t_{n,1})} > y_{n,2}^{(1)} > \dots > y_{n,2}^{(t_{n,2})} > \dots > y_{n,m_n}^{(1)} > \dots > y_{n,m_n}^{(t_{n,m_n})}. \end{aligned} \quad (2)$$

برای اثبات این که Δ' پوسته‌پذیر است، ترتیب زیر را روی وجه‌واره‌های Δ' در نظر می‌گیریم:

ابتدا وجه‌های Δ را بر حسب بعد آنها مرتب می‌کنیم. برای وجه‌هایی از Δ که دارای بعد یکسان هستند، آنها

را بر حسب ترتیب $v_1 > \dots > v_n$ مرتب می‌کنیم. حال متناظر با هر وجه $F \in \Delta$ ، بلوک متناظر با F را

مطابق با ترتیب داده شده در رابطه (۲) مرتب می‌کنیم.

نشان می‌دهیم مطابق با ترتیب بالا، مجتمع سادگی Δ' پوسته‌پذیر است. فرض کنیم $H_{j_1, \dots, j_n}^F < H_{j'_1, \dots, j'_n}^{F'}$. دو حالت

زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $F = F'$. در این حالت قرار می‌دهیم $j_\rho = \min\{j_\rho : j_\rho \neq j'_\rho\}$ و

$$y_{\rho, j'_\rho}^{(\theta)} = \min\{y_{\rho, j'_\rho}^{(c)} \in G_{\rho, j'_\rho}^F : y_{\rho, j'_\rho}^{(c)} \notin G_{\rho, j_\rho}^F\},$$

$$y_{\rho, j_\rho}^{(\theta)} = \min\{y_{\rho, j_\rho}^{(c)} \in G_{\rho, j_\rho}^F : y_{\rho, j_\rho}^{(c)} \notin G_{\rho, j'_\rho}^F\}.$$

توجه داریم که با توجه به ساختار $H_{j_1, \dots, j_n}^F$ و $H_{j'_1, \dots, j'_n}^{F'}$ ، هر دو مجموعه G_{ρ, j_ρ}^F و G_{ρ, j'_ρ}^F دارای تعداد عناصر یکسان

هستند. بنابراین دو عنصر $y_{\rho, j'_\rho}^{(\theta)}$ و $y_{\rho, j_\rho}^{(\theta)}$ تعریف شده به صورت فوق موجود هستند و به علاوه داریم $y_{\rho, j'_\rho}^{(\theta)} < y_{\rho, j_\rho}^{(\theta)}$ و

همچنین $y_{\rho, j'_\rho}^{(\theta)} \in H_{j'_1, \dots, j'_n}^{F'} \setminus H_{j_1, \dots, j_n}^F$. فرض کنیم $y_{\rho, j'_\rho}^{(\theta)} \in H_{j'_1, \dots, j'_n}^{F'} \setminus H_{j_1, \dots, j_n}^F$. در این صورت به وضوح

یک وجه‌واره از Δ' است و شیوه ترتیب ما ایجاب می‌کند که $H < H_{j_1, \dots, j_n}^F$. از طرفی داریم $H_{j'_1, \dots, j'_n}^{F'} \setminus H = \{y_{\rho, j'_\rho}^{(\theta)}\}$.

حالت دوم: $F < F'$. در این حالت عنصر $v_i \in F' \setminus F$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت واضح است که

$v_i \in H_{j'_1, \dots, j'_n}^{F'} \setminus H_{j_1, \dots, j_n}^F$. شیوه ساخت ما از $H_{j'_1, \dots, j'_n}^{F'}$ ایجاب می‌کند که $G_{i, j'_i} = \bigcup_{j=1}^{m_i} (B_{i, j} \setminus \{y_{i, j}^{(\theta_j)}\})$ که در آن

$1 \leq \theta_j \leq t_{i, j}$ فرض کنیم

$$\begin{aligned} H &= (F' \setminus \{v_i\}) \cup G_{1, j'_1} \cup \dots \cup G_{i, j'_i} \cup \{y_{i, 1}^{(\theta_1)}, \dots, y_{i, m_i}^{(\theta_{m_i})}\} \cup \dots \cup G_{n, j'_n} \\ &= (F' \setminus \{v_i\}) \cup G_{1, j'_1} \cup \dots \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{i, j} \right) \cup \dots \cup G_{n, j'_n}. \end{aligned}$$

واضح است که H یک وجه‌واره از Δ' است و شیوه ترتیب ما ایجاب می‌کند که $H < H_{j'_1, \dots, j'_n}^{F'}$. به علاوه داریم

$$H_{j'_1, \dots, j'_n}^{F'} \setminus H = \{x_i\}.$$

با توجه به آن چه تاکنون ثابت کرده‌ایم Δ' یک مجتمع سادگی پوسته‌پذیر است.

