



## A Hybrid Algorithm based on Iterative Regularization Methods for semi-explicit Integro-Differential-Algebraic Equations

M. S. Farahani<sup>1</sup> , M. Hadizadeh<sup>2</sup>  

1. Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

E-mail: [amfarahani@kntu.ac.ir](mailto:amfarahani@kntu.ac.ir)

2. Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

✉ E-mail: [hadizadeh@kntu.ac.ir](mailto:hadizadeh@kntu.ac.ir)

### Article Info

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received: 3 April 2021

Received in revised form:

28 August 2021

Accepted: 7 September 2021

Published online:

3 December 2023

#### Keywords:

Ill-posed problem,  
Regularization method,  
Landweber iterative method,  
Degree of ill-posedness,  
Integro-  
Differential-Algebraic  
equation.

### ABSTRACT

#### Introduction

Integro-Differential-Algebraic Equations arise in many cases in real world applications, in particular those related to the memory kernel identification problem in heat conduction, viscoelasticity, etc. The main focus of this paper is to present a numerical method based on the iterative regularization algorithms. Owing to the ill-posed behavior of these equations, we are looking for iterative type methods including the regularization schemes in order to fixed the difficulties which may arise in their numerical solvability. Of particular interest would be on the Landweber iteration which is developed for its efficiency and fast performance to solve linear inverse equations as well as many ill-posed problems. Typically, the discretized form of these problems leads to a large, sparse and ill-conditioned linear system of equations. As the regularity of the solution is closely related to regularity of kernels, degree of smoothness and properties of the integral operator, we assume throughout the paper that all the functions are satisfied in the regular conditions.

#### The proposed method

In this paper, a hybrid algorithm is developed in terms of the Landweber type iterative regularization and the Galerkin procedure. The problems have been first discretized by a Galerkin type method with piecewise constant functions as basis functions. We then start from a suitable initial value and experimentally choose the regularization parameter. The proposed method terminates when the maximum number of iterations is reached or a stopping rule is satisfied. The strategy will be accomplished rather fast which leads to efficient and fast numerical algorithm.

#### Experimental results and discussion

The validity and accuracy of the proposed algorithm are demonstrated through some illustrative examples. To clarify our results, we consider some test problems from the previously work and report the numerical results for different values of the number of nodes and iteration number. We also reported the CPU time for each kernel evaluation.

It should be noted that, the iterative methods based on Landweber algorithm typically can cause a semi-convergence phenomenon, which means the error initially decreases while after some iterations begin to increase. This behavior depends on different factors such as level of the noise, the relaxation

---

---

parameter and the starting point. Under these crucial issues, the iterative algorithms may lead to fast or slow semi-convergence which indicates the key role of verification the semi-convergence. Our experimental results show that the regularization parameter is important either in postponing the semi-convergence or decreasing the divergence. If it is chosen too large, it gives an over-smoothed solution which may lacks the desired solution, otherwise it yields a solution that is unnecessarily, and possibly severely contaminated by propagated error.

### **Conclusion**

Here, the numerical solution of semi-explicit Integro-differential algebraic equations, using a hybrid algorithm based on iterative regularization method is presented. The efficiency and accuracy of the algorithm are experimentally discussed. The main advantages of the proposed method are the low computational complexity and its convenient numerical implementation. The intrinsic property of the method is stipulated by its ability to efficiently control the number of iterations by varying the regularization parameter and subdivisions.

---

---

**How to cite:** Farahani M. S., Hadizadeh, M., (2023). A Hybrid Algorithm based on Iterative Regularization Methods for semi-explicit Integro-Differential-Algebraic Equations, *Mathematical Researches*, 9 (2), 43 - 62.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

---

## معرفی یک الگوریتم ترکیبی مبتنی بر روش‌های منظم‌سازی تکراری برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری نیمه‌صریح

مهدی سقرجوقی فراهانی<sup>۱</sup>، محمود هادی زاده یزدی<sup>۲</sup> ✉

۱. گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران. رایانامه: [amfarahani@kntu.ac.ir](mailto:amfarahani@kntu.ac.ir)  
۲. گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران. ✉ رایانامه: [hadizadeh@kntu.ac.ir](mailto:hadizadeh@kntu.ac.ir)

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله یک الگوریتم ترکیبی حاصل از گسسته‌سازی گالرکین و روش تکراری لندوبر برای تقریب جواب معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری معرف و مورد استفاده قرار می‌گیرد. توجه ویژه به رده‌ای از معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری نیمه‌صریح است که در آن قیود جبری، دیفرانسیلی و انتگرالی نوع اول ولترا به صورت مشترک وجود دارد. خصوصیات مطلوب روش‌های تکراری به ویژه کنترل سرعت همگرایی و سهولت پیاده‌سازی عددی آنها موجب شده است که این دسته از روش‌ها برای حل مسایل معکوس در مقیاس بزرگ و به ویژه معادلات مورد نظر قابل توجه باشند. به دلیل ناپایداری مشتق‌گیری عددی و بد وضعی مساله اصلی، استفاده از روش‌های مستقیم بدون تاثیر عملگرهای دیفرانسیل یا انتگرال در اینجا مورد نظر است. به علاوه شدت بد وضعی به میزانی است که استفاده از روش‌های منظم‌سازی امری اجتناب‌ناپذیر است. ضمن معرفی روش ترکیبی از نوع منظم‌سازی تکراری و تحلیل همگرایی آن به ارزیابی الگوریتم پیشنهادی و کارآیی محاسباتی آن با استفاده از چند مثال عددی می‌پردازیم.	تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱/۱۴ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۶/۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۶/۱۶ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲
	<b>واژه‌های کلیدی:</b> مسایل بدوضع؛ روشهای منظم‌سازی؛ روش تکراری لندوبر؛ شدت بد وضعی و ناپایداری عددی؛ معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری.

استناد: سقرجوقی فراهانی، مهدی؛ هادی زاده یزدی، محمود؛ (۱۴۰۲). معرفی یک الگوریتم ترکیبی مبتنی بر روش‌های منظم‌سازی تکراری برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری نیمه‌صریح. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۲)، ۴۳ - ۶۲.



