Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Countable-complement manifolds

Ghorban Soleymanpour [1], **Ali S. Janfada** [2] ✉, **Mohammad Ali Asadi** [3]

1. Dept. of Mathematics, Urmia University, Urmia, Iran. E-mail: g.soleymanpour@yahoo.com
2. Dept. of Mathematics, Urmia University, Urmia, Iran. ✉ E-mail: asjanfada@gmail.com
3. Dept. of Mathematics, Urmia University, Urmia, Iran. E-mail: masadig@yahoo.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 7 March 2021
Received in revised form: 15 August 2021
Accepted: 31 August 2021
Published online: 3 December 2023

Keywords:
Algebraic sets,
Zariski topology,
Topological field.

ABSTRACT

Introduction

Roughly speaking, a differentiable manifold is a topological space which is locally resembles to n-dimensional Euclidean space with standard topology near each point. This resemblance is expressed by defining the chart and atlas generating the manifold. In the viewpoint of real analysis, manifolds are divided into various types such as C^r manifolds, for $r \geq 0$, differentiable C^∞manifolds and even analytic C^ω manifolds. This classification of manifolds is done by the charts on the atlases of the manifold, that is, the bijection functions which are defined from a section of manifold onto an open set in $\mathbb{R}^n$.

This sort of classification leads to create some other types of manifolds. As an example, complex manifolds are those locally resembles to $\mathbb{C}^n$ equip with standard topology near each point. In this case, the locally resemblance is defined using the charts of the atlas of manifold. Of common and important class of these manifolds are Riemann and Klein surfaces. The latter surface which consists of the former one, is defined by bi-analytic functions. Also, quaternion manifolds and p-adic manifolds have been studied.

In the present paper we pursue a different goal and concentrate on the topology of the space instead of interchanging $\mathbb{R}$ with another set. To this end we consider the countable-complement topologies which are of importance for two reasons.

1. A set X together with the countable-complement topology is a Lindelof topological space which can be substituted for the condition of having countable basis in differentiable manifolds.
2. Over a set X with the countable-complement topology, every convergent sequence has a unique limit which is substitute for the condition of being Hausdorff in differentiable manifolds.

Materials and methods

In section 1 the countable-complement topology is defined. Then, some aspects of these spaces is studies. In particular, convergent sequences and their limits and power series over these spaces are studied. Further, continuity of functions is defined. Finally, the Zariski topology is generalized to topology, called the Zariski-countable topology. The advantage of this work is that one can change every non-countable filed to a topological field using the Zariski-countable topology, a task which is impossible using the usual Zariski topology. It is proved that any multi-variable functions on the Zariski-countable spaces are continuous.

Section 2 is dedicated to countable-complement manifolds which are locally resembles near any point to $\mathbb{R}^n$ with the countable-complement topology. Moreover, derivation in these manifolds is considered and

extended from $\mathbb{R}$ to any field. The algebraic verities are analytic cases of these manifolds

Results and discussion

We define the countable-complement topology and discuss the convergent sequences as well as continuity in these spaces. Then, the countable-complement manifolds are presented which are locally resembles to $\mathbb{R}^n$ with countable-complement topology. The derivation is considered in these manifolds

Conclusion

The following are concluded from this article.

1. Inspired by the countable-complement topology, a new type of manifolds is made so that the algebraic varieties are the analytic case of these manifolds.
2. Using the definition of derivation for the functions defined over the open sets of countable-complement spaces, the notion of derivation which is specialized to the functions involved with the real field $\mathbb{R}$, are extended for any non-countable fields.

How to cite: Soleymanpour, Ghorban., Janfada, Ali. S., & Asadi, Mohammad Ali. (2023). Countable-complement manifolds. *Mathematical Researches*, 9 (2), 31-42

پژوهش‌های ریاضی

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

منیفلدهای متمم–شمارا

قربان سلیمان‌پور[۱]، علی سرباز جانفدا[۲] ✉، محمدعلی اسدی[۳]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: g.soleymanpour@yahoo.com
۲. گروه ریاضی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران. ✉ رایانامه: asjanfada@gmail.com
۳. گروه ریاضی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: masadig@yahoo.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۵/۲۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۶/۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲

واژه‌های کلیدی:
مجموعه جبری،
توپولوژی زاریسکی،
میدان توپولوژی

چکیده

در این مقاله، توپولوژی زاریسکی، به یک توپولوژی تحت عنوان توپولوژی زاریسکی–شمارا تعمیم داده شده و نوع جدیدی از منیفلدها به کمک توپولوژی متمم–شمارا ایجاد می‌شود که واریته‌های جبری، حالت تحلیلی این منیفلدها هستند. مزیت این کار در این است که می‌توان تحت توپولوژی زاریسکی–شمارا، هر میدان ناشمارا را به یک میدان توپولوژی تبدیل کرد. این کار با توپولوژی زاریسکی معمولی امکان‌پذیر نیست.

