Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Categorical Relation between Dimension Groups, C*-algebras, and Cantor Minimal Systems

Nasser Golestani[1]

1. Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
   E-mail: n.golestani@modares.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
8 May 2021
Received in revised form:
15 May 2021
Accepted:
11 July 2021
Published online:
20 June 2023

Keywords:
classification functor,
dimension group,
Bratteli diagram,
C*-algebra,
Cantor minimal system,
orbit equivalence.

ABSTRACT

Introduction

The category theory gives a common perspective on many notions (such as isomorphism) in different areas of Mathematics, and in some cases enables us to construct bridges between different branches such that tools can be taken from one area to the other. The notion of a functor plays this role. Specifically, if a functor is an equivalence of categories then its domain and codomain categories are essentially the same. However, finding such a functor is very difficult and usually impossible. There are still many functors which are not equivalences of categories but preserve the isomorphism classes, and are suitable for the purpose of classification of certain mathematical objects (such as separable C*-algebras). These were defined by G. A. Elliott in 2010 and are called classification functors. The main property of such functors is that two objects in the domain category are isomorphic if and only if their images are isomorphic in the codomain category. In particular, if the domain is a complicated category and the codomain is concrete, then such a functor is very useful. As an example, the functor K_0 is a classification functor from the category of AF algebras to the category of dimension groups (by the Elliott classification theorem in 1976).

In this paper, we construct various classification functors between the categories of Bratteli diagrams, dimension groups, AF algebras, and Cantor minimal systems. Some other functors were constructed by Amini, Elliott, and the author in two papers published in 2015 and 2021, and were used to solve an open problem in Dynamical Systems about the finiteness of the rank of factors of finite rank Cantor minimal systems. See the author's joint work with M. Hosseini in 2021 for details.

Material and methods

We use the notion of direct limit to construct a functor from the category of Bratteli diagrams to the category of dimension groups. In this way, we obtain an equivalence of categories. Then we use crossed product C*-algebras to obtain a functor from the category of Cantor minimal systems to that of AF algebras. Finally, notions of K_0-groups of Cantor systems and their coboundries are applied to obtain functors into the category of dimension groups.

Results and discussion

We obtain a direct limit functor from the category of Bratteli diagrams to the category of dimension groups, which is an equivalence of categories and hence a classification functor. Suitable notions of morphisms between Cantor minimal systems are defined such that the isomorphism coincide with orbit and strong orbit equivalence. Then two classification functors are obtained from the category of Cantor minimal systems to the category of dimension groups. These classification functors are useful in the study of properties of objects and morphisms of the domain categories using those of the codomain categories.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The categories of Bratteli diagrams and dimension groups are equivalent, and hence there is a classification functor between them. So, these categories are the same from the categorical point of view.
- There is a suitable notion of morphism between Cantor minimal systems such that the resulting isomorphism is the same as orbit equivalence.
- A functorial formulation of a result of Giordano, Putnam, and Skau concerning strong orbit equivalence of Cantor minimal systems is obtained using the idea of classification functors.

How to cite: Golestani, N. (2023). Categorical Relation between Dimension Groups, C*-algebras, and Cantor Minimal Systems. *Mathematical Researches*, 9 (1), 164-188.

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ارتباط رسته‌ای بین گروه‌های بعد، C^*-جبرها و سیستم‌های مینیمال کانتور

ناصر گلستانی[1]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی محض، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران. رایانامه: n.golestani@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۱۸
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۲۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

در این مقاله یک تابعگون حد مستقیم از رستهٔ نمودارهای براتلی به رسته گروه‌های بعد می‌سازیم و نشان می‌دهیم که یک هم‌ارزی رسته‌هاست. مفهوم تابعگون طبقه‌بندی کننده را الیوت در سال ۲۰۱۰ برای طبقه‌بندی C^*-جبرهای جدایی‌پذیر معرفی کرد که تابعگونی از یک رسته (معمولاً پیچیده) به یک رسته دیگر (معمولاً ملموس) است و بررسی یک‌ریختی دو شیء در رستهٔ اول را به بررسی یکریختی تصویرهای آنها در رسته دوم تحویل می‌کند. با استفاده از این مفهوم، چندین تابعگون طبقه‌بندی کننده بین رسته‌های گروه‌های بعد، C^*-جبرها و سیستم‌های مینیمال کانتور می‌سازیم و در نتیجه بیانی رسته‌ای و تعمیمی از قضایای جیوردانو، پاتنم و اسکاو به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی:
تابعگون طبقه‌بندی کننده،
گروه بعد،
نمودار براتلی،
C^*-جبر،
سیستم مینیمال کانتور،
هم‌ارزی مداری.

استناد: گلستانی، ناصر؛ (۱۴۰۲). ارتباط رسته‌ای بین گروه‌های بعد، C^*-جبرها و سیستم‌های مینیمال کانتور. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۱)، ۱۸۸-۱۶۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه و تعاریف اولیه

استفاده از نظریهٔ رسته‌ها در شاخه‌های مختلف ریاضیات از آنجا که یک دیدگاه کلی نسبت به بسیاری از مفاهیم مشترک (مانند یکریختی و حاصل ضرب فضاها) ایجاد می‌کند و اینکه در برخی موارد، پل‌هایی بین شاخه مختلف برقرار می‌کند تا بتوان از ابزارهای یک شاخه برای شاخه دیگر استفاده کرد، بسیار اهمیت دارد. مفهوم تابعگون[1] در واقع نقش این پل‌ها را بازی می‌کند. مطلوب‌ترین حالت وقتی است که یک تابعگون بین دو رسته، هم‌ارزی رسته‌ها[2] باشد که در اینصورت دو رسته به اصطلاح یکی هستند، که البته به ندرت رخ می‌دهد. یک حالت دیگر این است که یک تابعگون، کلاس‌های یکریختی را حفظ کند. این مفهوم که بطور رسمی توسط جورج الیوت در سال ۲۰۱۰ با هدف طبقه‌بندی *C-جبرهای جدایی‌پذیر مطرح شد [۹] به صورت زیر است:

تعریف ۱. یک تابعگون $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ یک *تابعگون طبقه‌بندی کننده*[3] نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو شیء a و b در رسته $\mathbf{C}$، اگر $F(a) \cong F(b)$ در رسته $\mathbf{D}$ آنگاه $a \cong b$ در رسته $\mathbf{C}$. تابعگون F طبقه‌بندی کننده *قوی* نامیده می‌شود هرگاه برای هر یکریختی $g\colon F(a) \to F(b)$ در $\mathbf{D}$ یک یکریختی $f\colon a \to b$ در $\mathbf{C}$ موجود باشد که $F(f) = g$.

توجه کنید که عکس تعریف فوق (با بکارگیری تعریف تابعگون) همواره برقرار است، یعنی اگر $a \cong b$ آن‌گاه $F(a) \cong F(b)$. بنابراین اگر F یک تابعگون طبقه‌بندی کننده باشد آنگاه برای هر دو شیء a و b در رسته $\mathbf{C}$ داریم $a \cong b$ اگر و تنها اگر $F(a) \cong F(b)$. به بیان دیگر، یک تابعگون طبقه‌بندی کننده، بررسی یکریختی دو شیء در رسته دامنه را به بررسی یکریختی تصویر آنها در رسته برد تحویل می‌کند. این ویژگی، به خصوص وقتی که رسته دامنه یک رسته پیچیده و کمتر شناخته شده باشد و رسته برد یک رسته ملموس باشد، کاربرد بیشتری دارد. به عنوان مثال، قضیهٔ طبقه‌بندی الیوت بیان می‌کند که تابعگون K_0 از رسته AF جبرها به رسته گروههای بعد، یک تابعگون طبقه‌بندی کننده قوی است[۸،۲]. همچنین یک تابعگون طبقه‌بندی کننده قوی $\mathcal{B}\colon \mathbf{AF} \to \mathbf{BD}$ از رسته AF جبرها به رسته نمودارهای براتلی وجود دارد [۲]. پیدا کردن تابعگون‌های طبقه‌بندی کننده بین رسته‌های مختلف در شاخه‌های مختلف ریاضیات می‌تواند بسیار مفید باشد زیرا علاوه بر این‌که به بررسی مسئله یکریختی کمک می‌کند، ریختارهای[4] رسته‌ها را نیز در نظر می‌گیرد، زیرا یک تابعگون علاوه بر اینکه روی اشیاء عمل می‌کند، روی ریختارها نیز عمل می‌کند و می‌تواند برای حل مسائلی کاربرد داشته باشد. به عنوان مثال، در مرجع [۱۳] با بکارگیری تابعگون $P\colon \mathbf{SDS} \to \mathbf{OBD}$ که در [۳] ساخته شده است، یک مسئله باز در مورد فاکتورهای

[1] functor
[2] equivalence of categories
[3] classification functor
[4] morphism

سیستم‌های مینیمال کانتور با رتبه متناهی حل شده است که مدتها با استفاده از ابزارهای درونی شاخه دینامیک توپولوژیک حل نشده بود.

در این مقاله، چندین تابعگون طبقه‌بندی کنندهٔ (قوی) می‌سازیم. ابتدا تابعگون حد مستقیم $\mathcal{D}\colon \mathbf{BD} \to \mathbf{DG}$ از رسته نمودارهای براتلی به رسته گروههای بعد را می‌سازیم و نشان می‌دهیم که یک هم‌ارزی رسته هاست و در نتیجه دو رسته $\mathbf{BD}$ و $\mathbf{DG}$ در واقع یکی هستند (هرچند در ظاهر متفاوت به نظر می‌رسند). اینکه این دو رستهٔ هم‌ارز هستند، قبلاً نیز در [۲] به طور غیرمستقیم ثابت شده بود ولی ضابطه صریحی برای تابعگونی که این هم‌ارزی را برقرار می‌کند به دست نیامده بود. در این‌جا یک ضابطه برای این تابعگون به دست می‌آوریم که در مطالعه اشیاء و ریختارهای هر یک از این رسته‌ها به وسیلهٔ رستهٔ دیگر مفید خواهد بود. سپس تابعگون $A\colon \mathbf{DS} \to \mathbf{AF}$ را از رسته سیستم‌های دینامیکی مینیمال کانتور به رسته AF جبرها تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که یک تابعگون پادوردای[5] پر است که وفادار و طبقه‌بندی کننده نمی‌باشد. این تابعگون در واقع یک مثال نقض در این حوزه فراهم می‌کند که نشان می‌دهد برخی خواص شناخته شده نظریه رسته‌ها، به تنهایی خاصیت طبقه‌بندی را نتیجه نمی‌دهند.