## ۱. مقدمه

دستگاه معادله انتگرال-دیفرانسیل جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int_0^t K(t,s,x(s))ds = g(t) & t \in I := [0, T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن  $K : I \times I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  و  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  توابع برداری پیوسته و معلوم،  $A(t)$  و  $B(t)$  ماتریس‌های معلوم  $d \times d$  (برای  $d \geq 2$ ) و  $x$  تابع برداری مجهول است، به طوری که  $A$  الزاماً یک ماتریس منفرد بوده و

$$\forall t \in I, \det A(t) = 0.$$

این رده از معادلات در مدل سازی ریاضی برخی از فرآیندهای کاربردی مانند بررسی خاصیت کشسانی اجسام و تحلیل رفتار دینامیکی راکتورهای شیمیایی ظاهر می‌شوند [۲۴، ۲۵]. در سال‌های اخیر تحلیل عددی این نوع معادلات توسط برخی محققان مورد نظر بوده است.

از جمله روش پیوسته ضمنی رونگه-کوتا در [۸] و رده‌ای از روش‌های خطی چند گامی و روش ضمنی اوپلر در [۱۰، ۱۱]، [۱۲] برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. همچنین اخیراً حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری نیمه صریح با استفاده از روش هم محلی بر مبنای چند جمله‌ای‌های تکه‌ای پیوسته و ناپیوسته به ترتیب در [۷] و [۱۶] مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۱.۱ معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری نیمه صریح

شکل نیمه صریح خطی معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری متناظر با (۱.۱) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} y'(t) + B_{11}(t)y(t) + B_{12}(t)z(t) = f_1(t) + (\mathcal{V}_{11}y)(t) + (\mathcal{V}_{12}z)(t), \\ 0 = f_2(t) + (\mathcal{V}_{21}y)(t) + (\mathcal{V}_{22}z)(t), \\ y(0) = y_0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

که در آن  $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ،  $B(t) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ،  $K = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{11} & \mathcal{V}_{12} \\ \mathcal{V}_{21} & \mathcal{V}_{22} \end{pmatrix}$ ،  $g = (f_1, f_2)^T$ ، و همچنین

$x = (y, z)^T$  تابع مجهول مورد نظر است به طوری که عملگر انتگرالی  $\mathcal{V}$  چنین تعریف می‌شود:

$$(\mathcal{V}_{ij}x)(t) := \int_0^t k_{ij}(t,s)x(s)ds, \quad i, j = 1, 2.$$

به علاوه فرض می‌کنیم که توابع  $f^1, f^2$  و  $k_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) به اندازه کافی دارای مشتقات پیوسته بوده و همچنین شرط  $f^2(0) = 0$  برقرار باشد.

یکی از مفاهیم مهم و کلیدی در تجزیه و تحلیل نظری و عددی دستگاه معادله نیمه صریح (۲.۱)، مفهوم اندیس برای دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری است. این مفهوم با رویکرد‌های مختلف همانند تحلیل اندیس برای معادلات دیفرانسیل جبری می‌تواند مورد نظر باشد. به عنوان نمونه دستگاه نیمه صریح (۲.۱) با شرط  $|\det(k^{\nu\nu}(t, t))| > 0$ ، یک دستگاه انتگرال-دیفرانسیل جبری با اندیس یک نامیده می‌شود، زیرا با یک بار مشتق‌گیری به یک دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل معمولی از نوع ولترا تبدیل خواهد شد.

شرایط وجود و یکتایی جواب این رده از معادلات در [۶، ۷] مطرح شده است که در ادامه به برخی تعاریف مورد نیاز و قضایای مرتبط خواهیم پرداخت.

**تعریف ۱.۱.** دستگاه نیمه صریح انتگرال-دیفرانسیل جبری (۲.۱) دارای اندیس کنترل پذیر یک نامیده می‌شود، هرگاه معادله انتگرال نوع اول:

$$(\mathcal{V}_{22}w)(t) = f(t), \quad t \in I,$$

برای  $f \in C^1(I)$  و  $f(0) = 0$  دارای جواب یکتا در  $C(I)$  باشد.

**تعریف ۲.۱.** مجموعه مقادیر اولیه  $x_0 = (y_0, z_0)^T$  برای دستگاه نیمه صریح (۲.۱) سازگار است، اگر

$$k_{21}(0,0)y_0 + k_{22}(0,0)z_0 = -f_2'(0).$$

**قضیه ۳.۱.** [۶] فرض کنید که توابع  $B_{11}$  و  $B_{21}$  برای  $n \geq 0$  متعلق به  $C^n(I)$  و شرایط زیر برای توابع  $f^1$  و  $f^2$  و هسته  $k_{ij}$  برقرار باشد:

$$(1) \quad D := \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\} \text{ در آن } k_{l1} \in C^n(D) \text{ برای } l = 1, 2$$

$$(2) \quad k_{\nu l} \in C^{n+1}(D) \text{ برای } l = 1, 2 \text{ و } |\det(k^{\nu\nu}(t, t))| \geq k > 0$$

$$(3) \quad f^1 \in C^n(I) \text{ و } f^2 \in C^{n+1}(I) \text{ و } f^2(0) = 0$$

آنگاه برای هر مجموعه سازگار از مقادیر اولیه  $\{y_0, z_0\}$ ، دستگاه معادله انتگرال-دیفرانسیل جبری (۲.۱) دارای جواب یکتای  $x = (y, z)^T$  روی  $I$  می‌باشد، بطوریکه  $y \in C^{n+1}(I)$ ،  $z \in C^n(I)$  و  $x(0) = (y_0, z_0)^T$ .

شایان ذکر است که اگرچه برای حل دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری، با استفاده از مشتق گیری می توان به دستگاه منظمی از معادلات انتگرال ولترا رسید، لیکن این رویکرد به لحاظ ناپایداری مشتق گیری عددی در اینجا مورد نظر نمی باشد. از این رو در این مقاله به دنبال ارائه الگوریتم های عددی مستقیم یعنی بدون استفاده از عملگرهای دیفرانسیل و انتگرال و مبتنی بر روش های تکراری منظم سازی برای این رده از معادلات هستیم.

بدیهی است که با توجه به ماهیت بدوضعی معادلات انتگرال نوع اول، این دسته از معادلات نیز در رده مسائل بدوضع قرار می گیرند. با این وجود، اگر چه بدوضعی معادلات انتگرالی ولترا به شدت بدوضعی معادلات فردهولم نیست لیکن در عمل، معادله ولترای نوع اولی که در دستگاه ظاهر می شود به حدی ناپایدار است که برای بدست آوردن یک جواب قابل قبول، نیاز به استفاده از روند های منظم سازی امری اجتناب ناپذیر است. در بخش بعد به بررسی روندهای تکراری منظم سازی و به کارگیری آنها بر روی این رده از معادلات عملگری خواهیم پرداخت.