استناد: سلیمان‌پور ، قربان؛ سرباز جانفدا، علی؛ و اسدی، محمدعلی (۱۴۰۲). منیفلدهای متمم-شمارا. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۳۱ – ۴۲.

مقدمه

به بیانی نه چندان دقیق، یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر، یک فضای توپولوژی است که به صورت موضعی، شبیه فضای اقلیدسی n-بعدی با توپولوژی استاندارد است. شباهت موضعی به فضای اقلیدسی، با تعریف نقشه و اطلس تولیدکنندهٔ منیفلد، دقت و رسمیت می‌یابد. در سطح آنالیز حقیقی، منیفلدها به رده‌های متنوعی مثل منیفلدهای C^r برای $r \geq 0$، منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر C^∞ و حتی منیفلدهای تحلیلی C^ω تقسیم می‌شوند. این رده‌بندی از منیفلدها از روی نقشه‌های موجود در اطلس منیفلد، یعنی توابعی دوسویی که از قطعه‌ای باز از منیفلد به روی مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شوند، صورت می‌گیرد.

این روش رده‌بندی منیفلدهای حقیقی، منجر به پیدایش منیفلدهایی از انواع دیگر نیز گردیده است. به عنوان مثال، منیفلدهای مختلط منیفلدهایی هستند که به طور موضعی شبیه فضای $\mathbb{C}^n$ با توپولوژی استاندارد می‌باشند. در این حالت، یعنی در هندسهٔ مختلط، شباهت موضعی به $\mathbb{C}^n$، همانند هندسهٔ معمولی، توسط نقشه‌های اطلس منیفلد تعریف می‌شود. رده‌های عمده و مهم این نوع منیفلدها رویه‌های ریمانی و رویه‌های کلاینی هستند. مورد اخیر، که دربرگیرندهٔ رویه‌های ریمانی نیز می‌باشد، توسط نگاشت‌های دو-تحلیلی تعریف می‌شوند[۱]. حتی منیفلدهای کواترنیونی، منیفلدهای روی حلقهٔ تقسیم ناجابه‌جایی $\mathbb{H}$، که به طور موضعی شبیه به فضای چهارگانی n-بعدی $\mathbb{H}^n$ هستند [۲] و منیفلدهای p-نقش که به صورت موضعی شبیه به $\mathbb{Q}_p^n$ هستند نیز مطالعه گردیده‌اند [۳].

در این مقاله، هدف کاملاً متفاوتی را دنبال کرده و به جای تعویض مجموعهٔ $\mathbb{R}$ با مجموعه‌ای دیگر، خود را روی توپولوژی فضا متمرکز نموده‌ایم. در این بین توپولوژی متمم-شمارا به دو دلیل زیر جالب‌تر می‌نمود.

۱- مجموعهٔ X با توپولوژی متمم-شمارا یک فضای توپولوژی لیندلف است که می‌تواند جایگزین شرط داشتن پایه شمارا در منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر باشد.

۲- روی مجموعهٔ X با توپولوژی متمم-شمارا، هر دنبالهٔ همگرا دارای حدی یکتاست که این شرط می‌تواند جایگزین شرط هاسدورف بودن در منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر باشد.

به این ترتیب، هدف ما مطالعهٔ منیفلدهای متمم-شمارا، یعنی منیفلدهایی که به طور موضعی شبیه به$\mathbb{R}^n$ با توپولوژی متمم-شمارا هستند، می‌باشد. البته شباهت به صورت موضعی، نیازمند تعریف دقیقی است که در بخش ۱، به همراه ویژگی‌های عمده و اساسی توپولوژی متمم-شمارا آمده است.

در بخش ۲، پس از بحثی مختصر در مورد امکان تعریف مشتق متمم-شمارا برای توابع تعریف شده روی مجموعه‌های باز فضاهای متمم-شمارا، مفهوم مشتق پذیری که مختص توابع درگیر با $\mathbb{R}$ بوده، به هر میدان دلخواه ناشمارا تعمیم داده شده است.