در بخش آخر این مقاله نیز، دو تابعگون $K^0\colon \mathbf{DS}^{\mathrm{sorb}} \to \mathbf{DG}_1$ و $K^0_{\mathrm{Inf}}\colon \mathbf{DS}^{\mathrm{orb}} \to \mathbf{DG}_1$ را که به ترتیب مرتبط با هم‌ارزی مداری و هم‌ارزی مداری قوی سیستم‌های دینامیکی مینیمال کانتور هستند، می‌سازیم و ثابت می‌کنیم که هر دو طبقه‌بندی کننده می‌باشند. به این تربیت بیانی رسته‌ای از قضایای مشخص‌سازی هم‌ارزی مداری و هم‌ارزی مداری قوی منسوب به جیوردانو، پاتنم و اسکاو (قضایای ۱۵ و ۲۱) به دست می‌آوریم و به یک معنا آنها را تعمیم می‌دهیم بهطوری‌که علاوه بر حالت یکریختی، ریختارها نیز لحاظ شوند.

به عنوان پیش‌نیاز، تعریف رسته $\mathbf{BD}$ را به اختصار یادآوری می‌کنیم [۲].

تعریف ۲. یک *نمودار براتلی*[6] زوج مرتبی مانند $B = (V, E)$ است که $V = (V_n)_{n=1}^{\infty}$ و $E = (E_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی از ماتریسها هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱- هر V_n یک ماتریس ستونی $k_n \times 1$ با درایه‌های صحیح و مثبت است که $k_n \geq 1$؛

۲- هر E_n یک ماتریس نشاننده از V_n به V_{n+1} است، یعنی یک ماتریس $k_{n+1} \times k_n$ با درایه‌های صحیح و نامنفی است که ستونهای آن ناصفرند و $E_n V_n \leq V_{n+1}$ (با ترتیب مؤلفه‌ای).

[5] contravariant functor
[6] Bratteli diagram

نمودارهای براتلی را براتلی در سال ۱۹۷۲ برای مطالعه و طبقه‌بندی AF جبرها معرفی کرد [5]. به عنوان مثال، برای AF جبر M_{2^∞} که به صورت یک حد مستقیم M_{2^n}ها تعریف می‌شود، نمودار براتلی آن برابر است با $B = (V, E)$ که برای هر n، $V_n = (2^n)$ و $E_n = (2)$ (ماتریس‌های 1×1).

یادآوری می‌کنیم که روش معادل دیگری برای تعریف نمودارهای براتلی بر حسب گراف‌های جهتدار نامتناهی وجود دارد [۱۴،۳] که بیشتر در کاربردهای این نمودارها در مطالعه سیستم‌های دینامیکی مینیمال کانتور استفاده می‌شود. در این‌جا، تعریف فوق که به زبان ماتریس‌ها است با اهداف جبر عملگرها مناسب‌تر است.

مجموعه نمودارهای براتلی را با **BD** نمایش می‌دهیم، که در واقع یک رسته است. در ادامه تعریف مفاهیم پیش‌ریختار[7] و ریختار را از [۳] نقل می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که اگر V و W ماتریسهایی ستونی با درایه‌های صحیح و نامنفی باشند که به ترتیب n و m سطر دارند، منظور از یک *ماتریس چندگانگی* F از V به W یک ماتریس $m \times n$ است که $FV \leq W$.

تعریف ۳. فرض کنید $B = (V, E)$ و $C = (W, S)$ دو نمودار براتلی باشند. یک *پیش‌ریختار* $f: B \to C$ زوج مرتبی مانند $((F_n)_{n=1}^{\infty}, (f_n)_{n=1}^{\infty})$ است که در آن $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از ماتریس‌هاست و $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای بیکران از اعداد طبیعی است که $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ و شرایط زیر برقرارند:

۱- هر F_n یک ماتریس چندگانگی از V_n به W_{f_n} است؛

۲- نمودار f که بصورت زیر می‌باشد جابه‌جایی است، یعنی برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$، $F_{n+1}E_n = S_{f_n, f_{n+1}}F_n$ که در آن $S_{k,l} = S_{l-1}S_l \cdots S_{k+1}S_k$ برای هر دو عدد طبیعی k, l که $k < l$.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "E_1"] \arrow[d, "F_1"'] & V_2 \arrow[r, "E_2"] \arrow[d, "F_2"'] & V_3 \arrow[r, "E_3"] \arrow[d, "F_3"'] & \cdots \\
W_{f_1} \arrow[r, "S_{f_1,f_2}"'] & W_{f_2} \arrow[r, "S_{f_2,f_3}"'] & W_{f_3} \arrow[r, "S_{f_3,f_4}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

اگر $f: B \to C$ و $g: C \to D$ پیش‌ریختار باشند که $f = ((F_n)_{n=1}^{\infty}, (f_n)_{n=1}^{\infty})$ و $g = ((G_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty})$ آن‌گاه ترکیب آنها به صورت $gf = ((H_n)_{n=1}^{\infty}, (h_n)_{n=1}^{\infty})$ تعریف می‌شود که $h_n = g_{f_n}$ و $H_n = G_{f_n}F_n$، برای هر $n \geq 1$. مجموعه **BD** به همراه پیش‌ریختارها یک رسته است ولی با اهداف طبقه‌بندی، مناسب نمی‌باشد (زیرا تابعگون‌های خاصی به توی **BD** خوش‌تعریف نمی‌شوند، مانند $\mathcal{B}: \mathbf{AF} \to \mathbf{BD}$ [2]). مفهوم مناسب ریختار در رسته **BD** با استفاده از یک رابطهٔ هم‌ارزی که روی مجموعه پیش‌ریختارهای از یک نمودار براتلی B به C تعریف می‌شود به دست می‌آید [۳]. مجموعه کلاس‌های

[7] premorphism

هم‌ارزی به شکل $[f]$ که $f: B \to C$ پیش‌ریختار است، ریختارهای از B به C را تشکیل می‌دهند. مجموعه $\mathbf{BD}$ به همراه این ریختارها، *رسته نمودارهای براتلی* نامیده می‌شود.

معادل فارسی اکثر کلمات انگلیسی با استفاده از مرجع [۱] انتخاب شده‌اند مگر کلماتی که در این مرجع یافت نشدند.

تابعگون حد مستقیم

در این بخش تابعگون حد مستقیم $\mathcal{D}: \mathbf{BD} \to \mathbf{DG}$ را از رسته نمودارهای براتلی به رسته گروه‌های بعد (مقیاس‌دار) تعریف می‌کنیم. این‌که به هر نمودار براتلی B می‌توان یک گروه بعد مانند $\mathcal{D}(B)$ نظیر کرد، شناخته شده است [۸،۱۴]. قسمت غیربدیهی در ساختن تابعگون $\mathcal{D}$، تعریف آن روی ریختارهاست به طوری‌که خواص مورد نظر را دارا باشد. قضیهٔ اصلی این بخش بیان می‌کند که $\mathcal{D}$ در واقع یک هم‌ارزی رسته‌ها است، یعنی از دیدگاه نظریه رسته‌ها، رسته‌های $\mathbf{BD}$ و $\mathbf{DG}$ یکی هستند.

ابتدا به بیان تعاریف مورد نیاز در مورد گروههای بعد می‌پردازیم [۷]. این گروه‌ها را الیوت در سال ۱۹۷۶ برای طبقه‌بندی AF جبرها معرفی کرد [۸].

تعریف ۴. زوج مرتب (G, G^+) را یک *گروه مرتب*[۸] گوییم هرگاه G یک گروه آبلی باشد و G^+ یک مخروط (مثبت) برای آن باشد، یعنی $G^+ + G^+ \subseteq G^+$، $G^+ - G^+ = G$ و $G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$. در اینصورت G^+ یک رابطه ترتیب جزئی $\leq$ روی G القا می‌کند که بصورت $x \leq y$ هر گاه $y - x \in G^+$، تعریف می‌شود. منظور از یک یکه *ترتیبی*[۹] برای (G, G^+) عنصری مانند $u \in G^+$ است که برای هر $g \in G^+$ عدد طبیعی n موجود است که $nu \geq g$. برای هر عدد طبیعی m، مخروط استاندارد گروه جمعی $\mathbb{Z}^m$ بصورت زیر است:

$$(\mathbb{Z}^m)^+ = \{(n_1, \dots, n_m) \mid n_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

همچنین عنصر $(۱,۱,\dots,۱)$ یک یکه ترتیبی برای این گروه است. یک *گروه بعد*[۱۰] یک گروه مرتب شماراست که یکریخت ترتیبی با حد مستقیم دنباله‌ای از گروههای آبلی آزاد متناهیاً تولید شده با مخروطهای استاندارد و همریختی‌های مثبت به عنوان نگاشتهای بین آنهاست [۸]، به عبارت دیگر، G یک گروه بعد است هرگاه یکریخت ترتیبی با گروهی به شکل $\lim_{n\to\infty}(G_n, \varphi_n)$ باشد که هر G_n به صورت مجموع مستقیم تعداد متناهی تا از گروه‌های مرتب $\mathbb{Z}^m$ هاست و نگاشت

[8] ordered group
[9] order unit
[10] dimension group

$\varphi_n: G_n \to G_{n+1}$ یک همریختی گروهی است که $\varphi_n(G_n^+) \subseteq G_{n+1}^+$. یک *مقیاس*[11] برای گروه مرتب (G, G^+) زیرمجموعه‌ای مانند Γ از G^+ است که مولد، موروثی و جهتدار باشد [۶]. در این‌صورت سه‌تایی (G, G^+, Γ) را یک گروه بعد *مقیاس‌دار*[12] می‌گوییم.

به عنوان مثال، برای هر عدد طبیعی m، مجموعه اعداد صحیح از صفر تا m یک مقیاس برای گروه بعد $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+)$ است. از نماد **DG** برای رسته گروههای بعد مقیاس‌دار به همراه همریختی‌های حافظ مقیاس استفاده می‌کنیم.

برای تعریف تابعگون $\mathcal{D}: \mathbf{BD} \to \mathbf{DG}$ ابتدا در تعریف زیر به هر نمودار براتلی یک گروه بعد نظیر می‌کنیم.