## ۱.۲ بدوضعی و روشهای تکراری منظم سازی

اغلب روش های منظم سازی ارائه شده برای حل معادلات عملگری بر مبنای روش های تکراری هستند به قسمی که تکرار اولیه در آنها به طور معمول با یک تخمین اولیه از مجهولات شروع شده و روند تکراری تا وقتی که جوابها به دقت از پیش تعیین شده ای همگرا شوند، ادامه می یابد. در این بخش ابتدا به معرفی جواب پایدار برای معادله خطی بدوضع می پردازیم.

در حالت کلی مساله ریاضی تعیین جواب  $u$  تحت عملگر  $A$ ، به فرض معلوم بودن داده اولیه  $b$  به طوری که  $Au = b$  را در نظر بگیرد.  $A$  عملگری است که عناصر فضای خطی  $X$  را با توجه به ویژگی های خود به روی عناصر فضای خطی  $Y$  تصویر می کند. وجود و یکتایی جواب این مساله در حالت کلی به ویژگی های عملگر  $A$  وابسته است، به خصوص اگر عملگر  $A$  یک به یک و پوشا باشد، آنگاه جواب پیوسته مساله عبارتست از:  $u = A^{-1}b$  و در این صورت مساله خوش وضع خواهد بود. خاصیت یک به یک بودن تضمین می کند که برای هر  $b$  مساله دارای جواب یکتاست، درحالیکه پوشایی، وجود جواب  $u$  برای هر عضو از فضای خطی  $Y$  را تضمین می کند. در نهایت اگر معکوس  $A$  پیوسته باشد، آنگاه جواب مساله به طور پیوسته به داده های اولیه وابسته است و در غیر این صورت مساله بدوضع خواهد بود.

عموماً مشکل اصلی در حل مسائل کاربردی، عدم پایداری (عدم وابستگی پیوسته جواب مساله به داده های اولیه) می باشد، زیرا در اغلب موارد داده اولیه  $b$  به طور دقیق در دسترس نبوده و در عمل مقدار اختلال یافته  $b^\delta$  موجود است به طوری که:

$$\|b^\delta - b\| < \delta.$$

بدیهی است که در این حالت خطاهای غیرقابل اجتناب نظیر اندازه‌گیری داده‌های اولیه یا سایر خطاهای محاسباتی می‌توانند به قدری افزایش یابد که جواب حاصل را کاملاً بی‌معنی کند که در اینجا این موضوع به طور خاص برای حل دستگاه (۲.۱) مورد توجه قرار گرفته و به بررسی و تحلیل آن با استفاده از یک الگوریتم منظم‌سازی تکراری پرداخته می‌شود.

یکی از رویکردهای متعارف برای حل مساله بدووضع  $Au = b$  در فضای خطی  $X$ ، استفاده از گسسته‌سازی است به طوری که عملگر  $A$  را در فضای متناهی البعد  $X_n \subset X$  به ترتیبی محدود کنیم که منجر به خوش‌وضع مساله شود. به عبارت دیگر یک مساله بدووضع با بردار مجهول نامتناهی به یک مساله تقریبی متناظر با بردار مجهول متناهی تبدیل شود. استفاده از ایده گسسته‌سازی برای منظم‌سازی مساله به عنوان ویژگی "خود-منظم‌سازی" روش‌های گسسته‌سازی شناخته می‌شود. مطلب مهم در این میان آن است که آیا این خود-منظم‌سازی برای رسیدن به جواب قابل قبول یک مساله بدووضع کافی است؟ در حالت کلی باید گفت که این منظم‌سازی کافی نیست، یعنی برای رسیدن به جواب عددی مناسب برای مسائلی که داده‌ها در آنها با خطا همراه هستند نیاز به پیاده‌سازی یکی از روش‌های منظم‌سازی داریم.

**ملاحظه ۴.۱.** توجه کنید که حتی زمانی که روش‌های منظم‌سازی مورد استفاده قرار گیرند، برای پیاده‌سازی روش عددی نیاز به گسسته‌سازی مساله خواهیم داشت. لذا لازم است به تاثیر این نوع گسسته‌سازی در جواب مساله نیز توجه شود که از این گونه منظم‌سازی با عنوان "منظم‌سازی همراه با گسسته‌سازی" یاد می‌شود. برای جزئیات بیشتر [۱] را ببینید.

## ۲. روش تکراری لندوبر و پیاده‌سازی روی معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری

در این بخش با توجه به قرار گرفتن معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری در رده مسائل بدووضع به مرور برخی روش‌های موجود برای تقریب جوابهای عددی آنها می‌پردازیم. با گذشت زمان و گسترش کاربردهای مسائل معکوس، نیاز به روش‌های جدید و ترکیبی برای حل پایدار این گونه مسائل بیشتر احساس شد و لذا ابتدا روش‌های منظم‌سازی کلاسیک [۲۶]، [۲۷] و سپس روش‌های منظم‌سازی تکراری [۲۸]، [۲۹]، [۳۰] و [۳۱] برای حل مسائل بدووضع مورد استفاده قرار گرفتند. بسیاری از روش‌های منظم‌سازی کلاسیک مانند روش تیخونوف بر اساس محاسبه عملگر الحاقی مورد توجه بوده و لذا این دسته از روش‌ها ساختار اصلی معادله اولیه را حفظ نمی‌کنند. لیکن انواع دیگری از روش‌هایی از این نوع، موسوم به روش‌های منظم‌سازی از نوع ولترا نیز وجود دارند که ساختار ولترای معادله را حفظ می‌کنند. اگر چه نتایج نظری موجود برای این دسته از روش‌ها به مسائل با اندیس پایین و یا تعیین جواب مشروط به تعیین شرایط خاص بر روی عملگر  $A$  محدود می‌شود، ولی باید توجه داشت که این محدودیت‌ها تنها از جنبه نظری مورد توجه بوده و این به آن معنی نیست که این روش‌ها به طور کلی روی رده‌های مختلف مسائل بدووضع قابل اجرا نمی‌باشند.

نکته قابل توجه دیگر این است که معمولاً انتخاب مناسب پارامترهای منظم ساز و ساختار ماتریس مربوطه در روشهای تکراری مورد نظر به طور موثری در کاهش تعداد دفعات تکرار و ارائه جواب قابل قبول تاثیرگذار است. با این دیدگاه، اگر چه ممکن است ساختار چنین روش های تکراری و پیاده سازی عددی آنها برای حل دستگاه معادلات انتگرالی جبری پیچیده به نظر نرسد، لیکن مساله اصلی چگونگی تعیین شرط توقف و نحوه انتخاب پارامتر منظم ساز می باشد. در این میان، روش تکراری لندوبر یکی از روشهایی است که می تواند برای حل عددی دستگاه معادلات حاصل از گسسته سازی مسائل معکوس به کار رود که در ادامه به مرور و بررسی این روش و ویژگی های آن خواهیم پرداخت.