قبل از شروع، تعاریف زیر را یادآوری می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم $(F,+,\cdot)$ میدانی دلخواه باشد که مجموعه زمینه F مجهز به توپولوژی T است. در این صورت $(F,+,\cdot\,;T)$ یک میدان توپولوژی نامیده می‌شود هرگاه توابع $+: F\times F\to F$ و $\cdot: F\times F\to F$ تحت توپولوژی T پیوسته باشند. در این تعریف، $F\times F$ مجهز به توپولوژی حاصل‌ضربی در نظر گرفته می‌شود.

فرض کنیم F میدانی دلخواه و

$$F^n=\{(a_1,\dots,a_n)\mid \forall i: a_i\in F\}$$

مجموعه n-تایی‌های مرتب از اعضای F باشد که همان n-بار حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه F در خودش می‌باشد. برای چندجمله‌ای دلخواه $f\in F[x_1,\dots,x_n]$، مجموعه صفر f عبارت است از

$$Z(f)=\{(a_1,\dots,a_n)\in F^n|\, f(a_1,\dots a_n)=0\}.$$

در حالت کلی، برای زیرمجموعه دلخواه T از $F[x_1,\dots,x_n]$، مجموعه صفر T عبارت است از

$$Z(T)=\{(a_1,\dots,a_n)\in F^n|\, f(a_1,\dots,a_n)=0 \text{ ،}f\in T \text{ برای هر}\}$$

و زیرمجموعه Y از F^n یک مجموعه جبری خوانده می‌شود هرگاه $T\subseteq F[x_1,\dots,x_n]$ موجود باشد که $Y=Z(T)$.

اجتماع دو مجموعه جبری دلخواه و اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های جبری، باز یک مجموعه جبری است (به [۴] گزاره ۱.۱مراجعه شود). بنابراین، می‌توان به کمک مجموعه‌های جبری، یک توپولوژی روی F^n تعریف کرد.

تعریف. توپولوژی رازیسکی روی F^n عبارت است از توپولوژی که در آن مجموعه‌های باز، متمم مجموعه‌های جبری هستند.

به‌ویژه، چون طبق قضیه اساسی جبر، هر چندجمله‌ای $f\in F[x]$ حداکثر دارای n ریشه است، بنابراین توپولوژی زاریسکی روی $F^1=F$ همان توپولوژی متمم-متناهی است.

۱. توپولوژی متمم-شمارا و تعمیم توپولوژی زاریسکی

در توپولوژی متمم-شمارا مجموعه‌های باز دقیقاً عبارت از مجموعه تهی و مجموعه‌هایی هستند که متمم متناهی یا شمارا دارند. در این مقاله، فضای توپولوژی X با توپولوژی متمم-شمارا را با نماد X_c نشان خواهیم داد. گزاره زیر، ضمن بیان یکتایی حد دنباله‌ها در یک فضای متمم-شمارا، توصیفی از ساختار دنباله‌های همگرا نیز ارائه می‌دهد.

گزاره ۱-۱. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا از اعضای فضای توپولوژی X_c باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. در این صورت، عدد صحیح مثبت N موجود است به طوری که برای هر $n\geq N$ داریم $x_n=x$.

برهان قرار می دهیم

$$A=X-\{x_n: x_n\neq x\}$$

اگر $A=\emptyset$، آنگاه برای هر $n\geq 1$، $x_n=x$. بنابراین فرض کنیم $A\neq\emptyset$. واضح است که $x\in A$ و A دارای متمم شمارا و در نتیجه در X باز است. چون بنا به فرض $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$، بنابراین عدد طبیعی N موجود است به طوری که برای هر $n\geq N$، $x_n\in A$. از تعریف A چنین بر می‌آید که برای هر $n\geq N$، $x_n=x$ و حکم به دست می‌آید.■

طبق گزاره ۱-۱، دنباله‌های همگرا در توپولوژی متمم-شمارا، سرانجام-ثابت هستند؛ یعنی از مرحله‌ای به بعد، جملات دنباله سرانجام به نقطه حدی خود رسیده و تا آخر ثابت می‌ماند.

تبصره. این طرز همگرایی با همگرایی در میدان‌های ناارشمیدسی شباهت نزدیکی دارد. در یک میدان ناارشمیدسی، اگر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x\neq 0$، آنگاه از مرحله‌ای به بعد، $|x_n|=|x|$.

قضیهٔ زیر در مورد حاصل‌جمع‌ها و حاصل‌ضرب‌های نامتناهی روی یک میدان با مشخصهٔ صفر است. یادآوری می‌کنیم که در یک میدان با مشخصهٔ ناصفر، هیچ مجموع نامتناهی موجود نیست.