تعریف ۵. فرض کنید $B = (V, E)$ یک نمودار براتلی باشد. گروه بعد مقیاس‌دار $\mathcal{D}(B) = (G, G^+, \Gamma)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $V = (V_n)_{n=1}^{\infty}$، $E = (E_n)_{n=1}^{\infty}$ و $V_n^T = (m_{n,1}\ m_{n,2}\ \cdots\ m_{n,k_n})$ شکل سطری ماتریس ستونی V_n باشد. قرار می‌دهیم $G_n = \mathbb{Z}^{k_n}$ و G_n^+ را مخروط استاندارد $\mathbb{Z}^{k_n}$ می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$\Gamma_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_{k_n}) \in G_n \mid 0 \leq a_i \leq m_{n,i}, 1 \leq i \leq k_n\}.$$

سه تایی (G_n, G_n^+, Γ_n) یک گروه بعد مقیاس‌دار است. همریختی $\varphi_n: G_n \to G_{n+1}$ را نگاشت ضرب در E_n تعریف می‌کنیم، یعنی $\varphi_n(x) = E_n x$ که در آن هر عضو x از G_n را به صورت یک ماتریس ستونی در نظر می‌کنیم. نگاشت‌های φ_n را نگاشت‌های ارتباطی[13] می‌نامیم. توجه کنید که برای هر عدد طبیعی n، $\varphi_n(\Gamma_n) \subseteq \Gamma_{n+1}$ زیرا $E_n V_n \leq V_{n+1}$. حال قرار می‌دهیم $\mathcal{D}(B) = \lim_{n\to\infty}(G_n, \varphi_n)$.

حد مستقیم فوق را با جزییات توصیف می‌کنیم زیرا در ادامه به آن نیاز داریم. ابتدا قرار می‌دهیم

$$G_\infty = \{(a_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} G_n \mid \exists m \geq 1, a_{n+1} = \varphi_n(a_n)\ (n \geq m)\}.$$

سپس G_0 را زیرگروه G_∞ متشکل از دنباله‌هایی که از جایی به بعد صفر هستند می‌گیریم و قرار می‌دهیم $G = G_\infty / G_0$. فرض کنید $\pi: G_\infty \to G$ نگاشت خارج قسمتی باشد. قرار می‌دهیم

$$G^+ = \pi(G_\infty \cap \prod_{n=1}^{\infty} G_n^+), \qquad \Gamma = \pi(G_\infty \cap \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma_n).$$

در این‌صورت $\mathcal{D}(B) = (G, G^+, \Gamma)$.

---

[11] scale
[12] scaled dimension group
[13] connecting maps

برای تکمیل تعریف تابعگون $\mathcal{D}\colon \mathbf{BD} \to \mathbf{DG}$، آن را روی ریختارهای رسته $\mathbf{BD}$ نیز تعریف می‌کنیم. فرض کنید B, C نمودارهای براتلی باشند و $h\colon B \to C$ یک ریختار در رسته $\mathbf{BD}$ باشد. ریختار $\mathcal{D}(h)\colon \mathcal{D}(B) \to \mathcal{D}(C)$ در رسته $\mathbf{DG}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $f\colon B \to C$ یک پیش‌ریختار باشد که $h = [f]$. فرض کنید $B = (V, E)$، $C = (W, S)$ و $f = ((F_n)_{n=1}^{\infty}, (f_n)_{n=1}^{\infty})$. گروه‌های بعد مقیاس‌دار $\mathcal{D}(B) = (G, G^+, \Gamma)$ و $\mathcal{D}(C) = (H, H^+, \Lambda)$ به همراه نگاشت‌های ارتباطی $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ را مانند تعریف قبل در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\eta_n\colon G_n \to H_{f_n}$ نگاشت ضرب در F_n باشد. چون نمودار f جابجایی است، برای هر $n \geq 1$،

$$\eta_{n+1} \circ \varphi_n = \psi_{f_n, f_{n+1}} \circ \eta_n,$$

که در آن برای هر دو عدد طبیعی k, n که $n < k$، منظور از $\psi_{n,k}$ همریختی $\psi_{k-1}\psi_{k-2} \cdots \psi_n$ از H_n به H_k است و $\psi_{n,n} = \mathrm{id}_{H_n}$. پس نمودار جابه‌جایی زیر را داریم:

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\eta_1"'] & G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\eta_2"'] & G_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\eta_3"'] & \cdots \\
H_{f_1} \arrow[r, "\psi_{f_1, f_2}"'] & H_{f_2} \arrow[r, "\psi_{f_2, f_3}"'] & H_{f_3} \arrow[r, "\psi_{f_3, f_4}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

همریختی‌های $\eta_n\colon G_n \to H_{f_n}$ یک همریختی طبیعی $\eta\colon G \to H$ القا می‌کند که $\eta(G^+) \subseteq H^+$ و $\eta(\Gamma) \subseteq \Lambda$. به‌طور دقیق‌تر، برای هر $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ در G_∞، عنصر $\eta((a_n)_{n=1}^{\infty} + G_0) = ((b_n)_{n=1}^{\infty} + H_0)$ در H_∞ / H_0 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید عدد طبیعی m چنان باشد که برای هر $n \geq m$ ، $a_{n+1} = \varphi_n(a_n)$. برای هر $n \geq m$ و هر $f_n < k < f_{n+1}$ قرار می‌دهیم

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{f_m - 1} = 0, \qquad b_{f_n} = \eta_n(a_n), \qquad b_k = \varphi_{f_n, k}(b_{f_n}).$$

در این‌صورت η خواص مورد نظر را دارد و وابسته به نماینده f از کلاس h نیز نیست (با استفاده از گزارهٔ ۱۱,۲ مرجع[۲]). قرار می‌دهیم $\mathcal{D}(h) = \eta$ که یک ریختار از $\mathcal{D}(B)$ به $\mathcal{D}(C)$ است.

بررسی این‌که $\mathcal{D}\colon \mathbf{BD} \to \mathbf{DG}$ یک تابعگون است سرراست می‌باشد. برای درک بهتر تعریف این تابعگون روی اشیاء و ریختارها، یک مثال می‌آوریم.

مثال ۶. نمودارهای B و C و پیش‌ریختار $f: B \to C$ را به صورت زیر در نظر بگیرید. فرض کنید $B = (V, E)$ و $C = (W, S)$. برای هر $n \geq 1$ قرار می‌دهیم

$$V_n = (2^{n-1}), \qquad E_n = (2), \qquad W_n = (6^{n-1}), \qquad S_n = (6).$$

پیش‌ریختار $f = ((F_n)_{n=1}^{\infty}, (n)_{n=1}^{\infty})$ نیز به صورت $F_n = (3^{n-1})$ تعریف می‌شود. در این‌صورت به راحتی می‌توان دید $\mathcal{D}(B) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathbb{Z}, \varphi_n)$ که $\varphi_n(x) = 2x$ و $\mathcal{D}(C) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathbb{Z}, \psi_n)$ که $\psi_n(x) = 6x$. پس

$$\mathcal{D}(B) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{k}{2^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}, \qquad \mathcal{D}(C) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{6}] = \{\frac{k}{6^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

به عنوان زیرگروه‌هایی از $(\mathbb{Q}, +)$ و بعلاوه $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]^+ = \mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ و $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]^+ = \mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$. مقیاس‌های $\mathcal{D}(B)$ و $\mathcal{D}(C)$ نیز به ترتیب برابرند با $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cap [۰،۱]$ و $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}] \cap [۰،۱]$. در واقع با در نظر گرفتن همریختی‌های $\theta_n: G_n = \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ و $\delta_n: H_n = \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ که $\theta_n(x) = \frac{x}{2^{n-1}}$ و $\delta_n(x) = \frac{x}{6^{n-1}}$ و استفاده از خاصیت جهانی حد مستقیم، نشاننده‌های $\theta: \lim\limits_{n\to\infty} (G_n, \varphi_n) \to \mathbb{Q}$ و $\delta: \lim\limits_{n\to\infty} (H_n, \psi_n) \to \mathbb{Q}$ با بردهای به ترتیب $G = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ و $H = \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ به دست می‌آیند و خواص فوق براحتی بررسی می‌شوند. برای به دست آوردن همریختی $\mathcal{D}([f]): \mathcal{D}(B) \to \mathcal{D}(C)$ نیز با توجه به این‌که نمودار زیر، برای هر $n \geq 1$، جابه‌جایی است:

$$\begin{tikzcd}
G_n = \mathbb{Z} \arrow[r, "\theta_n"] \arrow[d, "\eta_n"'] & G = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \arrow[d, hook, "j"] \\
H_n = \mathbb{Z} \arrow[r, "\delta_n"'] & H = \mathbb{Z}[\frac{1}{6}].
\end{tikzcd}$$

بنابراین $\mathcal{D}([f]) = j$ نیز نگاشت شمول از $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ به $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ است.

قضیهٔ زیر بیان می‌کند که رسته‌های **BD** و **DG** از دیدگاه نظریه رسته‌ها یکی هستند. قبل از بیان این قضیه، مفاهیمی را از نظریه رسته‌ها یادآوری می‌کنیم [۱۲،۱۶]. دو رسته $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ هم‌ارز نامیده می‌شوند هرگاه یک تابعگون $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ وجود داشته باشد که هم‌ارزی رسته‌هاست، یعنی یک تابعگون دیگر $G: \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ وجود داشته باشد که $FG \cong \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$ و $GF \cong \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$، که نماد $\cong$ در این‌جا به معنی یکریختی طبیعی[۱۴] است. قضیه ۱،۴،۴ مرجع [۱۶] بیان می‌کند که یک تابعگون $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ یک هم‌ارزی رسته‌هاست اگر و تنها اگر یک تابعگون پر، وفادار و اساساً پوشا باشد. یادآوری می‌کنیم که تابعگون $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$

[14] natural isomorphism

پر[۱۵] نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو شیء a,b در $\mathbf{C}$ و هر ریختار $h\colon F(a)\to F(b)$ یک ریختار $f\colon a\to b$ در $\mathbf{C}$ موجود باشد که $F(f)=h$. تابعگون F *وفادار*[۱۶] نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو شیء a,b و هر دو ریختار $f,g\colon a\to b$ در $\mathbf{C}$، اگر $F(f)=F(g)$ آنگاه $f=g$. همچنین تابعگون F *اساساً پوشا*[۱۷] نامیده می‌شود هرگاه برای هر شیء d در $\mathbf{D}$ یک شیء a در $\mathbf{C}$ موجود باشد که $d\cong F(a)$.

قضیهٔ ۷. تابعگون $\mathcal{D}\colon \mathbf{BD}\to\mathbf{DG}$ یک هم‌ارزی رسته‌ها است.