## ۱.۲ روش تکراری لندوبر

رده ابتدایی الگوریتم تکراری لندوبر که برای اولین بار در سال ۱۹۵۱ معرفی شد، امروزه به عنوان یکی از روش های تکراری مهم برای حل مسائل بدووضع و دستگاه های مقیاس بزرگ شناخته می شود. فرض کنید هدف حل مساله  $Au = b$  باشد، روش تکراری یا الگوریتم لندوبر به صورت زیر مطرح می شود:

(۱) انتخاب مقدار اولیه  $u$ .

(۲) محاسبه  $u_{k+1}$  با استفاده از روند تکراری  $u_{k+1} = u_k + \gamma A^T M(b - Au_k)$  که در آن  $\gamma$  پارامتر تخفیف و  $M$  یک ماتریس معین مثبت متقارن است.

(۳) ادامه روند تکراری تا تحقق شرایط توقف.

در خصوص اهمیت این دسته از روش های تکراری به عنوان نمونه می توان به کاربرد آنها برای حل مساله تعیین نقطه ای در اشتراک تعدادی مجموعه محدب بسته اشاره نمود. این مساله، به مساله شدنی محدب (CFP) موسوم بوده که در تصویر برداری پزشکی و پرتودرمانی، پردازش سیگنال و مینیمم سازی توابع محدب غیرهموار کاربرد داشته [۱۳، ۱۴، ۱۵] و عموماً به دستگاه های بدووضع با ابعاد بزرگ که دارای رتبه کامل نیستند، منتهی می شوند. برای حل این نوع از مسائل، استفاده از روش های تکراری از قبیل الگوریتم های مبتنی بر تصویر متعامد نیز به طور موثری توصیه شده است.

**نکته ۱.۲.** یکی از نکات مهم در هنگام به کارگیری روش های تکراری لندوبر، نحوه برخورد با پدیده ”شبه همگرایی” است که در آن خطای محاسبه جواب تقریبی در ابتدا کاهش یافته، اما با ادامه روند تکراری، با توجه به میزان اختلال موجود در داده ها و شدت بدووضع مساله، به یکباره رو به افزایش می گذارد. برای کنترل و رفع این پدیده و رسیدن به جواب تقریبی مناسب، ایده هایی برای توقف الگوریتم و تعیین پارامترهای تخفیف توسط محققین ارائه شده که برخی از آنها در [۳۲، ۳۳] آمده است.



به طور خاص در این مقاله از میان گونه‌های مختلف روش لندوبر، روش تکراری لندوبر - فریدمن مورد نظر است که یکی از روش‌های کلاسیک منظم‌سازی تکراری در پایدار سازی مسائل بدوضع به ازای  $M = I$  بوده و رابطه بازگشتی آن به صورت زیر است:

$$u_{k+1} = (I - \gamma A^T A) u_k + \gamma A^T b, \quad k = 0, 1, \dots$$

از آنجا که به طور معمول در مسائل واقعی جواب دقیق در دسترس نیست، لذا به فرض اطمینان از همگرایی روش، می‌توان میزان خطا را در هر مرحله با توجه به نتایج تکرار مرحله قبل کنترل نمود. نشان داده شده است که در روش‌های منظم‌سازی تکراری استفاده از ضریب تخفیف مناسب اهمیت ویژه‌ای داشته و موجب افزایش سرعت همگرایی، به تعویق افتادن پدیده شبه همگرایی و همچنین میرایی نوسانات در تکرارها می‌شود ([۲۱] را ببینید).

## ۲.۲ پیاده‌سازی الگوریتم

بدیهی است که در کاربردهای عملی، اغلب به دنبال یافتن جواب عددی یک مساله و تبدیل مدل پیوسته به یک مدل گسسته هستیم. به طور معمول گسسته‌سازی عددی عملگرهای انتگرالی ولترا، منجر به یک ماتریس پایین مثلثی (یا شبه پایین مثلثی) می‌شود که دارای ساختار تنک و ساده است. با توجه به آنکه دستگاه معادله حاصل از گسسته‌سازی یک مساله پیوسته بدوضع، دارای ویژگی‌هایی نظیر حساسیت نسبت به خطاهای دارای بسامد زیاد می‌باشد، لذا ماتریس ضرایب متناظر یک ماتریس بدشرط است. اگرچه فرایند گسسته‌سازی و تبدیل یک مساله در فضای با بعد نامتناهی به یک مساله متناهی تا حدودی به منظم‌سازی کمک می‌کند، ولی عدد شرطی ماتریس حاصل معمولاً عددی بزرگ است، بطوری که در اکثر موارد برای دستیابی به جواب‌های تقریبی قابل قبول، هنوز هم به نوعی روش منظم‌سازی نیاز است.

اکنون دستگاه خطی نیمه صریح (۲.۱) را در نظر گرفته و آن را به فرم فشرده زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$Tx = g, \quad (1.2)$$

که در آن  $T = A(t) + B(t) + L$  یک عملگر ماتریسی مرکب و ماتریس  $L$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{21} & -\lambda_{22} \end{pmatrix}.$$

معادله (۱.۲) پس از گسسته‌سازی به دستگاه معادله خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$Ax^{\delta} = g^{\delta}, \quad (2.2)$$



## ۳.۲ استراتژی تعیین پارامتر تخفیف

نحوه انتخاب پارامتر تخفیف بهینه در روش‌های منظم‌سازی تکراری از جمله موارد مهم و قابل بحث است. در این مقاله برای انتخاب پارامتر تخفیف  $\gamma$  مناسب ابتدا بر اساس قاعده تمایز موروزف [۳۴] و [۳۵] با شرط توقف پسین، مقدار اولیه مناسبی به صورت زیر اختیار می‌کنیم:

$$\gamma = \sup \{ \gamma > 0 : \|Au_\gamma - b^\delta\| \leq \tau\delta \},$$

که در آن جواب تقریبی معادله  $Au = b$  با استفاده از دنباله توابع  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  و با شروع از حدس اولیه مناسب  $u_0$  به صورت  $u_\gamma$  تولید شده و  $\tau > 1$  یک عدد ثابت می‌باشد. سپس با قرار دادن شرط توقف به میزان دقت مورد نظر و اجرای روند تکراری نسبت به بهینه کردن پارامتر تخفیف به صورت تجربی اقدام می‌کنیم.