قضیه ۱-۲. فرض کنیم $\boldsymbol{F}$ میدانی با مشخصهٔ صفر و مجهز به توپولوژی متمم-شمارا باشد.

(الف) سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر دنباله $\{a_n\}$ سرانجام-۰، یا به طور معادل، همگرا به ۰ باشد. در نتیجه به شرطی که دنباله $\{a_n\}$ سرانجام-۰ باشد، سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ برای هر $x\in F$ همگراست.

(ب) حاصل‌ضرب $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر دنباله $\{a_n\}$ سرانجام-۱ باشد.

برهان. (الف). اگر دنباله $\{a_n\}$ سرانجام-۰ باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک مجموع متناهی است که همواره همگرا می‌باشد. برعکس همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ معادل با همگرایی دنباله

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

است. طبق گزاره ۱-۱، عدد طبیعی N موجود است به طوری که $s_N=s_{N+1}=s_{N+2}=\cdots$ و یا

$$\sum_{k=1}^{N} a_k=\sum_{k=1}^{N} a_k+a_{N+1}=\sum_{k=1}^{N+1} a_k+a_{N+2}=\cdots$$

که حاکی از این است که دنباله $\{a_n\}$ سرانجام-۰ است. قسمت (ب) مشابه قسمت (الف) ثابت می‌گردد.■

میدان F با مشخصهٔ صفر را که به توپولوژی متمم-شمارا مجهز شده باشد، با نماد F_c نمایش خواهیم داد. از قضیه ۱-۲، چنین بر می‌آید که در فضای F_c، سری‌های توانی به چندجمله‌ای‌ها محدود می‌شوند. این امر در ادامه، موضوع بحث منیفلدهای متمم-شمارای تحلیلی خواهد بود. گزارهٔ زیر در مورد پیوستگی توابع تعریف شده روی یک فضای متمم-شمارا می‌باشد. در ادامه، F را میدانی با مشخصهٔ صفر خواهیم گرفت.

گزاره ۱-۳. فرض کنیم $\boldsymbol{X}$ زیرفضایی دلخواه از فضای $\boldsymbol{F_c}$ باشد. تابع $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{F_c}$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{F_c}$، مجموعه $\boldsymbol{f^{-1}}(\{\boldsymbol{y}\})$ شمارا باشد. به ویژه، هر تابع یک به یک، پیوسته است.

برهان. اگر f پیوسته باشد، آنگاه چون مجموعه‌ی تک‌عضوی $\{y\}$ بسته است، پس تصویر وارون آن نیز باید در X بسته و یا به طور معادل، شمارا باشد. بر عکس، $A = \{y_1, y_2, \dots\}$ را یک مجموعهٔ بسته در F_c در نظر می‌گیریم. از آنجایی که $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{y_n\}$، پس

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\{y_n\}),$$

که شمارا و در نتیجه بسته است. نتیجه اینکه f پیوسته می‌باشد. ∎

توجه داریم که پیوستگی از یک توپولوژی به توپولوژی دیگر ممکن است تغییر وضعیت دهد. تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

یک تابع پیوسته در توپولوژی استاندارد است که در توپولوژی متمم-شمارا پیوسته نیست، زیرا $f^{-1}(\{0\}) = (-\infty, 0]$ دارای متمم ناشمارای $(0, \infty)$ می‌باشد. بر عکس، در تابع $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

به ازای هر $y \in \mathbb{R}$، $g^{-1}(\{y\})$ شمارا می باشد، بنابراین طبق گزاره ۱-۳، g تابعی پیوسته در توپولوژی متمم-شمارا است، در حالی‌که در توپولوژی استاندارد پیوسته نمی‌باشد.

فرض می‌کنیم X و Y فضاهای توپولوژی دلخواه و $C(X, Y)$ مجموعهٔ توابع پیوسته $f: X \to Y$ باشند. یادآوری می‌کنیم که توپولوژی فشرده-باز روی مجموعه $C(X, Y)$ توسط زیرپایه

$$S(C, U) = \{f: X \to Y | f(C) \subset U\},$$

که در آن $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{X}$ فشرده و $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{Y}$ باز است، تولید می‌شود.