به ازای هر وجه‌واره $H_{j_1, \dots, j_n}^F \in \mathcal{F}(\Delta')$ داریم:

$$\begin{aligned} |H_{j_1, \dots, j_n}^F| &= |F| + |G_{1, j_1}^F| + \dots + |G_{n, j_n}^F| \\ &= |F| + \sum_{x_i \notin F} \sum_{j=1}^{m_i} |B_{i, j}| + \sum_{x_i \in F} \sum_{j=1}^{m_i} (|B_{i, j}| - m_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} |B_{i, j}| = |H_{1, \dots, 1}^\emptyset|. \end{aligned}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که $\dim \Delta' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} |B_{i,j}| - 1$ و این که مجتمع سادگی Δ' محض است اگر و تنها اگر به ازای هر $i = 1, \dots, n$ داشته باشیم $m_i = 1$.

برای اثبات قسمت ۲ از قضیه توجه کنید که اگر Δ' کوهن-مکاولی باشد، آنگاه طبق [۳، قضیه ۵، ۱، ۵]، Δ' محض است و بنابراین با توجه به مطالب بالا به ازای هر $i = 1, \dots, n$ داریم $m_i = 1$. به عکس، اگر به ازای هر $i = 1, \dots, n$ داشته باشیم $m_i = 1$ آنگاه با توجه به آنچه ثابت کرده ایم Δ' یک مجتمع سادگی محض و پوسته‌پذیر است و بنابراین کوهن-مکاولی است [۳، قضیه ۱۳، ۱، ۵].

■

تبصره. ایدال مداری کلاترها در مرجع [۶] با تعبیر ایدال وجه‌واره‌ای^{۴۱} مجتمع‌های سادگی بیان شده است. از شیوه اثبات [۶، قضیه ۲، ۸] نتیجه می‌شود که کلاترهای به شکل قضیه ۲ که در آن به ازای هر $i = 1, \dots, n$ داشته باشیم $m_i = 1$ ، کوهن-مکاولی هستند. بدیهی است که این موضوع بلافاصله از قضیه ۲ نتیجه می‌شود. به‌علاوه در [۱۱، نتیجه ۱] کلاترهای به شکل قضیه ۲ مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که برای ایدال مداری $I = I(C)$ از این کلاترها، تساوی $\text{ara}(I) = \text{bight}(I)$ برقرار است.

مثال ۲. فرض کنید G' گرافی باشد که مطابق با قسمت اول مثال ۱ از یک گراف دلخواه G به‌دست آمده است. واضح است که قضیه ۲ نتیجه می‌دهد که $\Delta_{G'}$ یک مجتمع سادگی محض و پوسته‌پذیر است.

همان‌گونه که مثال فوق نشان می‌دهد قضیه‌های ۱ و ۲ در حالت‌های خاصی منجر به نتیجه واحدی می‌شوند. در گزاره زیر این موضوع را بررسی کرده و نشان می‌دهیم تحت چه شرایطی کلاترهای معرفی شده در قضیه‌های ۱ و ۲ دقیقاً بر هم منطبق می‌شوند.

یادآوری می‌کنیم که دو کلاتر C و C' را یکرخت^{۴۲} گویند هرگاه نگاشت دوسویی $f: V(C) \rightarrow V(C')$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر مجموعه $e \subseteq V(C)$ داشته باشیم $e \in C$ اگر و تنها اگر $f(e) \in C'$. در این حالت می‌نویسیم $C \cong C'$. همچنین دو راس u, v از یک کلاتر C را مجاور^{۴۳} گویند هرگاه مدار $e \in C$ موجود باشد که $u, v \in e$. به ازای زیرمجموعه W از راس‌های کلاتر C ، زیرکلاتر القایی $C[W]$ از C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C[W] = \{F \in C : F \subseteq W\}.$$

⁴¹ Facet ideal

⁴² Isomorphic

⁴³ Adjacent

گزاره ۳. فرض کنید C یک کلاتر d -یکنواخت با n راس و C' یک کلاتر دلخواه با n' راس باشد. فرض کنید $D = C_{A_1, \dots, A_\theta}^{B_1, \dots, B_\theta}$ یک کلاتر d -یکنواخت وابسته به C تعریف شده در قضیه ۱ و $D' = C'_{B_{i,j}} \{1 \leq i \leq n', 1 \leq j \leq m_i\}$ یک کلاتر وابسته به C' تعریف شده در قضیه ۲ باشد. در این صورت $D \cong D'$ اگر و تنها اگر $C \cong C'$ ، $\theta = n$ و

$$(۱) \quad \text{به‌ازای هر } i=1, \dots, n, \text{ داشته باشیم } |A_i|=1 \text{ و } |B_i|=d-1;$$

$$(۲) \quad \text{به‌ازای هر } i=1, \dots, n', \text{ داشته باشیم } m_i=1 \text{ و } |B_{i,1}|=d-1.$$