توجه کنید که در حالت خاص، اگر  $M = I$  و  $\gamma \in (0, 2\|A^T A\|^{-1})$  اختیار شوند، آنگاه  $(I - \gamma A^T A)$  یک عملگر انقباضی است و به این ترتیب شرط کافی برای تعیین پارامتر تخفیف مشخص خواهد شد. (برای جزئیات بیشتر [۲۱، ۲۰] را ببینید).

قضیه زیر، همگرایی الگوریتم تکراری ارائه شده را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری (۲.۱) نشان می‌دهد:

**قضیه ۳.۲.** عملگر خطی و کراندار  $A$  را با هسته و توابع به اندازه کافی پیوسته مشتق پذیر روی دامنه  $I := [0, T]$  در فرم گسسته (۲.۲) در نظر بگیرید. فرض کنید شرایط وجود و یکتایی جواب برای دستگاه معادله انتگرال-دیفرانسیل جبری (۲.۱) برقرار بوده و به علاوه پارامتر تخفیف به شیوه مناسبی انتخاب شده است. آنگاه جواب تقریبی حاصل از روند تکراری ارائه شده در الگوریتم (۲.۲) با شروع از تقریب اولیه  $x^*$ ، شرط همگرایی را برآورده می‌کند. یعنی اگر  $x^*$  جواب اصلی مساله باشد، برای  $k$  های از مرتبه به اندازه کافی بزرگ به بعد داریم:

$$\|x_k - x^*\| \rightarrow 0$$

**اثبات.** رابطه  $x_{k+1} = x_k + \gamma A^T M (g^\delta - Ax_k)$  را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x_{k+1} = (I - \gamma A^T M A)x_k + \gamma A^T M g^\delta.$$

باتوجه به کراندار  $A$ ، فرض کنید مقدار کران طوری باشد که تمام مقادیر ویژه  $A$  داخل دایره واحد قرار گرفته و لذا شعاع طیفی  $A$  به یک محدود باشد. همچنین با توجه به برقراری شرایط وجود و یکتایی جواب، با شروع از یک تقریب اولیه  $x^*$  برای روند تکراری داریم:

$$x_k = (I - \gamma A^T M A)^k x_0 + \left( I + (I - \gamma A^T M A) + (I - \gamma A^T M A)^2 + \dots + (I - \gamma A^T M A)^{k-1} \right) (\gamma A^T M g^\delta),$$

یا

$$(I - (I - \gamma A^T M A)) \left( I + (I - \gamma A^T M A) + (I - \gamma A^T M A)^2 + \dots + (I - \gamma A^T M A)^{k-1} \right) = I - (I - \gamma A^T M A)^k.$$

از آنجایی که جواب معادله به  $x$  وابسته نیست، برای همگرایی روند تکراری به جواب یکتا با شروع از  $x$  لازم است ضریب  $x$  یعنی  $(I - \gamma A^T M A)^k$  به صفر همگرا شود. بنابراین اگر  $k \rightarrow \infty$ ، آنگاه:

$$(I - \gamma A^T M A)^k \rightarrow 0$$

و در نتیجه:

$$(I - \gamma A^T M A)^k x_0 \rightarrow 0$$

همچنین از روابط قبل داریم:

$$I + (I - \gamma A^T M A) + (I - \gamma A^T M A)^2 + \dots + (I - \gamma A^T M A)^k \rightarrow (I - (I - \gamma A^T M A))^{-1}$$

و در نهایت پس از جایگزینی نتیجه می شود:

$$x_k \rightarrow (\gamma A^T M A)^{-1} (\gamma A^T M g^\delta)$$

که شرط لازم و کافی برای همگرایی است.

از طرف دیگر با توجه به انتخاب مناسب پارامتر تخفیف و اینکه در اینجا ماتریس  $M$  به گونه ای انتخاب می شود که عملگر  $(I - \gamma A^T M A)$  از مرتبه به اندازه کافی بزرگ به جواب دستگاه معادله میل می کند، یعنی

$$\|x_k - x^*\| \rightarrow 0$$

**تذکر ۴.۲.** شاپان ذکر است که برای به دست آوردن یک جواب تقریبی برای یک مساله بدوضع، داشتن یک کران قابل کنترل برای اختلال موجود در داده ها به صورت  $\|b^\delta - b\| < \delta$  ضروری است.

اگر چه روش های تکراری منظم سازی در زمینه مسائل کاربردی در سالهای اخیر به دلیل پیشرفت سریع حوزه فناوری محاسباتی توجه زیادی را به خود جلب کرده و در بسیاری از موارد عملکرد مناسبی داشته اند، با این حال لازم به ذکر است که این روش ها در حل مسائلی که جواب آنها به طور تقریبی و با دقت محدود مورد نیاز است، بسیار کارآمدتر هستند. به

خصوصاً وقتی که داده‌ها با اختلال زیاد همراه باشد، چنین روش‌هایی به دلیل انتخاب  $N$  نه چندان بزرگ به واسطه موازنه سایر شاخص‌ها جهت کنترل خطای جواب، معمولاً نتایج بهتری را به دست می‌دهند.

### ۳ نتایج عددی

هدف ما در این بخش تخمین خطای جواب تقریبی حاصل از الگوریتم ارائه شده و بررسی نتایج عددی روی چند مساله نمونه ای استاندارد می‌باشد. در اینجا سه نمونه معادله انتگرال-دیفرانسیل جبری را با اهداف مختلف در نظر می‌گیریم. هدف کنترل سه عامل انتخاب پارامتر تخفیف، تعداد افزاها و تعداد دفعات تکرار روش و تاثیر این شاخص‌ها بر دقت مولفه‌های جبری و عادی جواب مساله است. در اینجا پارامتر تخفیف بهینه را با هدف برقراری تعادل بین تمام شاخص‌های ذکر شده و بر اساس نتایج تجربی حاصله به صورت  $\gamma = \frac{7}{4}$  در هر سه مثال انتخاب می‌کنیم. تمام نتایج بدست آمده با استفاده از کدنویسی تحت نرم افزار 12 Mathematica<sup>®</sup> محاسبه و گزارش شده‌اند.