طبق گزاره ۱-۳ و قضیهٔ اساسی جبر، می‌بینیم که هر چندجمله‌ای با ضرایب در میدان F پیوسته است، به عبارت دیگر، اگر $F[x]$ جبر چندجمله‌ای‌های یک متغیره با ضرایب در F باشد، داریم:

$$F[x] \subset C(F_c, F_c).$$

با این وجود، مجموعه $C(F_c, F_c)$ با عمل‌های جمع و ضرب توابع پیوسته، یک جبر نیست. در حقیقت، عمل‌های دوتایی $+, \times: F_c \times F_c \to F_c$ پیوسته نیستند. اگر F ناشمارا باشد، هیچ یک از مجموعه‌های

$$\{(x, y) | xy = 1\}, \qquad \{(x, y) | x + y = 1\}$$

باز نیستند. این بدان معنی است که F_c یک گروه توپولوژی نیست. با این وجود، قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیه ۱-۱. فرض کنیم $\boldsymbol{F}$ یک میدان و $\boldsymbol{C(F_c,F_c)}$ مجهز به توپولوژی فشرده-باز باشد. در این صورت، مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های یک متغیره $\boldsymbol{F[x]}$ در $\boldsymbol{C(F_c,F_c)}$ چگال است.

برای اثبات قضیه، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۱-۲. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. مجموعه $A \subset X_c$ فشرده است، اگر و فقط اگر A متناهی باشد.

برهان. اگر $\boldsymbol{A}$ متناهی باشد، آنگاه به وضوح $\boldsymbol{A}$ فشرده است. برعکس، فرض کنیم $\boldsymbol{A \subset X_c}$ فشرده و نامتناهی باشد. دنبالهٔ با جملات متمایز (و در نتیجه واگرای) $\boldsymbol{\{a_n\} \subset A}$ را انتخاب کرده و برای هر $\boldsymbol{n \geq 1}$، مجموعه‌های باز $\boldsymbol{V_n}$ را به صورت

$$V_n = X - \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

تعریف می‌کنیم. این مجموعه‌های باز دارای این ویژگی هستند که اگر $m < n$، آنگاه $V_m \subset V_n$ و $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. چون A فشرده است، پس زیرپوششی متناهی از $\{V_n\}_{n\geq 1}$ مثل $\{V_{n_1}, \dots, V_{n_N}\}$ موجود است که در آن $n_1 < \cdots < n_N$. ولی $\bigcup_{k=1}^{N} V_{n_k} = V_{n_N}$. از طرفی دیگر، $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots \notin V_{n_N}$ و یا $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots \notin A$ که یک تناقض است. ■

برهان قضیه ۱-۱. طبق لم ۱-۲ زیرمجموعه‌های فشرده F_c متناهی هستند. پس، اعضای زیرپایه برای توپولوژی فشرده-باز روی $C(F_c,F_c)$ به صورت

$$S(\{x_1, \dots, x_n\}, F - A) = \{f : F_c \to F_c | f(x_1), \dots, f(x_n) \notin A\}$$

می‌باشند که در آن A یک مجموعهٔ شماراست. برای اثبات چگال بودن $F[x]$ در $C(F_c,F_c)$، کافی است نشان دهیم که در داخل هر عضو زیرپایه‌ای $S(\{x_1, \dots, x_n\}, F - A)$ یک تابع چندجمله‌ای موجود است. این نیز واضح است زیرا هر تابع چندجمله‌ای $p(x)$ از درجهٔ n که برای هر $1 \leq k \leq n$، $p(x_k) = z_k \notin A$، در داخل این عضو زیرپایه‌ای قرار دارد. به عنوان مثال، هرگاه $0 \notin A$، آنگاه $p(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ یکی از این چندجمله‌ای‌ها می‌باشد. ■

دیدیم که میدان F_c یک گروه توپولوژی نیست. به ویژه اینکه، در بررسی اعمال جمع و ضرب، F^2 را به توپولوژی متمم-شمارا مجهز نمودیم. باید گفت که توپولوژی متمم-شمارا روی F^2، یعنی $(F \times F)_c$ درشت‌تر از توپولوژی حاصلضربی $F_c \times F_c$ است. با این حال، مجموعه $\{(x,y) | x + y = 1\}$ در این توپولوژی نیز بسته نیست.

اکنون یک توپولوژی روی $F^2 = F \times F$ به تقلید از توپولوژی زاریسکی تعریف می‌کنیم که تحت آن، میدان F به یک میدان توپولوژی تبدیل می‌شود. ابتدا به قضیهٔ زیر توجه می‌کنیم که برهان آن سرراست است.

قضیه ۱-۳. فرض کنیم $\boldsymbol{(X,T)}$ یک فضای توپولوژی باشد. گردایه $\boldsymbol{T'}$ را گردایهٔ شامل تمام اشتراک‌های شمارای اعضای $\boldsymbol{T}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\boldsymbol{T'}$ نیز یک توپولوژی روی $\boldsymbol{X}$ و ظریف‌تر از $\boldsymbol{T}$ است.