برهان. روند اثبات به این‌صورت است که نشان می‌دهیم $\mathcal{D}$ پر، وفادار و اساساً پوشاست. ابتدا نشان می‌دهیم $\mathcal{D}$ وفادار است. فرض کنید B,C دو نمودار براتلی باشند و $h,k\colon B\to C$ دو ریختار باشند که $\mathcal{D}(h)=\mathcal{D}(h')$. فرض کنید $f=((F_n)_{n=1}^{\infty},(f_n)_{n=1}^{\infty})$ و $g=((K_n)_{n=1}^{\infty},(g_n)_{n=1}^{\infty})$ پیش‌ریختارهایی از B به C باشند که $h=[f]$ و $h'=[g]$. نشان می‌دهیم f و g هم‌ارزند (و در نتیجه $h=h'$). برای اثبات این هم‌ارزی، تعریف ۹٫۲ مرجع [۲] را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید $B=(V,E)$ و $C=(W,S)$. گروه‌های بعد مقیاس‌دار $\mathcal{D}(B)=(G,G^+,\Gamma)$ و $\mathcal{D}(C)=(H,H^+,\Lambda)$ به همراه نگاشت‌های ارتباطی $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ را مانند تعریف ۵ در نظر می‌گیریم. عدد طبیعی n را ثابت در نظر می‌گیریم و m را طوری می‌گیریم که $G_n=\mathbb{Z}^m$. بعلاوه $\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ را پایه استاندارد G_n (به عنوان $\mathbb{Z}$–مدول) در نظر می‌گیریم. حال $x_1,x_2,\dots,x_m$ در G_∞ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. می‌نویسیم $x_i=(x_{i,k})_{k=1}^{\infty}$ که در آن

$$x_{i,1}=x_{i,2}=\cdots=x_{i,(n-1)}=0,\qquad x_{i,n}=e_i,\qquad x_{i,k}=\varphi_{n,k}(e_i)\ (k>n).$$

توجه کنید که منظور از $\varphi_{n,k}$ در رابطهٔ بالا، همریختی $\varphi_{n,k}=\varphi_{k-1}\varphi_{k-2}\cdots\varphi_n$ از G_n به G_k است. فرض کنید $\eta_n\colon G_n\to H_{f_n}$ و $\theta_n\colon G_n\to H_{g_n}$ نگاشت‌های به دست آمده از به کارگیری تعریف ۵ برای f و g باشند. از آنجا که برای هر $1\le i\le m$، $\mathcal{D}(h)(x_i+G_0)=\mathcal{D}(k)(x_i+G_0)$، نتیجه می‌گیریم که عدد طبیعی $l\ge f_n,g_n$ موجود است به طوری‌که $\psi_{f_n,l}\circ\eta_n(e_i)=\psi_{g_n,l}\circ\theta_n(e_i)$. پس $\psi_{f_n,l}\circ\eta_n=\psi_{g_n,l}\circ\theta_n$ و در نتیجه $S_{f_nl}F_n=S_{g_nl}K_n$. حال با استفاده از گزاره ۱۱٫۲ مرجع [۲] نتیجه می‌گیریم که f و g هم‌ارزند. بنابراین $\mathcal{D}$ وفادار است.

حال نشان می‌دهیم $\mathcal{D}$ یک تابعگون پر است. فرض کنید و $\varphi\colon\mathcal{D}(B)\to\mathcal{D}(C)$ ریختاری در رسته $\mathbf{DG}$ باشد. باید یک ریختار $h\colon B\to C$ در رسته $\mathbf{BD}$ پیدا کنیم که $\mathcal{D}\,(h)=\varphi$. نمادگذاری بند قبل را در این‌جا نیز استفاده می‌کنیم. فرض کنید برای هر n، $\varphi^n\colon G_n\to G$ و $\psi^n\colon H_n\to H$ همریختی‌های کانونیک باشند که در ساختن حد مستقیم در تعریف ۵ به

[15] full
[16] faithful
[17] essentially surjective

دست می‌آیند. بنابراین $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^n(\Gamma_n)$ و $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi^n(\Lambda_n)$. چون هر G_n یک گروه با تولید متناهی است، یک دنباله صعودی اکید $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ از اعداد طبیعی وجود دارد که برای هر n، $\varphi(\varphi^n(\Gamma_n)) \subseteq \psi^{f_n}(\Lambda_{f_n})$. پس همریختی (نه لزوماً یکتای) $\theta_n: G_n \to H_{f_n}$ وجود دارد که حافظ مقیاس و ترتیب است و $\varphi\varphi^n = \psi^{f_n}\theta_n$. نمودار (نه لزوماً جابجایی) زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{tikzcd}
G_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\theta_n"'] & G_{n+1} \arrow[r, "\varphi^{n+1}"] \arrow[d, "\theta_{n+1}"] & G \arrow[d, "\varphi"] \\
H_{f_n} \arrow[r, "\psi_{f_n,f_{n+1}}"'] & H_{f_{n+1}} \arrow[r, "\psi^{f_{n+1}}"'] & H\,.
\end{tikzcd}
$$

مربع سمت راست جابجایی است. همچنین اگر θ_{n+1} را حذف کنیم، مستطیل باقیمانده نیز جابه‌جایی است. بنابراین $\psi^{f_{n+1}}\theta_{n+1}\varphi_n = \psi^{f_{n+1}}\psi_{f_n,f_{n+1}}\theta_n$. از آنجا که G_n یک گروه با تولید متناهی است، عدد $m_n \geq f_{n+1}$ موجود است که

$$\psi_{f_{n+1},m_n}\theta_{n+1}\varphi_n = \psi_{f_{n+1},m_n}\psi_{f_n,f_{n+1}}\theta_n = \psi_{f_n,m_n}\theta_n$$

به عنوان نگاشت‌هایی از G_n به H_{f_n}. این نشان می‌دهد که می‌توان دنباله $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ را با دنبالهٔ دیگری (که با همان $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ نمایش می‌دهیم) جایگزین کرد بطوریکه مربع سمت چپ در نمودار بالا، برای هر n جابجایی باشد. پس دنباله صعودی اکید $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ از اعداد طبیعی و همریختی‌های حافظ ترتیب و مقیاس $\eta_n: G_n \to H_{f_n}$، $n \geq 1$، را بدست می‌آوریم به طوری‌که $\varphi\varphi^n = \psi^{f_n}\eta_n$ و $\eta_{n+1}\varphi_n = \psi_{f_n,f_{n+1}}\eta_n$. برای هر $n \geq 1$، ماتریس یکتای F_n با درایه‌های صحیح و نامنفی وجود دارد که ضابطهٔ η_n همان نگاشت ضرب در F_n است. قرار می‌دهیم $f = ((F_n)_{n=1}^{\infty}, (f_n)_{n=1}^{\infty})$. در این‌صورت براحتی می‌توان دید که f یک پیش‌ریختار است و $\mathcal{D}([f]) = \varphi$. بنابراین $\mathcal{D}$ یک تابعگون پر است.

تنها چیزی که باقیمانده است، بررسی اساساً پوشا بودن $\mathcal{D}$ است. بنا بر قضیه افراس-هندلمن-شن (قضیهٔ ۲٫۲ مرجع [۷])، هر گروه بعد مقیاس‌دار G را می‌توان یکریخت ترتیبی با حد مستقیمی از گروه‌های آبلی آزاد متناهیاً تولید شده در نظر گرفت و هر یک از گروه‌های اخیر را نیز می‌توان با استفاده از یک نمودار براتلی مناسب B، یکریخت با $\mathcal{D}(B)$ در نظر گرفت. بنابراین $\mathcal{D}(B) \cong G$. بنابراین تابعگون $\mathcal{D}$ اساساً پوشاست. حال بنابر مطالب بیان شده در بند قبل از این قضیه، $\mathcal{D}$ یک هم‌ارزی رسته‌هاست. ■

نتیجهٔ ۸. تابعگون $\mathcal{D}\colon \mathbf{BD} \to \mathbf{DG}$ یک تابعگون طبقه‌بندی کننده قوی است.

برهان. بنا بر قضیهٔ ۶ (یا برهان آن)، $\mathcal{D}$ یک تابعگون پر و وفادار می‌باشد. از طرفی، هر تابعگون پر و وفادار یک تابعگون طبقه‌بندی کنندهٔ قوی است (بنابر لم ۱۰.۵ مرجع [۲]). بنابراین حکم نتیجه می‌شود. ∎

تابعگون $A\colon \mathbf{DS} \to \mathbf{AF}$

در این بخش تابعگون $A\colon \mathbf{DS} \to \mathbf{AF}$ از رسته سیستم‌های دینامیکی مینیمال کانتور به رستهٔ AF جبرها را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که یک تابعگون پادوردای پر است که وفادار و طبقه‌بندی کننده نمی‌باشد. این قضیه دارای دو نتیجه است. اول این‌که، صرفِ پر بودن یک تابعگون، خواص دیگر رسته‌ای آن را (مانند وفادار و طبقه‌بندی کننده بودن) نتیجه نمی‌دهد. دوم این_که، مفهوم یکریختی در رسته **DS** که در واقع همان تزویج[18] است، یک مفهوم خیلی قوی است که منجر به وفادار نبودن و طبقه‌بندی کننده نبودن تابعگون A شده است. مفاهیم ضعیف‌تر از تزویج (مانند هم‌ارزی مداری) را در بخش بعد بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۹. رستهٔ **DS** متشکل از سه تایی‌های (X,φ,x) است که (X,φ) یک سیستم مینیمال کانتور است (یعنی X یک فضای متریک همسانریخت با مجموعه کانتور و $\varphi\colon X \to X$ یک همسانریختی است) و x نیز عنصری از X است. یک ریختار در رستهٔ **DS** از یک شیء (X,φ,x) به (Y,ψ,y) یک نگاشت پیوسته $\alpha\colon X \to Y$ است که $\alpha\varphi = \psi\alpha$ و $\alpha(x) = y$.

در مرجع [۱۴] مفهوم تزویج توپولوژیکی نقطه‌وار[19] تعریف شده است که معادل یکریختی دو شیء در رسته **DS** است. یکی از دلایل اهمیت این سیستم‌ها این است که می‌توان به هریک از آنها یک نمودار براتلی مرتب نظیر کرد [۱۴] و خواص دینامیکی را روی این نمودار مشاهده و بررسی کرد.