برهان. فرض کنید $D \cong D'$. در این صورت D' و در نتیجه C' نیز کلاترهایی d -یکنواخت هستند. بنابراین به ازای هر $1 \leq i \leq n'$ و $1 \leq j \leq m_i$ داریم $|B_{i,j}|=d-1$. فرض کنید X و X' به ترتیب مجموعه همه راس‌هایی از D و D' باشند که تنها در یک مدار قرار دارند. بنا بر تعریف $X \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_\theta$ و $X' = B_{1,1} \cup \dots \cup B_{n',m_{n'}}$. علاوه بر این راس $x \in B_i$ متعلق به X است اگر و تنها اگر $|A_i|=1$ و $|B_i|=d-1$. حال فرض کنید Y و Y' به ترتیب مجموعه همه راس‌هایی از $V(D) \setminus X$ و $V(D') \setminus X'$ باشند که با راسی از X و X' در D و D' مجاور باشند. به سادگی می‌توان دید $Y \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_\theta$ و $Y' = V(C')$. همچنین راس $y \in A_i$ متعلق به Y است اگر و تنها اگر $|A_i|=1$ و $|B_i|=d-1$. از یکرختی D و D' نتیجه می‌شود $X = B_1 \cup \dots \cup B_\theta$ و $Y = A_1 \cup \dots \cup A_\theta$. لذا $\theta = n$ و به‌ازای هر $i=1, \dots, n$ ، داریم $|A_i|=1$ و $|B_i|=d-1$. از طرف دیگر اگر $i \in \{1, \dots, n'\}$ به‌گونه‌ای باشد که $m_i > 1$ ، آن‌گاه دو عنصر نامجاور $u \in B_{i,1}$ و $v \in B_{i,2}$ از X' با عنصر یکسانی از Y' در D' مجاورند در حالی که هیچ دو عنصر نامجاوری از X با عنصر یکسانی از Y در D مجاور نیستند. این موضوع نشان می‌دهد به ازای هر $i \in \{1, \dots, n'\}$ داریم $m_i=1$. لازم به ذکر است که $C = D[Y]$ و $C' = D'[Y']$. از آنجایی که Y و Y' تحت یکرختی بین D و D' در تناظر با هم هستند نتیجه می‌شود $C \cong C'$. عکس گزاره واضح است.

■

References

1. J. Biermann, and A. Van Tuyl, “Balanced vertex decomposable simplicial complexes and their h-vectors”, Electron. J. Combin. 20(3) (2013), #R15.
2. A. Björner and M. Wachs, “Shellable nonpure complexes and posets. I”, Trans. Amer. Math. Soc. 348(4) (1996), 3945-3975.
3. W. Bruns and J. Herzog, “Cohen-Macaulay Rings”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39. Cambridge University Press, Cambridge, (1993).

4. D. Cook II and U. Nagel, "Cohen-Macaulay graphs and face vectors of flag complexes", *SIAM J. Discret. Math.* 26(1) (2012), 89-101.
5. A. Dochtermann and A. Engström, "Algebraic properties of edge ideals via combinatorial topology", *Electron. J. Combin.* 16(2) (2009), #R2.
6. S. Faridi, "Cohen-Macaulay properties of square-free monomial ideals", *J. Combin. Theory Ser. A* 109(2) (2005), 299-329.
7. A. Francisco and A. Van Tuyl, "Sequentially Cohen-Macaulay edge ideals", *Proc. Amer. Math. Soc.* 135(8) (2007), 2327-2337.
8. J. Gallier, "Notes on convex sets, polytopes, polyhedra, combinatorial topology, Voronoi diagrams and Delaunay triangulations", *arXiv: 0805.0292* (2008).
9. X. Goaoc, P. Paták, Z. Patáková, M. Tancer, and U. Wagner, "Shellability is NP-complete", *J. ACM* 66(3) (2019), Art. 21, 18 pp.
10. T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura, and A. B. O'Keefe, "Algebraic study on Cameron-Walker graphs", *J. Algebra* 422 (2015), 257-269.
11. A. Macchia, "The arithmetical rank of the edge ideals of graphs with whisker", *Beitr. Algebra Geom.* 56 (2015), 147-158.
12. Mousivand, S. A. Seyed Fakhari, and S. Yassemi, "A new construction for Cohen-Macaulay graphs", *Comm. Algebra* 43(2) (2015), 5104-5112.
13. M. R. Pournaki, S. A. Seyed Fakhari, and S. Yassemi, "New classes of set-theoretic complete intersection monomial ideals", *Comm. Algebra* 43(9) (2015), 3920-3924.
14. R. P. Stanley, "Combinatorics and Commutative Algebra", 2nd ed., *Progr. Math.* 41, Birkhäuser Boston, Boston, MA (1996).
15. R. H. Villarreal, "Cohen-Macaulay graphs", *Manus. Math.* 66 (1990), 277-293.
16. R. H. Villarreal, "Monomial Algebras", *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, vol. 238, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.