در حالتی که (X,T) یک فضای هاوسدورف باشد، توپولوژی T' چیزی جز توپولوژی گسسته نیست. اما در حالت خاص، وقتی که توپولوژی زاریسکی (توپولوژی متمم-متناهی روی میدان دلخواه و نامتناهی F) در نظر گرفته شود، یک توپولوژی به دست می‌آید که در حالت خاص اخیر، میدان F_c را به یک میدان توپولوژی تبدیل می‌کند.

تعریف ۱-۴ (توپولوژی زاریسکی-شمارا). فرض کنیم F یک میدان ناشمارا باشد. روی مجموعه حاصل‌ضرب دکارتی F^n یک توپولوژی به این صورت تعریف می‌کنیم: زیرمجموعه $A \subset F^n$ بسته است اگر و تنها اگر تهی بوده و یا به صورت اجتماعی شمارا از زیرمجموعه‌های زاریسکی-بسته باشد. این توپولوژی را توپولوژی زاریسکی-شمارا نامیده و فضای F^n با این توپولوژی را با نماد F^n_{Zc} نشان می‌دهیم.

توجه داریم که توپولوژی زاریسکی-شمارا روی F^n ظریف‌تر از توپولوژی حاصلضربی $F_c \times \cdots \times F_c$ است. در واقع، داریم:

$$(F \times \cdots \times F)_c \subset F_c \times \cdots \times F_c \subset F^n_{Zc}.$$

حال به راحتی می‌توانیم نشان دهیم که F_{Zc} یک میدان توپولوژی است.

قضیه ۱-۵. میدان ناشمارای F را در نظر می‌گیریم. اگر F^2 با توپولوژی زاریسکی-شمارا در نظر گرفته شود، آنگاه $F_{Zc} = F_c$ یک میدان توپولوژی است.

برهان. باید نشان دهیم که عمل جمع $+: F^2_{Zc} \to F_c$ پیوسته است. برای مجموعهٔ بسته و دلخواه $A \subset F_c$، پیش‌نگارهٔ این مجموعه تحت عمل جمع به صورت

$$\bigcup_{a \in A} \{(x,y) \in F^2 | x + y = a\}$$

می‌باشد که طبق تعریف ۱-۴، یک مجموعهٔ بسته در F^2_{Zc} می‌باشد. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که عمل ضرب F_c نیز پیوسته است. ■

علاوه بر این، همان‌طور که قضیهٔ بعد نشان می‌دهد، هر تابع چندجمله‌ای n-متغیره نیز پیوسته است.

قضیه ۱-۶. چندجمله‌ای $\boldsymbol{p(x_1, \dots, x_n)}$ به عنوان تابعی از $\boldsymbol{F^n_{Zc}}$ به روی $\boldsymbol{F_c}$، پیوسته است.

برهان. برای هر $y \in F_c$ دلخواه، طبق تعریف توپولوژی زاریسکی-شمارا، مجموعه $p^{-1}(\{y\})$ یک مجموعهٔ زاریسکی-بسته است. بنابراین هر چندجمله‌ای به این شکل پیوسته می‌باشد. ■

۲. منیفلدهای متمم-شمارا

در این بخش، پس از تعریف منیفلدهای متمم-شمارا، به بررسی مختصری در مورد دیفرانسیل‌پذیری توابع تعریف شده روی زیرمجموعه‌های باز میدان F_c می‌پردازیم. به این ترتیب، منیفلدهای متمم-شمارا به سه ردهٔ پیوسته، مشتق‌پذیر، و

تحلیلی تقسیم می‌شوند که منیفلدهای متمم-شمارای تحلیلی، همان واریته‌های جبری (مکان صفر چندجمله‌ای‌ها) می‌باشند. قرارداد می‌کنیم که در سرتاسر این بخش، F نمایندهٔ یک میدان ناشمارا باشد.

پیوستگی توابع $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{F_c}$ در گزاره ۱-۳ بررسی شد. ولی چگونه می‌توان مفهوم مشتق‌پذیری را برای چنین توابعی تعریف کرد؟ یک راه ممکن برای این کار، استفاده از خاصیت یکتایی حد دنباله‌ها در توپولوژی متمم-شمارا می‌باشد. برای تابع $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{F_c}$، مقدار مشتق $\boldsymbol{f}$ در نقطه $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{X}$ را برابر حد دنباله

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

در صورت وجود، تعریف می‌کنیم که در آن، $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به x_0 است. مسلماً این کسر، یک صورت مبهم به شکل $\frac{0}{0}$ است و همواره نیاز به رفع ابهام دارد. ما از نماد d_c برای نمایش عمل مشتق‌گیری استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۲-۱. برای هر چندجمله‌ای مثل $\boldsymbol{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k}$ داریم $\boldsymbol{d_c p(x_0) = p'(x_0)}$.