به هر سیستم دینامیکی مینیمال کانتور (X,φ) می‌توان یک C*-جبر حاصلضرب صلیبی[20] $C(X) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ نظیر کرد (مراجع [۱۷،۱۹] را ببینید). در واقع، همسانریختی $\varphi\colon X \to X$، خودریختی $C(X) \to C(X)$ را که f را به $f \circ \varphi^{-1}$ تصویر می‌کند، القا می‌کند و در نتیجه گروه $\mathbb{Z}$ روی $C(X)$ عمل می‌کند و حاصلضرب صلیبی بدست می‌آید. اگر (Y,ψ) یک سیستم دینامیکی مینیمال کانتور دیگر باشد، هر نگاشت پیوسته $\alpha\colon X \to Y$ که $\alpha\varphi = \psi\alpha$ نیز بطور طبیعی یک *-همریختی یکدار از $C(Y) \rtimes_\psi \mathbb{Z}$ به $C(X) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ القا می‌کند که تحدید آن به $C(Y)$ با ضابطهٔ $g \mapsto g \circ \alpha$ عمل می‌کند. بنابراین

[18] conjugacy
[19] pointed topological conjugacy
[20] crossed product C*-algebra

نگاشتی که هر (X,φ) را به $C(X) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ می‌برد یک تابعگون پادوردا از رستهٔ سیستم‌های مینیمال کانتور به رسته C*-جبرها می‌باشد. (این تابعگون را در حالت کلی‌تر که سیستم‌ها لزوماً مینیمال کانتور هم نیستند می‌توان تعریف کرد ولی در این‌جا به آن نیازی نداریم.)

در ادامه، تابعگون A را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۰. فرض کنید (X,φ,x) یک شیء در رسته **DS** باشد. در اینصورت C*-زیرجبر تولید شده توسط زیرمجموعه‌های $C(X)$ و $u\cdot C_0(X\setminus\{x\})$ از حاصلضرب صلیبی $C(X)\rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ را (که u عنصر یکانی متناظر با همسانریختی φ در حاصلضرب صلیبی است و $C_0(X\setminus\{x\})$ نیز توابعی در $C(X)$ هستند که در x صفر می‌شوند) با $A(X,\varphi,x)$ نشان می‌دهیم. بنا بر قضیهٔ ۳٫۳ مرجع [18]، $A(X,\varphi,x)$ یک AF جبر است. برای هر ریختار $\alpha:(X,\varphi,x)\to(Y,\psi,y)$ در **DS** نیز $A(\alpha)$ را تحدید ⁎-همریختی القا شده توسط α (از $C(Y)\rtimes_\psi \mathbb{Z}$ به $C(X)\rtimes_\varphi \mathbb{Z}$) به $A(Y,\psi,y)$ می‌گیریم. رسته AF جبرها به همراه ⁎-همریختی‌ها را با **AF** نشان می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۱. تابعگون $A:\mathbf{DS}\to\mathbf{AF}$ یک تابعگون پادوردای وفادار است که نه پر و نه طبقه‌بندی کننده می‌باشد.

برهان. ابتدا خوش‌تعریفی تابعگون A را بررسی می‌کنیم، یعنی اگر $\mathcal{X}_1=(X,\varphi,x)$ و $\mathcal{X}_2=(Y,\psi,y)$ عناصری از **DS** باشند و $\alpha:\mathcal{X}_1\to\mathcal{X}_2$ یک ریختار باشد آن‌گاه ⁎-همریختی القا شده توسط α، زیرجبر $A(\mathcal{X}_2)$ را به $A(\mathcal{X}_1)$ می‌برد (و در نتیجه می‌توان آن را تحدید کرد). در واقع، چون $C(Y)$ به توی $C(X)$ تصویر می‌شود و u_2 (عنصر یکانی متناظر با ψ در $C(Y)\rtimes_\psi \mathbb{Z}$) نیز به u_1 تصویر می‌شود، کافیست بررسی کنیم که $C_0(Y\setminus\{y\})$ نیز به توی $C_0(X\setminus\{x\})$ تصویر می‌شود. برای هر $f\in C_0(Y\setminus\{y\})$ داریم

$$A(\alpha)(f)(x)=(f\circ\alpha)(x)=f(\alpha(x))=f(y)=0.$$

پس تصویر f در $C_0(X\setminus\{x\})$ است و در نتیجه $A:\mathbf{DS}\to\mathbf{AF}$ خوش‌تعریف است.

حال نشان می‌دهیم A وفادار است. فرض کنید $\alpha,\beta:\mathcal{X}_1\to\mathcal{X}_2$ ریختارهایی در **DS** باشند که $A(\alpha)=A(\beta)$. پس تحدیدهای ⁎-همریختی‌های یکدار $A(\beta)$ و $A(\alpha)$ از $C(Y)$ به $C(X)$ برابرند. حال با استفاده از این نکته که این همریختی‌ها، دو تابع پیوسته از فضای کاراکترهای $C(X)$ (که با X همسانریخت است) به فضای کاراکترهای $C(Y)$ (که با Y همسانریخت است) القا می‌کنند که همان α و β هستند (قضیهٔ ۱٫۲ مرجع [۴] و توضیحات قبل از آن را ببینید). در نتیجه $\alpha=\beta$ و A وفادار است.

برای این‌که نشان دهیم A یک تابعگون طبقه‌بندی نیست، فرض کنید (X,φ) و (Y,ψ) دو سیستم مینیمال کانتور باشند که هم‌ارز مداری قوی هستند (برای تعریف، مطالب قبل از قضیهٔ ۲۱ را ببینید) ولی مزدوج نیستند. بنا بر [۱۰] چنین سیستم‌هایی وجود دارند. عناصر $x\in X$ و $y\in Y$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. بنابر قضیه ۲۱، AF جبرهای $A(X,\varphi,x)$ و $A(Y,\psi,y)$ یکریخت هستند. پس این دو AF جبر در رسته **AF** یکریختند ولی سیستم‌های (X,φ,x) و (Y,ψ,y) در رسته **DS** یکریخت نیستند، زیرا یکریختی در این رسته، مزدوج بودن سیستم‌های (X,φ) و (Y,ψ) را نتیجه می‌دهد. بنابراین A طبقه‌بندی کننده نیست.

بنابر لم ۱۰٫۵ مرجع [۲]، هر تابعگون وفادار و پر، یک تابعگون طبقه‌بندی کننده قوی است. از آن‌جا که A وفادار **است** ولی طبقه‌کننده نیست، نتیجه می‌گیریم که A پر نمی‌باشد. ■

هم ارزی مداری

در این بخش یک بیان رسته‌ای از قضایای مشخص‌سازی هم‌ارزی مداری و هم‌ارزی مداری قوی منسوب به جیوردانو، پاتنم و اسکاو (قضایای ۱۵ و ۲۱) به دست می‌آوریم و آنها را تعمیم می‌دهیم به طوری‌که علاوه بر حالت یکریختی، ریختارها نیز لحاظ شوند (قضیه‌های ۲۰ و ۲۴).

ابتدا گروه‌های بعدی که به سیستم‌های مینیمال کانتور نظیر می‌شوند یادآوری می‌کنیم. برای هر سیستم مینیمال کانتور (X,φ) گروه جمعی توابع پیوسته از X به $\mathbb{Z}$ را با $C(X,\mathbb{Z})$ نمایش می‌دهیم که یک گروه مرتب است با مخروط

$$C(X,\mathbb{Z})^+=\{f\in C(X,\mathbb{Z})\mid f\geq 0\}.$$

تابع ثابت ۱ را با نماد ۱ نشان می‌دهیم که در واقع یک یکه ترتیبی برای $C(X,\mathbb{Z})$ است. همسانریختی φ یک خودریختی φ_* روی $C(X,\mathbb{Z})$ القا می‌کند که هر تابع f را به $f\circ\varphi^{-1}$ می‌برد. نگاشت $\mathrm{id}-\varphi_*$ نیز یک همریختی روی $C(X,\mathbb{Z})$ است. برد این همریختی را با B_φ نمایش می‌دهیم که دوگان-مرز[۲۱] φ نامیده می‌شود. بنابراین

$$B_\varphi=\{f-f\circ\varphi^{-1}\mid f\in C(X,\mathbb{Z})\}.$$

گروه خارج قسمتی زیر را در نظر بگیرید

$$K^0(X,\varphi)=\frac{C(X,\mathbb{Z})}{B_\varphi}.$$

[21] coboundry

اگر $K^0(X,\varphi)^+$ را تصویر $C(X,\mathbb{Z})^+$ تحت نگاشت خارج قسمتی $C(X,\mathbb{Z}) \to K^0(X,\varphi)$ بگیریم، آن‌گاه زوج مرتب $(K^0(X,\varphi), K^0(X,\varphi)^+)$ یک گروه بعد است و تصویر تابع ثابت ۱ تحت نگاشت خارج قسمتی (که با همان ۱ نمایش داده می‌شود) یک یکه ترتیبی برای آن است [۱۴].

نمادگذاری. از نماد $\mathbf{DG_1}$ برای رسته سه تایی‌های (G,G^+,u) استفاده می‌کنیم که (G,G^+) یک گروه بعد است و u یک یکه ترتیبی برای آن می‌باشد. ریختارهای این رسته، همریختی‌های گروهی هستند که مخروط و یکه ترتیبی را حفظ می‌کنند.

تعریف ۱۲. یک گروه بعد (G,G^+) را *ساده* گوییم هرگاه هیچ ایده‌آل غیربدیهی نداشته باشد که در این‌جا منظور از یک ایده‌آل J از G زیرگروهی از G است بطوریکه $J = J^+ - J^+$ (که در آن $J^+ = J \cap G^+$) و برای هر $a \in G$ و هر $b \in J$، اگر $0 \le a \le b$ آنگاه $a \in J$. اگر G یک گروه ساده باشد و u یک یکه ترتیبی باشد، عنصر $a \in G$ را *بینهایت کوچک*[22] گوییم هرگاه برای هر عدد گویای مثبت ε، داشته باشیم $-\varepsilon u \le a \le \varepsilon u$ که در این‌جا اگر $\varepsilon = p/q$ آن‌گاه منظور از نامساوی $a \le \varepsilon u$ رابطه $qa \le pu$ است. مجموعه همه عناصر بینهایت کوچک را با $\mathrm{Inf}(G)$ نشان می‌دهیم که زیرگروهی از G است و مستقل از انتخاب عنصر یکه ترتیبی u می‌باشد [۶].

مثال ۱۳. اگر (X,φ) یک سیستم مینیمال کانتور باشد آنگاه $(K^0(X,\varphi), K^0(X,\varphi)^+)$ یک گروه بعد ساده و نامتناهی است که دوری نمی‌باشد و به علاوه هر گروه بعد ساده غیر دوری نیز با یک $(K^0(X,\varphi), K^0(X,\varphi)^+)$ یکریخت است (مراجع [۱۰،۱۴،۱۸] را ببینید). همچنین بنابر قضیهٔ ۱۳٫۱ مرجع [۱۰]، زیرگروه بینهایت کوچک $K^0(X,\varphi)$ برابر است با $\mathrm{Inf}(K^0(X,\varphi)) = Z_\varphi/B_\varphi$ که در آن

$$Z_\varphi = \{f \in C(X,\mathbb{Z}) \mid \forall \mu \in P_\varphi(X) \int_X f d\mu = 0\}.$$

تعریف ۱۴. سیستم‌های مینیمال کانتور (X,φ) و (Y,ψ) را *هم‌ارز مداری*[23] گویند هرگاه یک همسانریختی $\alpha: X \to Y$ وجود داشته باشد که مدارها را حفظ کند، یعنی $\alpha(\mathrm{orbit}_\varphi(x)) = \mathrm{orbit}_\psi \alpha(x)$، برای هر $x \in X$، که در آن مدار x تحت φ برابر است با

$$\mathrm{orbit}_\varphi(x) = \{\varphi^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

توجه کنید که تزویج، هم‌ارزی مداری را نتیجه می‌دهد.