مثال ۱.۳. [۱۶] معادله انتگرال-دیفرانسیل جبری (۱.۱) را با مقادیر زیر در نظر می‌گیریم:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad K(t,s) = \begin{pmatrix} t+s+1 & t^2+s^2+2 \\ t+s+4 & t^2+s^2+1 \end{pmatrix},$$

به طوری که جمله آزاد  $g(t)$  به گونه ای انتخاب می‌شود که جواب دقیق معادله عبارتست از:

$$y(t) = \sin(t), \quad z(t) = \cos(t).$$

همچنانکه اشاره شد پارامتر تخفیف و حداکثر تعداد تکرارها می‌توانند به صورت سازگار و با شرط توقف و یا در کل الگوریتم ثابت در نظر گرفته شوند.

نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی به ازای مقادیر مختلف  $N$  ابتدا برای تعداد تکرارهای ثابت به ازای  $m=50$  و بدون در نظر گرفتن شرط توقف در جدول ۱ گزارش شده است. در جدول ۲ با استفاده از قاعده توقف و به ازای شرط توقف  $0.1$  یعنی با در نظر گرفتن میزان اختلال  $\delta$ ، مقدار ثابت  $\tau$  به طوری انتخاب شده است که برای توقف تکرارها کافیت شرط  $\|Ax^m - g^m\| < 0.1$  برقرار شود، این جدول تاثیر همزمان تعداد تکرارها و مقادیر مختلف  $N$  را به ازای پارامتر تخفیف ثابت بر روی دقت مولفه‌های جبری و عادی جواب نشان می‌دهد.

$N$	$\ y - y^{\delta}\ $	$\ z - z^{\delta}\ $	خطای محاسبه $y$ در [۱۶]	خطای محاسبه $z$ در [۱۶]	Time (sec)
6	1/90 E-01	1/35 E-01	-	-	0/015
8	8/49 E-02	4/75 E-02	-	-	0/031
10	1/97 E-02	1/39 E-02	-	-	0/046
12	2/67 E-02	4/37 E-02	-	-	0/062
16	-	-	1/79 E-04	2/01 E-04	-
32	-	-	4/47 E-05	4/70 E-05	-

جدول ۱: مقایسه خطای روش تکراری لندوبر برای مثال ۱.۳ به ازای تعداد تکرار  $m=50$  نسبت به روش هم محلی با چندجمله ای های تکه ای مرتبه دو [۱۶]

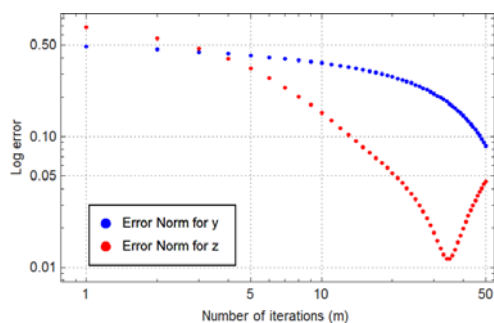
همچنین به جهت مقایسه، نتایج حاصل از اجرای روش هم محلی بر اساس تقریب چندجمله ای های تکه ای مرتبه دو در [۱۶] در جدول ۱ آمده است.

لازم به ذکر است که هزینه محاسباتی، سرعت و زمان اجرای الگوریتم ارائه شده در اینجا برای رسیدن به دقت محدود و متناسب با انتظار کاربران از دقت جواب های تقریبی مساله نسبت به روش هم محلی برای چندجمله ایهای تکه ای درجه دو بسیار کمتر بوده که در جدول آمده است. لیکن جهت انجام مقایسه با شرایط یکسان، اطلاعاتی از این نوع در مورد روش [۱۶] در دست نیست. به علاوه همانطور که در شکل ۱ مشاهده می شود در روش پیشنهادی، ظریف تر شدن افرازها الزاماً موجب بهبود جواب های تقریبی نشده ولیکن می تواند وقوع پدیده شبه همگرایی را به تعویق بیندازد که این شاخص، بسته به انتخاب نوع شرط توقف و انتخاب افراز مناسب، نقش مهمی در تعداد تکرارها و هزینه محاسباتی مربوطه خواهد داشت. با این رویکرد، نقش انتخاب پارامتر  $N$  نه چندان بزرگ در جدول ۱ به لحاظ انجام مقایسه نسبت به سایر روش های تصویری که معمولاً بهبود خطای آنها متناسب با افزایش تعداد تقسیمات بازه و همچنین مرتبه چندجمله ای تقریب می باشد در کاهش هزینه های محاسباتی از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

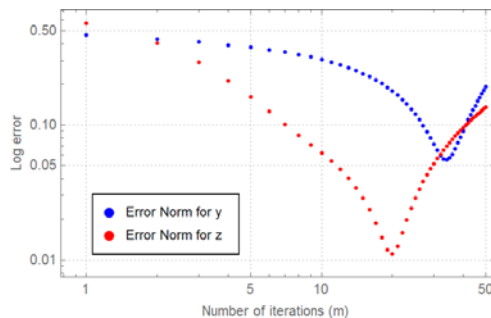
همچنین در شکل ۱ برای حداکثر تعداد تکرار  $m = 50$  و  $m = 150$  رفتار خطای روش تکراری ارائه شده نشان داده می شود. زمان محاسباتی اجرای روش برای تمام مقادیر  $N$  نیز در جدول ها گزارش شده است.

$N$	$m$	$\ y - y^\delta\ $	$\ z - z^\delta\ $	Time (sec)
6	27	9/90 E-01	3/79 E-02	0/015
8	48	9/57 E-02	4/04 E-02	0/031
10	74	9/79 E-02	3/99 E-02	0/062
12	106	9/85 E-02	3/99 E-02	0/125

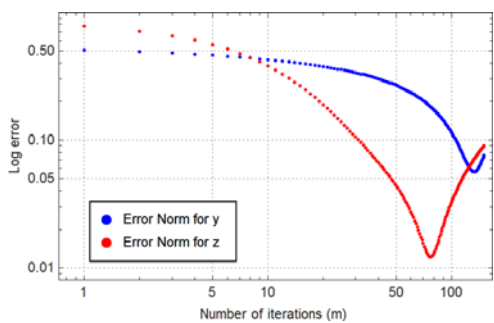
جدول ۲: ثابت بودن میزان خطای روش تکراری لندوبر برای مثال ۱.۳ با شرط توقف 0/۱ به ازای تعداد تکرارهای مختلف.