برهان. با تشکیل کسر مورد نظر و ساده کردن آن، به دنباله

$$\frac{p(x_n) - p(x_0)}{x_n - x_0} = a_1 + a_2(x_n + x_0) + \cdots + a_k \sum_{i+j=k-1} x_n^i x_0^j$$

می‌رسیم که در آن $\{x_n\}$ دنباله‌ای سرانجام-x_0 است. بنابراین، دنبالهٔ فوق همگرا به $p'(x_0)$ است. ■

حقیقت امر این است که به خاطر تعریفی که از مشتق متمم-شمارا ارائه شد، روی میدان اعداد حقیقی، هر تابع مشتق‌پذیر معمولی، مشتق‌پذیر متمم-شمارا نیز می‌باشد ولی نه به عکس (مثال ۲-۲ را ببینید). به این ترتیب، مفهوم مشتق‌پذیری که مختص توابع تعریف شده روی $\mathbb{R}$ است، به کمک مشتق متمم-شمارا، قابل تعمیم روی میدان‌های دلخواه ناشمارا می‌باشد.

مشابه حالت معمولی، می‌توان مشتق‌پذیری مرتبهٔ دو و بالاتر را نیز تعریف کرد. نماد $d_c^r f$ را برای نمایش مشتق متمم-شمارای مرتبه r تابع f به کار می‌بریم. از گزاره ۲-۱، چنین بر می‌آید که توابع چندجمله‌ای، از هر مرتبه‌ای دارای مشتق متمم-شمارا می‌باشند. مثال بعد، یک نمونهٔ دیگر از یک تابع است که چندجمله‌ای نیست ولی از هر مرتبه‌ای دارای مشتق متمم-شمارا است.

مثال ۲-۲. تابع $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}_{\boldsymbol{c}} \to \mathbb{R}_{\boldsymbol{c}}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

یک تابع پیوسته است که مشتق متمم-شمارای آن توسط

$$d_c f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

داده می‌شود. به همین ترتیب، برای هر $r > 1$، داریم $d_c^r f(x) = 0$. توجه داریم که $d_c f$ پیوسته نیست ولی دارای مشتق متمم-شمارا می‌باشد.

اکنون روی منیفلدهای متمم-شمارا تمرکز می‌کنیم. تعریف ما از یک منیفلد متمم-شمارا، همانند تعریف یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است. فضای توپولوژی دلخواه X را در نظر می‌گیریم. هر تابع یک به یک $\phi: U \to F_{Zc}^n$ که در آن U یک زیرمجموعهٔ باز X است، یک نقشه روی X نامیده می‌شود. نماد (U, ϕ) برای نشان دادن یک نقشه و دامنهٔ آن به‌کار خواهد رفت. برای تعریف منیفلد متمم-شمارا، نیاز به اطلسی داریم که نقشه‌های (U_α, ϕ_α) موجود روی X را به گونه‌ای مناسب، در کنار هم گرد آورد به طوری که این نقشه‌ها، X را به صورت کامل نشان دهند، یعنی $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ و، به علاوه، برای هر دو نقشهٔ (U_α, ϕ_α) و (U_β, ϕ_β) که $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$، تابع

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

دارای ویژگی خاصی باشد به طوری که بتوان از روی آن منیفلدهای متمم-شمارا رده‌بندی نمود. به ویژه، اگر تابع $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ پیوسته (مشتق‌پذیر، چندجمله‌ای) باشد، منیفلد حاصل پیوسته (مشتق‌پذیر، تحلیلی) نامیده می‌شود.

دلیل نام‌گذاری منیفلدهای متمم-شمارای تحلیلی را توضیح می‌دهیم. اشاره کردیم که اگر هر کدام از توابع $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ یک چندجمله‌ای باشند، آنگاه منیفلد حاصل را تحلیلی می‌نامیم. نام تحلیلی اساساً به منیفلدی اطلاق می‌شود که توابع $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ همگی تحلیلی، یعنی سری توانی باشند. توجه داریم که طبق قضیه ۱-۲، سری‌های توانی در فضاهای متمم-شمارا، به چندجمله‌ای‌ها تقلیل می‌یابند. بنابراین، این نام‌گذاری مناسب به نظر می‌رسد. مثال سادهٔ زیر، رده‌ای عمده از منیفلدهای متمم-شمارا به دست می‌دهد.