قضیه مهم زیر، ترکیب قضیهٔ ۲٫۲ مرجع [۱۰] و قضیهٔ ۲٫۴ مرجع [۱۵] است.

[22] infinitesimal
[23] orbit equivalent

قضیهٔ ۱۵. فرض کنید (X,φ) و (Y,ψ) دو سیستم مینیمال کانتور باشند. گزاره‌های زیر معادلند:

۱- سیستم‌های (X,φ) و (Y,ψ) هم‌ارز مداری هستند؛

۲- گروه‌های بعد $K^0(X,\varphi)/\mathrm{Inf}(K^0(X,\varphi))$ و $K^0(Y,\psi)/\mathrm{Inf}(K^0(Y,\psi))$ یکریخت ترتیبی‌اند با نگاشتی که یکه ترتیبی را حفظ می‌کند؛

۳- یک همسانریختی $\alpha: X \to Y$ وجود دارد که اندازه‌های بورل احتمال φ–پایا را به اندازه‌های بورل احتمال ψ–پایا می‌برد؛

۴- C*- جبرهای $C(X) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ و $C(Y) \rtimes_\psi \mathbb{Z}$ هم‌ارز اثری[24] هستند.

برای به دست آوردن یک بیان رسته‌ای از قضیهٔ فوق، ابتدا تعریف زیر را ارائه می‌دهیم. برای هر سیستم مینیمال کانتور (X,φ)، مجموعهٔ $P_\varphi(X)$ متشکل از همه اندازه‌های بورل احتمال φ–پایا μ روی X است، یعنی $\mu(E) = \mu(\varphi(E))$، برای هر زیرمجموعه بورل E از X.

تعریف ۱۶. رسته $\mathbf{DS}^{\mathrm{orb}}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم. اشیاء این رسته، سیستم‌های مینیمال کانتور هستند. یک ریختار $\alpha: (X,\varphi) \to (Y,\psi)$ در رسته $\mathbf{DS}^{\mathrm{orb}}$، یک نگاشت پیوسته $\alpha: X \to Y$ است که $P_\varphi(X)\alpha^{-1} \subseteq P_\psi(Y)$، یعنی α اندازه‌های بورل احتمال φ–پایا را به اندازه‌های بورل احتمال ψ–پایا می‌برد. ترکیب دو ریختار نیز به صورت ترکیب توابع تعریف می‌شود. تابعگون پادوردای $K^0_{\mathrm{Inf}}: \mathbf{DS}^{\mathrm{orb}} \to \mathbf{DG}_1$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر سیستم مینیمال کانتور (X,φ) قرار می‌دهیم

$$K^0_{\mathrm{Inf}}(X,\varphi) = K^0(X,\varphi)/\mathrm{Inf}(K^0(X,\varphi))$$

که یک گروه بعد ساده است. با استفاده از مثال ۱۳، این گروه با $C(X,\mathbb{Z})/Z_\varphi$ بطور طبیعی یکریخت است و بنابراین بعضی جاها آنها را یکی در نظر می‌گیریم. گروه بعد $K^0_{\mathrm{Inf}}(X,\varphi)$ به همراه مخروط آن و یکه ترتیبی ۱ که به ترتیب تصویر $C(X,\mathbb{Z})^+$ و تابع ثابت ۱ تجت نگاشت خارج قسمتی $C(X,\mathbb{Z}) \to C(X,\mathbb{Z})/Z_\varphi$ هستند، یک شیء در رسته $\mathbf{DG}_1$ است. اثر K^0_{Inf} روی ریختارها نیز به طور طبیعی تعریف می‌شود، یعنی اگر $\alpha: (X,\varphi) \to (Y,\psi)$ یک ریختار در $\mathbf{DS}^{\mathrm{orb}}$ باشد آن‌گاه $K^0_{\mathrm{Inf}}(\alpha): K^0_{\mathrm{Inf}}(Y,\psi) \to K^0_{\mathrm{Inf}}(X,\varphi)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$K^0_{\mathrm{Inf}}(\alpha)(f + Z_\psi) = f \circ \alpha + Z_\varphi, f \in C(Y,\mathbb{Z}).$$

[24] tracially equivalent

تعریف فوق خوش‌تعریف است زیرا اگر $f \in Z_\psi$ آن‌گاه برای هر $\mu \in P_\varphi(X)$، چون $\mu\alpha^{-1} \in P_\psi(Y)$ داریم

$$\int_X f \circ \alpha \, d\mu = \int_Y f \, d(\mu\alpha^{-1}) = 0.$$

پس $f \circ \alpha \in Z_\varphi$. بنابراین $K^0_{\mathrm{Inf}}: \mathbf{DS}^{\mathrm{orb}} \to \mathbf{DG}_1$ یک تابعگون پادوردا است.

توجه کنید که بنابر قضیهٔ ۱۵، دو سیستم مینیمال کانتور (X,φ) و (Y,ψ) در رستهٔ $\mathbf{DS}^{\mathrm{orb}}$ یک‌ریختند اگر و تنها اگر هم‌ارز مداری باشند.

در ادامه به تعریف زیر که از [۱۱] نقل می‌شود نیاز داریم.

تعریف ۱۷. فرض کنید (X,φ) یک سیستم مینیمال کانتور باشد. *گروه پر*[۲۵] این سیستم که با $\mathrm{FG}(X,\varphi)$ نشان داده می‌شود، مجموعه همه همسانریختی‌های $T: X \to X$ است که یک تابع $n: X \to \mathbb{Z}$ با خاصیت $T(x) = \varphi^{n(x)}(x)$، $x \in X$، موجود است. از مینیمال بودن (X,φ) نتیجه می‌شود که تابع $n: X \to \mathbb{Z}$ با این خاصیت منحصر بفرد است. این تابع را تابع *تغییر زمان*[۲۶] می‌نامند.

گزاره ۱۸. فرض کنید (X,φ) و (Y,ψ) دو سیستم مینیمال کانتور باشند و $\alpha: X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

۱- نگاشت α اندازه‌های بورل احتمال φ–پایا را به اندازه‌های بورل احتمال ψ–پایا می‌برد؛

۲- برای هر $x \in X$، $\alpha(\mathrm{orbit}_\varphi(x)) \supseteq \mathrm{orbit}_\psi \alpha(x)$.

۳- عنصر $T \in \mathrm{FG}(X,\varphi)$ موجود است که $\psi \circ \alpha = \alpha \circ T$.

در این‌صورت گزاره (۳)، گزاره‌های (۱) و (۲) را نتیجه می‌دهد.

برهان. فرض کنید (۳) برقرار باشد. ابتدا (۲) را ثابت می‌کنیم. برای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم $\alpha \circ T^k = \psi^k \circ \alpha$. فرض کنید $x \in X$. هر عنصر $\mathrm{orbit}_\psi \alpha(x)$ به شکل $\psi^k(\alpha(x))$، برای یک $k \in \mathbb{Z}$، است. چون $\psi^k(\alpha(x)) = \alpha(T^k(x))$ و $T^k(x) \in \mathrm{orbit}_\varphi(x)$، پس $\psi^k(\alpha(x)) \in \alpha(\mathrm{orbit}_\varphi(x))$.

[25] full group
[26] time change

حال (۱) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $n: X \to \mathbb{Z}$ تابع تغییر زمان برای T باشد. برای هر $k \in \mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم

$$A_k = \{x \in X \mid n(x) = k\}.$$

در این‌صورت A_k یک زیرمجموعهٔ بسته از X است (چون T^k پیوسته است) و $X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^k(A_k)$ که این اجتماع‌ها مجزا هستند، یعنی A_kها دو به دو مجزایند و $\varphi^k(A_k)$ها نیز دو به دو مجزایند. حال فرض کنید $\nu \in P_\varphi(X)$. اندازهٔ بورل μ روی Y را بصورت $\mu = \nu\alpha^{-1}$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم $\mu \in P_\psi(Y)$. فرض کنید E یک زیرمجموعه بورل از Y باشد. برای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم $\alpha^{-1}(\psi^{-1}(E)) \cap A_k = \varphi^{-k}(\alpha^{-1}(E)) \cap A_k$. بنابراین

$$\begin{aligned}\mu(\psi^{-1}(E)) &= \nu(\alpha^{-1}(\psi^{-1}(E)))\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu(\alpha^{-1}(\psi^{-1}(E)) \cap A_k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu(\varphi^{-k}(\alpha^{-1}(E)) \cap A_k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu(\alpha^{-1}(E) \cap \varphi^k(A_k))\\ &= \nu(\psi^{-1}(E)) = \mu(E).\end{aligned}$$

پس μ یک اندازه احتمال ψ–پایاست و در نتیجه (۱) برقرار است. ■

توجه کنید که شرط (۲) در گزاره فوق نتیجه می‌دهد که α پوشاست (با استفاده از این نکته که مینیمال بودن معادل چگال بودن مدارهاست). ممکن است هر سه شرط در گزاره فوق معادل باشند ولی در اینجا تنها می‌توانیم نتیجه شدن (۱) از (۲) را با فرض یک به یک بودن α روی مدارها ثابت کنیم. لم زیر را ببینید.

لم ۱۹. فرض کنید (X, φ) و (Y, ψ) دو سیستم مینیمال کانتور باشند و $\alpha: X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد به طوری‌که برای هر $x \in X$، $\mathrm{orbit}_\psi \alpha(x) \supseteq \alpha(\mathrm{orbit}_\varphi(x))$. برای $k \in \mathbb{Z}$ هر قرار می‌دهیم

$$A_k = \{x \in X \mid \psi \circ \alpha(x) = \alpha \circ \varphi^k(x)\},$$

$$B_k = \{x \in X \mid \psi^{-1} \circ \alpha(x) = \alpha \circ \varphi^k(x)\}.$$

فرض کنید A_kها دوبدو مجزا باشند و B_kها نیز دو به دو مجزا باشند. در اینصورت $P_\varphi(X)\alpha^{-1} \subseteq P_\psi(Y)$. به خصوص اگر $\alpha: X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد که روی هر مدار یک به یک است (یعنی برای هر $x \in X$ و هر $k, m \in \mathbb{Z}$، اگر $\alpha(\varphi^k(x)) = \alpha(\varphi^m(x))$ آنگاه $\varphi^k(x) = \varphi^m(x)$) آن‌گاه در گزاره قبل، شرط (۲) شرط (۱) را نتیجه می‌دهد.