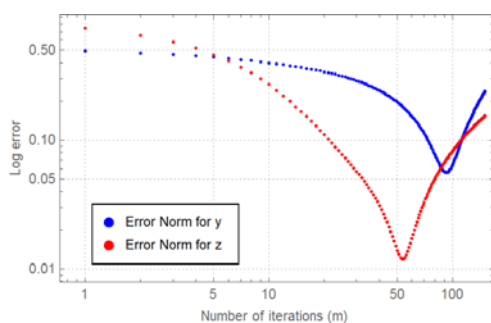
$N = 8$  (ب)



$N = 6$  (ا)



$N = 12$  (د)



$N = 10$  (ج)

شکل ۱: نمایش رفتار خطا برای مولفه‌های بردار جواب در مثال ۱.۳ به ازای مقادیر مختلف  $N$

مثال ۲.۳. در معادله انتگرال-دیفرانسیل جبری (۱.۱)، فرض کنید  $B(t)$  نیز یک ماتریس منفرد بوده به طوری که

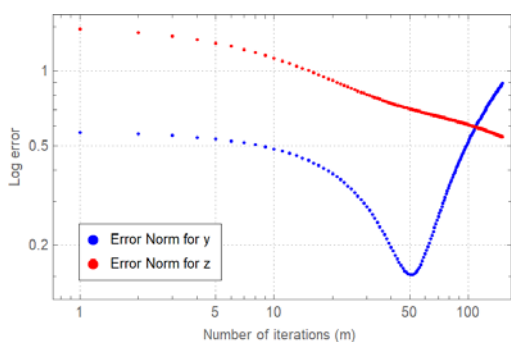
$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K(t,s) = \begin{pmatrix} t+s & t^2+s^2 \\ s-t^2 & t+s+1 \end{pmatrix},$$

به قسمی که جواب دقیق معادله عبارتست از:

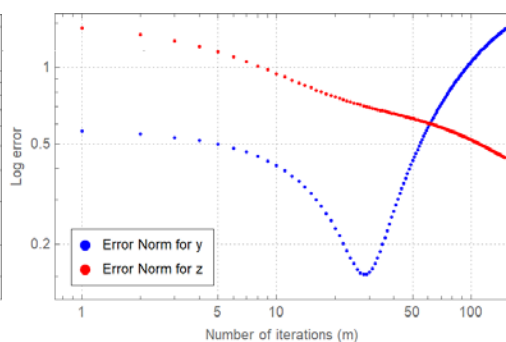
$$y(t) = t, \quad z(t) = t + 1.$$

شکل ۲ رفتار خطای مولفه‌های بردار جواب را به ازای  $m = 150$  و پارامتر تخفیف  $\gamma = \frac{7}{4}$  به ازای مقادیر مختلف  $N$  نمایش

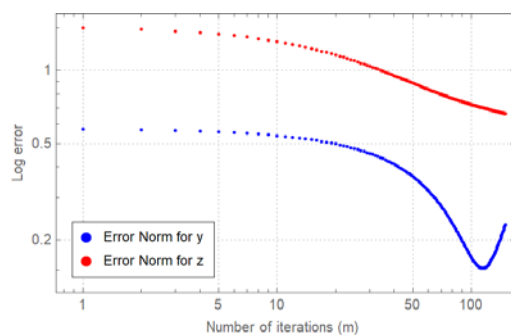
می‌دهد.



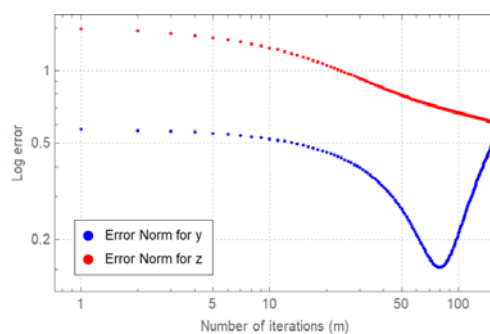
$N = 8$  (ب)



$N = 6$  (ا)



$N = 12$  (د)



$N = 10$  (ج)

شکل ۲: نمایش رفتار خطا برای مولفه‌های بردار جواب در مثال ۲.۳ به ازای مقادیر مختلف  $N$



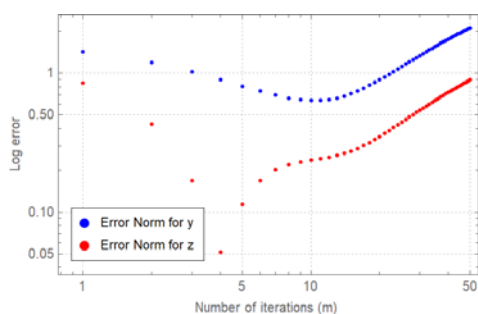
مثال ۳,۳.

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad K(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

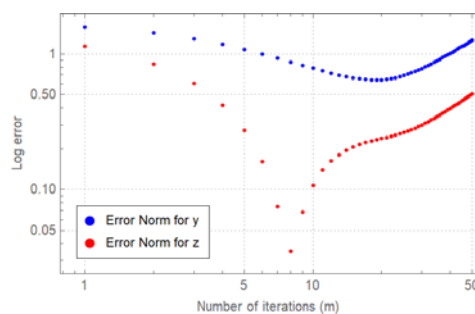
جواب دقیق عبارتست از:

$$y(t) = e^t, \quad z(t) = t + 1.$$

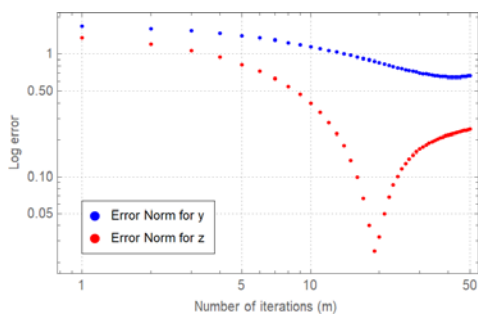
در این مثال نیز حداکثر تعداد تکرارها  $m = 50$  و پارامتر تخفیف  $\gamma = \frac{7}{4}$  انتخاب شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که به دلیل وجود عامل دیفرانسیلی در معادله اول و ناپایداری حاصله در تعیین مولفه  $y$ ، در مثال‌های ۳.۳ و ۱.۳ دقت مؤلفه جبری  $z$  از  $y$  محسوس‌تر است. رخداد پدیده شبه همگرایی و کنترل تعداد افرازاها به منظور پیش‌گیری از تعویق همگرایی نیز به وضوح در نمودارها مشاهده شده و زمان محاسباتی لازم تکرار الگوریتم پیشنهادی در قالب نتایج ستون آخر جدول‌ها دیده می‌شود.