مثال ۲-۳ (نمودار یک تابع). فرض کنیم $U \subset F_{Zc}^n$ یک مجموعهٔ باز و $f: U \to F_{Zc}^m$ یک تابع پیوسته باشد. مجموعه

$$G(f) = \{(x, f(x)) | x \in U\}$$

که نمودار تابع f نامیده می‌شود، تحت نقشه

$$\boldsymbol{\phi}: \boldsymbol{G}(\boldsymbol{f}) \to \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$$

به یک منیفلد متمم-شمارا تبدیل می‌شود. ردهٔ این منیفلد، به پیوستگی، مشتق‌پذیری، یا چندجمله‌ای بودن تابع $\boldsymbol{f}$ بستگی دارد.

تبصره ۲-۴. مشتق‌پذیری را برای حالت $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} = \mathbf{1}$ تعریف کرده‌ایم. بنابراین، اگر بخواهیم در مورد مشتق‌پذیر بودن منیفلد حاصل از تابع $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Zc}}^{\boldsymbol{m}}$ برای $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Zc}}^{\boldsymbol{n}}$، که در آن $\boldsymbol{m} > \mathbf{1}$ و $\boldsymbol{n} > \mathbf{1}$، صحبت کنیم، باید مشتق توابع چند متغیره را به طریقی مناسب تعریف کرده باشیم.

به این ترتیب، به کمک مثال ۲-۲ دیده می‌شود که نمودار تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

یک منیفلد متمم-شمارای پیوسته، مشتق‌پذیر و ناتحلیلی و نمودار

$$d_c f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

یک منیفلد متمم-شمارای مشتق‌پذیر است که منیفلدی پیوسته نیست و به همین دلیل، تحلیلی نیز نمی‌باشد. همچنین نمودار هر تابع چندجمله‌ای یعنی هر واریتهٔ جبری، یک منیفلد تحلیلی، پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۳. نکات پایانی

مطابق قضیه ۱-۱، مجموعهٔ چندجمله‌ای‌ها $F[x]$، در فضای $C(F_c, F_c)$ چگال است.

پرسش ۳-۱. برای هر تابع پیوسته $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{F_c} \to \boldsymbol{F_c}$، چگال بودن چندجمله‌ای‌ها، چه تعبیری در نمودار یا منیفلد متمم-شمارای حاصل از تابع $\boldsymbol{f}$ دارد؟

در گزاره ۱-۱ و لم ۱-۲، به ترتیب، ماهیت دنباله‌های همگرا و مجموعه‌های فشرده روی X_c معین شد.

پرسش ۳-۲. برای یک میدان ناشمارا مثل $\boldsymbol{F}$، دنباله‌های همگرا و مجموعه‌های فشرده در $\boldsymbol{F^n_{Zc}}$ چگونه رفتار می‌کنند؟

فرض کنیم $\mathcal{C}$، $\mathcal{D}$، و $\mathcal{A}$ به ترتیب، نمایش دهندهٔ ردهٔ منیفلدهای پیوسته، مشتق‌پذیر و تحلیلی باشد. به وضوح، $\mathcal{A} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ و $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. همچنین دیدیم که منیفلدی مشتق‌پذیر وجود دارد که پیوسته نیست.

پرسش ۳-۳. آیا منیفلدی پیوسته موجود است که مشتق‌پذیر نباشد؟

تشکر و قدردانی. نویسندگان بر خود وظیفه می‌دانند که از نظرات و پیشنهادات مفید داوران در جهت بهبود کیفیت مقاله تشکر و قدردانی نمایند. همچنین، نویسندگان اول و دوم، این مقاله را به روح پاک نویسنده سوم، شادروان دکتر محمدعلی اسدی که مدتی بعد از ارسال مقاله به مجله، دار فانی را وداع نموده و ما و جامعهٔ ریاضی کشور را داغدار نمود، تقدیم می دارند.

References

1. N. L. Alling and N. Greenleaf, Foundations of the theory of Klein surfaces, Springer-Verlag, 2006.
2. P. M. Gartside and A.M. Mohammad, Diversity of p-adic analytic manifolds, Topology Appl., **125** (2002). 323-333.
3. S. M. Salamon, Differential geometry of quaternionic manifolds, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., **19** (1986), 31-55.
4. R. Hartshorne, Algebraic geometry, Vol. **52**. Springer Science & Business Media, 2013.