برهان. ابتدا می‌توان به راحتی بررسی کرد که $B_k = \varphi^{-k}(A_{-k})$، $k \in \mathbb{Z}$. از طرف دیگر، چون برای هر $x \in X$، $\alpha(\mathrm{orbit}_\varphi(x)) \supseteq \mathrm{orbit}_\psi \alpha(x)$، بنابراین $X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k$. پس $X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^k(A_k)$ که این اجتماع‌ها مجزا هستند. حال با استدلالی مشابه استدلال ارائه شده در برهان گزاره قبل، نتیجه می‌گیریم $P_\varphi(X)\alpha^{-1} \subseteq P_\psi(Y)$. برای قسمت دوم این لم، توجه کنید که یک به یک بودن α روی هر مدار نتیجه می‌دهد که A_kها دو به دو مجزاند و B_kها نیز دو به دو مجزا هستند. بنابراین، قسمت دوم از قسمت اول نتیجه می‌شود. ■

قضیهٔ ۲۰. تابعگون $K^0_{\mathrm{Inf}}: \mathbf{DS}^{\mathrm{orb}} \to \mathbf{DG_1}$ یک تابعگون طبقه‌بندی کننده و پر است. به علاوه، این تابعگون وفادار نمی‌باشد.

برهان. طبقه‌بندی کننده بودن K^0_{Inf} از معادل بودن موارد (۱) و (۲) در قضیهٔ ۱۵ و این نکته که دو سیستم مینیمال کانتور در رسته $\mathbf{DS}^{\mathrm{orb}}$ یکریخت هستند اگر و تنها اگر هم‌ارز مداری باشند، نتیجه می‌شود. حال نشان می‌دهیم K^0_{Inf} پر است. فرض کنید (X, φ) و (Y, ψ) دو سیستم مینیمال کانتور باشند و $h: K^0_{\mathrm{Inf}}(Y, \psi) \to K^0_{\mathrm{Inf}}(X, \varphi)$ ریختاری در رسته $\mathbf{DG_1}$ باشد. بنابر گزارهٔ ۹،۲ مرجع [۱۱]، یک تابع پیوسته $\alpha: X \to Y$ و یک عنصر $T \in \mathrm{FG}(X, \varphi)$ وجود دارند که $\alpha \circ T = \psi \circ \alpha$ و اینکه α همریختی h را روی گروههای بعد خارج قسمتی القا می‌کند، یعنی $K^0_{\mathrm{Inf}}(\alpha) = h$. با استفاده از گزارهٔ ۱۸، $\alpha(\mathrm{orbit}_\varphi(x)) \supseteq \mathrm{orbit}_\psi \alpha(x)$. در نتیجه طبق تعریف ۱۷، α ریختاری در رسته $\mathbf{DS}^{\mathrm{orb}}$ است. بنابراین K^0_{Inf} یک تابعگون پر است.

حال نشان می‌دهیم تابعگون K^0_{Inf} وفادار نیست. فرض کنید $\beta: (X, \varphi) \to (Y, \psi)$ یک ریختار در $\mathbf{DS}^{\mathrm{orb}}$ باشد. برای هر $T \in \mathrm{FG}(X, \varphi)$ و هر $S \in \mathrm{FG}(Y, \psi)$ ادعا می‌کنیم

$$K^0_{\mathrm{Inf}}(S \circ \beta \circ T) = K^0_{\mathrm{Inf}}(\beta).$$

برای اثبات این ادعا قرار می‌دهیم $\alpha = S \circ \beta \circ T$. طبق تعریف ۱۷، برای اثبات تساوی فوق باید نشان دهیم برای هر $f \in C(Y, \mathbb{Z})$، داریم $f \circ \alpha - f \circ \beta \in Z_\varphi$. فرض کنید $\mu \in P_\varphi(X)$. چون μ اندازه‌ای φ–پایا است، T–پایا نیز می‌باشد زیرا می‌توان گزارهٔ ۱۸ را به ازای $\psi = T$ و $\alpha = \mathrm{id}_X$ بکار برد و نتیجه گرفت که μ اندازه‌ای T–پایاست (توجه کنید که مینیمال بودن ψ در اثبات گزاره ۱۸ نیازی نیست). همچنین چون β ریختاری در رسته $\mathbf{DS}^{\mathrm{orb}}$ است، پس $\mu\beta^{-1}$ اندازه‌ای ψ–پایاست و در نتیجه S–پایا نیز می‌باشد. با استفاده از این مطالب داریم:

$$\begin{aligned}\int_X f \circ \alpha \, d\mu &= \int_X f \circ S \circ \beta \circ T \, d\mu \\ &= \int_X f \circ S \circ \beta \, d\mu = \int_Y f \circ S \, d(\mu\beta^{-1}) \\ &= \int_Y f \, d(\mu\beta^{-1}) = \int_X f \circ \beta \, d\mu.\end{aligned}$$

پس $f\circ\alpha - f\circ\beta \in Z_\varphi$. در نتیجه ادعای فوق برقرار است. این ادعا نشان می‌دهد که K^0_{Inf} وفادار نیست زیرا به فرض خلف، فرض کنید K^0_{Inf} وفادار باشد. همچنین فرض کنید (X,φ) یک سیستم مینیمال کانتور دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $Y = X$، $\psi = \varphi$، $\beta = \mathrm{id}_X$ و $S = T = \varphi$. حال با استفاده از ادعای فوق و فرض وفاداری K^0_{Inf} داریم $S\circ\beta\circ T = \beta$، یعنی $\varphi^2 = \mathrm{id}_X$ که با مینیمال بودن سیستم (X,φ) در تناقض است (زیرا در این‌صورت مدار هر $x \in X$ برابر است با $\{x,\varphi(x)\}$ که در X چگال نیست). پس K^0_{Inf} وفادار نیست. ■

در ادامه این بخش، تابعگون $K^0\colon \mathbf{DS}^{\mathrm{sorb}} \to \mathbf{DG_1}$ را می‌سازیم و یک بیان رسته‌ای و تعمیمی از قضیه بعد به دست می‌آوریم. ابتدا مفهوم هم‌ارزی مداری قوی را یادآوری می‌کنیم (تعریف ۳٫۱ مرجع[۱۰]). دو سیستم مینیمال کانتور (X,φ) و (Y,ψ) را *هم‌ارز مداری قوی*[۲۷] گویند هرگاه یک همسانریختی $\alpha\colon X\to Y$ موجود باشد که مدارها را حفظ کند (یعنی برای هر $x\in X$، $\alpha(\mathrm{orbit}_\varphi(x)) = \mathrm{orbit}_\psi\alpha(x)$) و هر کدام از توابع دوگان-دور[۲۸] $m,n\colon X\to\mathbb{Z}$ که با استفاده از روابط $\alpha\circ\varphi(x) = \psi^{n(x)}\circ\alpha(x)$ و $\alpha\circ\varphi^{m(x)}(x) = \psi\circ\alpha(x)$، $x\in X$، تعریف می‌شوند حداکثر یک نقطه ناپیوستگی داشته باشند. (توجه کنید که اگر n یا m پیوسته باشد آنگاه این دو سیستم مزدوج خواهند شد[۱۰].)

قضیهٔ مهم زیر را از [۱۴] و [۱۰] نقل می‌کنیم.

قضیهٔ ۲۱. فرض کنید (X,φ) و (Y,ψ) دو سیستم مینیمال کانتور باشند. گزاره‌های زیر معادلند:

۱- سیستم‌های (X,φ) و (Y,ψ) هم‌ارز مداری قوی هستند؛

۲- گروههای مرتب $K^0(X,\varphi)$ و $K^0(Y,\psi)$ یکریخت ترتیبی‌اند با نگاشتی که یکه ترتیبی را حفظ می‌کند؛

۳- C*-جبرهای $C(X)\rtimes_\varphi\mathbb{Z}$ و $C(Y)\rtimes_\psi\mathbb{Z}$ یکریخت هستند؛

۴- AF جبرهای $A(X,\varphi,x)$ و $A(Y,\psi,x)$ یکریخت هستند، به ازای یک (هر) $x\in X$ و $y\in Y$.

برای به دست آوردن تعریف مناسبی از ریختار بین سیستم‌های مینیمال کانتور بطوریکه یکریختی حاصل از آن، معادل هم‌ارزی مداری قوی باشد، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۲۲. فرض کنید (X,φ) و (Y,ψ) دو سیستم مینیمال کانتور باشند و $\alpha\colon X\to Y$ نگاشتی پیوسته باشد که در مفروضات لم ۱۹ صدق می‌کند. تابع دوگان-دور $m\colon X\to\mathbb{Z}$ را با رابطه $\psi^{-1}\circ\alpha(x) = \alpha\circ\varphi^{m(x)}(x)$، $x\in X$، تعریف می‌کنیم.

[27] strong orbit equivalent
[28] cocycle maps

فرض کنید m حداکثر یک نقطه ناپیوستگی داشته باشد. در این‌صورت $B_\psi \circ \alpha \subseteq B_\varphi$، یعنی برای هر $g \in B_\psi$ داریم $g \circ \alpha \in B_\varphi$.

برهان. از آن‌جا که $C(Y,\mathbb{Z})$ با ترکیب خطی (با ضرایب صحیح) توابع مشخصه χ_E که $E \subseteq Y$ هم باز و هم بسته است، برابر می‌باشد، برای اثبات حکم کافی‌ست نشان دهیم $(\chi_E - \chi_E \circ \psi^{-1}) \circ \alpha \in B_\varphi$، برای هر زیرمجموعه باز و بسته E از Y. ابتدا توجه کنید که

$$(\chi_E - \chi_E \circ \psi^{-1}) \circ \alpha = \chi_{\alpha^{-1}(E)} - \chi_{\alpha^{-1}(\psi(E))}.$$

فرض کنید تابع دوگان-دور $m: X \to \mathbb{Z}$ در همه نقاط بجز احتمالاً در $x_0 \in X$ پیوسته باشد. برای هر $k \in \mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم

$$B_k = \{x \in X \mid \psi^{-1} \circ \alpha(x) = \alpha \circ \varphi^k(x)\}.$$

بنابر قسمت اول برهان لم ۱۹ داریم $X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^k(B_k)$ (اجتماع مجزا). فرض کنید E یک زیرمجموعهٔ باز و بسته از Y باشد. دو حالت داریم.