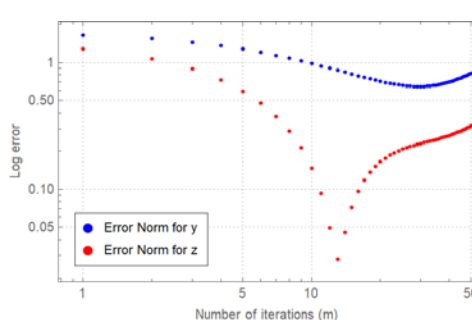
$N = 8$  (ب)



$N = 6$  (ا)



$N = 12$  (د)



$N = 10$  (ج)

شکل ۳: نمایش رفتار خطا برای مولفه‌های بردار جواب در مثال ۳.۳ به ازای مقادیر مختلف  $N$

## نتیجه گیری

در این مقاله حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل جبری نیمه صریح با به کارگیری الگوریتم ترکیبی حاصل از گسسته سازی گالرکین و روش تکراری لندوبر ارائه شد. نتایج تجربی و محاسباتی حاصل از اجرای الگوریتم روی چند نمونه از مثال های متنوع گزارش و مورد بحث قرار گرفته و کارایی و صحت آن نسبت به نتایج نظری نشان داده شد. از جمله مزایای روش پیشنهادی پیچیدگی محاسباتی کم و سرعت بالای اجرای روش نسبت به سایر روش های تصویری برای این دسته از مسایل خواهد بود که به ویژه می تواند در حل مدل های کاربردی موثر واقع شود.

## References

1. P. K. Lamm, A survey of regularization methods for first-kind Volterra equations, In *Surveys on Solution Methods for Inverse Problems*, Springer, 2000.
2. P. K. Lamm, Approximation of ill-posed Volterra problems via predictor-corrector regularization methods, *SIAM J. Applied Math.* **56** (1996), 524-541.
3. L. Landweber, An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind, *American J. Math.*, **73** (1951), 615-624.
4. H. Liang and H. Brunner, Integral-algebraic equations: theory of collocation methods I, *SIAM J. Numer. Anal.* **51** (2013), 2238-2259.
5. H. Liang and H. Brunner, Integral-algebraic equations: theory of collocation methods II, *SIAM J. Numer. Anal.* **54** (2016), 2640-2663.
6. H. Brunner, *Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2017.
7. H. Brunner, *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations*, Cambridge University Press, 2004.
8. J. P. Kauthen, Implicit Runge-Kutta methods for some integro-differential algebraic equations, *Appl. Numer. Math.* **13** (1993), 125-134.
9. J. P. Kauthen, The numerical solution of Volterra integral-algebraic equations of index 1 by polynomial spline collocation method, *Math. Comp.* **70** (2000), 1503-1514.
10. M. V. Bulatov, Integro-differential systems with a degenerate matrix multiplying the derivative, *Differ. Eq.* **38** (2002), 731-737.
11. M. V. Bulatov and E. V. Chistyakova, On a family of singular integro-differential equations, *Comput. Math. Math. Phys.* **51** (2011), 1558-1566.
12. M. V. Bulatov and E. V. Chistyakova, Numerical solution of integro-differential systems with a degenerate matrix multiplying the derivative by multistep methods, *Differ. Eq.* **42** (2006), 1317-1325.

13. F. Natterer and F. Wubbeling, *Mathematical Methods in Image Reconstruction*, SIAM, 2001
14. M. Bertero and P. Boccacci, *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, IPP, 1998.
15. P. Brianzi, F. D. Benedetto and C. Estatico, Improvement of space-invariant image deblurring by preconditioned Landweber iterations, *SIAM J. Sci. Comput.* **30** (2008), 1430–1458.
16. S. Pishbin, The numerical solution of the semi-explicit IDAEs by discontinuous piecewise polynomial approximation, *Appl. Math. Comput.* **339** (2018), 93-104.
17. R. Plato, *Iterative and Parametric Methods for Linear Ill-posed Problems*, TU Berlin, 1995.
18. M. Hadizadeh, F. Ghoreishi and S. Pishbin, Jacobi spectral solution for integral-algebraic equations of index-2, *Appl. Numer. Math.* **61** (2011), 131-148.
19. M. S. Farahani and M. Hadizadeh, Direct regularization for system of Integral-Algebraic Equations of index-1, *Inverse Probl. Sic. Engng.* **26** (2018), 728-743.
20. C. L. Byrne, *Iterative Algorithms in Inverse Problems*, UMass Library, 2006.
21. T. Elfving and T. Nikazad, Stopping rules for Landweber-type iteration, *Inverse Probl.* **23** (2007), 1417-1432.
22. S. Kindermann and A. Leitao, Convergence rates for Kaczmarz-type regularization methods, *Inverse Probl. Imag.* **8** (2014), 149-172.
23. C. W. Gear, Differential algebraic equations, indices and integral algebraic equations, *SIAM J. Numer. Anal.* **27** (1990), 1527-1534.
24. M. Kot, *Elements of Mathematical Ecology*, Cambridge University Press, 2001.
25. I. D. Kopeikin and V. P. Shishkin, Integral form of the general solution of equations of steady-state thermoelasticity, *Comput. Math. Math. Phys.* **52** (2012), 691-701.
26. H. W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publisher, 1996.
27. V.O. Sergeev, Regularization of Volterra equations of the first kind, *Soviet Math. Dokl.* **12** (1971), 501-505.
28. R. Plato, On the discrepancy principle for iterative and parametric methods to solve linear ill-posed equations, *Numer. Math.* **75**(1) (1996), 99-120.
29. V.V. Vasin, Monotone iterative processes for nonlinear operator equations and their applications to Volterra equations, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **4**(4) (1996), 331-340.
30. R. Plato, The Galerkin scheme for Lavrentiev's  $m$ -times iterated method to solve linear accretive Volterra integral equations of the first kind, *BIT J. Numer. Anal.* **37** (1997), 404-423.

31. Y. Wang, X. Gu, T. Yu and S. Fan, Iterative Lavrentiev regularization for symmetric kernel-driven operator equations: with application to digital image restoration problems, *Science in China Series F: Information Sciences*, **48** (2005), 467-483.
32. T. Elfving, T. Nikazad and P. C. Hansen, Semi-convergence and relaxation parameters for a class of SIRT algorithms, *Electron. Trans. Numer. Anal.* **37** (2010), 321-336.
33. T. Elfving, P. C. Hansen and T. Nikazad, Semiconvergence and relaxation parameters for projected SIRT algorithms, *SIAM J. Sci. Comput.* **34** (2012), 2000-2017.
34. V.A. Morozov, *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*, Springer, 1984.
35. V.A. Morozov, *Regularization Methods for Ill-Posed Problems*, CRC Press, 1993.