حالت اول: $x_0 \notin \alpha^{-1}(\psi(E))$. در اینصورت

$$\begin{aligned} K \quad &:= \{k \in \mathbb{Z} \mid \alpha^{-1}(E) \cap \varphi^k(B_k) \neq \emptyset\} \\ &= \{k \in \mathbb{Z} \mid \varphi^{-k}(\alpha^{-1}(E)) \cap B_k \neq \emptyset\} \\ &= \{k \in \mathbb{Z} \mid \alpha^{-1}(\psi(E)) \cap B_k \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

چون تابع m روی مجموعه فشرده $\alpha^{-1}(\psi(E))$ پیوسته است، K یک مجموعه متناهی است. بعلاوه چون $\alpha^{-1}(\psi(E))$ باز است، مجموعه $\alpha^{-1}(\psi(E)) \cap B_k$ نیز برای هر $k \in \mathbb{Z}$ باز است. از طرف دیگر هر B_k نیز بسته می‌باشد. بنابراین برای هر $k \in \mathbb{Z}$، مجموعه $\alpha^{-1}(E) \cap \varphi^k(B_k)$ باز و بسته است. داریم

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha^{-1}(E)} - \chi_{\alpha^{-1}(\psi(E))} \quad &= \chi_{\alpha^{-1}(E)} - \sum_{k\in K} \chi_{\alpha^{-1}(\psi(E))\cap B_k} \\ &= \chi_{\alpha^{-1}(E)} - \sum_{k\in K} \chi_{\varphi^{-k}(\alpha^{-1}(E)\cap\varphi^k(B_k))} \\ &= \sum_{k\in K} \chi_{\alpha^{-1}(E)\cap\varphi^k(B_k)} - \sum_{k\in K} \chi_{\varphi^{-k}(\alpha^{-1}(E)\cap\varphi^k(B_k))} \\ &= \sum_{k\in K} (\chi_{\alpha^{-1}(E)\cap\varphi^k(B_k)} - \chi_{\varphi^{-k}(\alpha^{-1}(E)\cap\varphi^k(B_k))}). \end{aligned}$$

توجه کنید که برای هر زیرمجموعه باز و بسته A از X و هر $k \in \mathbb{Z}$، تابع $\chi_A - \chi_{\varphi^{-k}(A)}$ در B_φ است. حال تساوی‌های بالا نشان می‌دهد که $\chi_{\alpha^{-1}(E)} - \chi_{\alpha^{-1}(\psi(E))} \in B_\varphi$.

حالت دوم: $x_0 \in \alpha^{-1}(\psi(E))$. در این‌صورت به ازای $F = X \setminus E$ داریم $x_0 \notin \alpha^{-1}(\psi(F))$. بنابراین از حالت اول نتیجه می‌گیریم که $\chi_{\alpha^{-1}(F)} - \chi_{\alpha^{-1}(\psi(F))} \in B_\varphi$. از طرف دیگر، داریم

$$\chi_{\alpha^{-1}(E)} - \chi_{\alpha^{-1}(\psi(E))} = -(\chi_{\alpha^{-1}(F)} - \chi_{\alpha^{-1}(\psi(F))}).$$

بنابراین $\chi_{\alpha^{-1}(E)} - \chi_{\alpha^{-1}(\psi(E))} \in B_\varphi$ و اثبات کامل است. ■

تعریف ۲۳. رستهٔ $\mathbf{DS}^{\mathrm{sorb}}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم. اشیاء این رستهٔ سیستم‌های دینامیکی مینیمال کانتور هستند. یک ریختار $\alpha:(X,\varphi) \to (Y,\psi)$ در این رسته یک تابع پیوسته $\alpha: X \to Y$ است که $B_\psi \circ \alpha \subseteq B_\varphi$، یعنی برای هر $g \in B_\psi$، $g \circ \alpha \in B_\varphi$. تابعگون $K^0: \mathbf{DS}^{\mathrm{sorb}} \to \mathbf{DG_1}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر سیستم مینیمال کانتور (X,φ)، همانند ابتدای این بخش قرار می‌دهیم $K^0(X,\varphi) = C(X,\mathbb{Z})/B_\varphi$. بنابر مطالب ابتدای این بخش، $(K^0(X,\varphi), K^0(X,\varphi)^+, \mathbf{1})$ عضوی از رسته $\mathbf{DG_1}$ است. اگر $\alpha:(X,\varphi) \to (Y,\psi)$ ریختاری در رسته $\mathbf{DS}^{\mathrm{sorb}}$ باشد، همریختی $K^0(\alpha): K^0(Y,\psi) \to K^0(X,\varphi)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$K^0(\alpha)\big(g + B_\psi\big) = g \circ \alpha + B_\varphi, \qquad g \in C(Y,\mathbb{Z}).$$

توجه کنید که چون $B_\psi \circ \alpha \subseteq B_\varphi$، همریختی فوق خوش‌تعریف است، یعنی وابسته به نماینده g نیست.

قضیهٔ ۲۴. تابعگوی پادوردای $K^0: \mathbf{DS}^{\mathrm{sorb}} \to \mathbf{DG_1}$ یک تابعگون طبقه‌بندی کننده است.

برهان. فرض کنید (X,φ) و (Y,ψ) دو سیستم مینیمال کانتور باشند که $K^0(X,\varphi) \cong K^0(Y,\psi)$ در رستهٔ $\mathbf{DG_1}$. باید نشان دهیم یک یکریختی $\alpha:(X,\varphi) \to (Y,\psi)$ در رسته $\mathbf{DS}^{\mathrm{sorb}}$ وجود دارد، یعنی یک همسانریختی $\alpha: X \to Y$ که $B_\psi \circ \alpha = B_\varphi$. ابتدا بنا بر قضیه ۲۱، سیستم‌های (X,φ) و (Y,ψ) هم‌ارز مداری قوی هستند. پس یک همسانریختی $\alpha: X \to Y$ وجود دارد که مدارها را حفظ می‌کند و هر کدام از توابع دوگان-دور آن (یعنی $m, n: X \to \mathbb{Z}$) حداکثر یک نقطهٔ ناپیوستگی دارد. از آن‌جا که برای هر $x \in X$ داریم $\psi \circ \alpha(x) = \alpha \circ \varphi^{m(x)}(x)$، از لم ۲۲ نتیجه می‌گیریم $B_{\psi^{-1}} \circ \alpha \subseteq B_\varphi$. چون $B_{\psi^{-1}} = B_\psi$، پس $B_\psi \circ \alpha \subseteq B_\varphi$. به علاوه، برای هر $x \in X$، $\alpha \circ \varphi(x) = \psi^{n(x)} \circ \alpha(x)$. بنابراین برای هر $y \in Y$ داریم

$$\varphi \circ \alpha^{-1}(y) = \alpha^{-1} \circ \psi^{n(\alpha^{-1}(y))}(y).$$

توجه کنید که تابع $m \circ \alpha^{-1}: Y \to \mathbb{Z}$ نیز حداکثر یک نقطه ناپیوستگی دارد. با استفاده مجدد از لم ۲۲ نتیجه می‌گیریم $B_{\varphi^{-1}} \circ \alpha^{-1} \subseteq B_\psi$. بنابراین $B_\varphi \circ \alpha^{-1} \subseteq B_\psi$ (زیرا $B_{\varphi^{-1}} = B_\varphi$). پس $B_\psi \circ \alpha = B_\varphi$ و اثبات کامل است. ■

خواص دیگر تابعگون $K^0: \mathbf{DS}^{\mathrm{sorb}} \to \mathbf{DG_1}$ مانند پر یا وفادار بودن، ناشناخته هستند.

References

۱. انجمن ریاضی ایران با همکاری گروه ریاضی و آمار مرکز نشر دانشگاهی، *واژه نامه ریاضی و آمار*، مرکز نشر دانشگاهی، (۱۳۸۵).

2. M. Amini, G. A. Elliott, and N. Golestani, “The category of Bratteli diagrams”, Canad. J. Math., 67 (2015), 990-1023.

3. M. Amini, G. A. Elliott, and N. Golestani, “The category of ordered Bratteli diagrams”, Canad. J. Math., 73 (2021), 1-28.

4. M. Amini and N. Golestani, “Discretization of topological spaces”, Quart. J. Math., 67 (2016), 781-799.

5. O. Bratteli, “Inductive limits of finite dimensional C*-algebras”, Trans. Amer. Math. Soc., 171 (1972), 195-234.

6. E. G. Eﬀ ros, “Dimensions and C*-Algebras”, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 46, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, D.C., 1981.

7. E. G. Eﬀ ros, D.E. Handelman, and C.-L. Shen, “Dimension groups and their aﬃne representations”, Amer. J. Math., 102 (1980), 385–402.

8. G. A. Elliott, “On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite dimensional algebras”, J. Algebra, 38 (1976), 29–44.

9. G. A. Elliott, “Towards a theory of classification”, Adv. Math., 223 (2010), 30–48.

10. R. Giordano, I.F. Putnam, and C.F. Skau, “Topological orbit equivalence and C*-crossed products”, J. Reine Angew. Math., 469 (1995), 51–111.

11. E. Glasner and B. Weiss, “Weak orbit equivalence of Cantor minimal systems”, Internat. J. Math., 6 (1995), 559–579.

12. R. Goldblatt, “Topoi, the Categorical Analysis of Logic”, Elsevier Science Publishers, New York, 1984.

13. N. Golestani and M. Hosseini, “On topological rank of factors of Cantor minimal systems”, Ergodic Theory Dynam. Systems, accepted.

14. R. H. Herman, I.F. Putnam, and C.F. Skau, “Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics”, Internat. J. Math., 3 (1992), 827–864.

15. H. Lin, “Tracial equivalence for C*-algebras and orbit equivalence for minimal dynamical systems”, Proc. Edinb. Math. Soc. (Series 2), 48 (2005), 673–690.

16. S. Mac Lane, “Categories for the Working Mathematician”, Second Edition, Springer, New York, 1998.

17. G. K. Pedersen, “C*-Algebras and Their Automorphism Groups”, London Mathematical Society Monographs, Vol. 14, Academic Press, London, 1979.

18. I. F. Putnam, “C*-algebras associated with minimal homeomorphisms of the Cantor set”, Pacific J. Math., 136 (1989), 329–353.

19. D. P. Williams, “Crossed Products of C*-Algebras”, Mathematical Surveys and Monographs, Volume: 134, American Mathematical Society, 2007.