شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Some results on Exterior n-auto Bell groups

Mostafa Sajedi[1], **Hamid Darabi**[2]

1. Department of Mathematics, Esfarayen University of Technology, Esfarayen, Iran. E-mail: sajedi@esfarayen.ac.ir

2. Corresponding Author, Department of Mathematics, Esfarayen University of Technology, Esfarayen, Iran.

E-mail: darabi@esfarayen.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 28 June 2021
Received in revised form: 2 October 2021
Accepted: 19 December 2021
Published online: 3 December 2023

Keywords:
Exterior n-Bell group,
Exterior n-Levi group,
Exterior n-Kappe group

ABSTRACT

Introduction

In recent years, one of the most important topics in group theory, which is used in certain groups such as n-Bell, n-Levi and n-Kappe groups, is the discussion of commutators. Let $n \neq 0,1$ be an integer. A group G is called n-Bell if it satisfies the identity $[x^n, y]=[x, y^n]$ for all $x, y \in G$. The study of n-Bell groups has been done in several articles. A special case of these groups that satisfies in a relationship $[x^n, y]=[x, y]^n$ for all $x, y \in G$ is called n-Levi group. The group G is also called n-Kappe whenever $[x^n, y, y]=1$ for all $x, y \in G$. Suppose G is an arbitrary group and g is an element on G and $\alpha \in Aut(G)$ .If $[g,_{n-1} \alpha] \wedge \alpha = 1$, then g is called the exterior right n-auto Engle element of the group G, and we denote the set of all the exterior right n-auto Engle element of the group G with

$$AR_n^{\wedge}(G) = \{x \in G : [x,_{n-1} \alpha] \wedge \alpha = 1, \forall \alpha \in Aut(G)\}$$

and also the set of all the exterior left n-auto Engle element of the group G with

$$AL_n^{\wedge}(G) = \{x \in G : [\alpha,_{n-1} x] \wedge x = 1, \forall \alpha \in Aut(G)\}.$$

Furthermore, exterior n-th absolute center group G will denoted by

$$L_n^{\wedge}(G) = \{g \in G : [x,_{n-1} g] \wedge g = 1, \forall x \in G\}.$$

In this paper, we prove that the sets $AR_2^{\wedge}(G)$ and $AL_2^{\wedge}(G)$ are characteristic subgroups in G. We also prove that if G is an exterior n-auto Bell group, then $G / L_3^{\wedge}(G)$ has finite exponent dividing $2n(n-1)$.

Material and Method

In this research, we introduce the non-abelain exterior product that leads to definition exterior n-auto Engle group, n-auto Bell, n-auto Levi group, n-auto Kappe group and exterior n-th absolute centre. By using the theorems and results which were explained about exterior 2-auto Engle and exterior n-auto Bell in section two and composition of these two groups to each other, at the end we obtain a bound for structure exponent the factor group $G / L_3^{\wedge}(G)$.

Result and discussion

As regards one of the most important issues in group theory is the structure of groups. Our goal in this research is to explain the non-abelian structure of the exterior product of group. We investigation about structural similarities between exterior n-auto Engle group, n-auto Bell, n-auto Levi group, n-auto Kappe group, and some properties of the classes these groups. In this paper, we define the exterior product group of non-abelian for group G.

We prove that the sets $AR_2^{\wedge}(G)$ and $AL_2^{\wedge}(G)$ are characteristic subgroups in G. Furthermore, we obtain a bound for the exponent of the factor group $G / L_3^{\wedge}(G)$ where G is an exterior n-auto Bell group.

Conclusion:

We obtain the following results from this research:

- Let G be a group exterior (n-1)-auto Kappe and exterior n-auto Bell.Then, Group G is (n-1)-auto Bell group.
- Let G be a group of exterior 2-auto Engle and exterior n-auto Bell. Then, the factor group $G/AR_2^{\wedge}(G)$ has a finite exponent that divide the number n(n-1).
- Let G be a group. Then $AR_2^{\wedge}(G)$ is a characteristic subgroup of G, that is included $L(G)$ and included $AR_2(G)$
- Let G be an exterior n-auto Bell (Levi) group and exterior m-auto Bell (Levi) group. Then, G is an exterior mn-Bell (Levi) group.
- Every exterior n-auto Levi group is an exterior n(1-n)-auto Levi group.
- Every exterior n-auto Bell group is an exterior n(1-n)-auto Bell group.
- If G is an exterior n-auto Bell group, then the factor group $G/L_3^{\wedge}(G)$ has finite exponent dividing $2n(n-1)$.

How to cite: Mostafa Sajedi, Hamid Darabi. (2023). Some results on Exterior n-auto Bell groups. *Mathematical Researches*, 9 (2), 157 - 170.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴٦-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵٤-۲۵۸۸
پژوهش‌های ریاضی
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

برخی نتایج درباره‌ی گروه‌های n-خود بل بیرونی

مصطفی ساجدی [۱]، حمید دارابی [۲] ✉

۱. گروه ریاضی، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین، اسفراین، ایران. رایانامه: sajedi@esfarayen.ac.ir
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین، اسفراین، ایران. رایانامه: darabi@esfarayen.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۷/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۹/۲۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲

واژه‌های کلیدی:
n– خودبل بیرونی،
n -خودلوی بیرونی،
n- خودکاپه بیرونی.

چکیده

حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی در k- نظریه‌ی جبری، توپولوژی جبری و نظریه هموتوپی ریشه دارد. این مفهوم بعدها، در نظریه گروه‌ها موردتوجه واقع شد. در این مقاله، مفهوم حاصل‌ضرب بیرونی ناآبلی را معرفی می‌کنیم که ساختار ضعیف‌تری نسبت به مفهوم حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی دارد. هم‌چنین، ضمن معرفی گروه‌های – nخود بل بیرونی، n-خودلوی بیرونی و n–خودکاپه بیرونی، برخی ویژگی‌های این گروه‌ها را اثبات می‌کنیم. از جمله، ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه n– خودبل بیرونی باشد، آنگاه $G/L_3^{\wedge}(G)$ دارای نمای متناهی است که بر $2n(n-1)$ بخش‌پذیر است.

استناد: ساجدی، مصطفی.، دارابی، حمید (۱۴۰۲). برخی نتایج درباره‌ی گروه‌های n-خود بل بیرونی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۱۵۷ – ۱۷۰.

مقدمه

یکی از مهم‌ترین مباحث نظریه گروه‌ها که در گروه‌های خاصی مانند گروه‌های $n-$بل، $n-$لوی و $n-$کاپه مورد استفاده قرار می‌گیرد، بحث جابجاگرها می‌باشد. فرض کنید $n\neq 0,1$ یک عدد صحیح باشد. بر اساس [۱]، گروه G را $n-$بل گویند اگر در تساوی $[x^n,y]=[x,y^n]$ به ازای هر $x,y\in G$ صدق کند. مطالعه گروه‌های $n-$بل در مقالات متعددی انجام شده است. برای مطالعه بیشتر می‌توانید [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵] و [۶] را ببینید. حالت خاصی از این گروه‌ها که در رابطه $[x^n,y]=[x,y]^n$ صدق می‌کنند، گروه‌های $n-$لوی نامیده می‌شوند. همچنین گروه G را $n-$کاپه گویند هرگاه به ازای هر $x,y\in G$ در تساوی $[x^n,y,y]=1$صدق کند. رده گروه‌های $n-$لوی توسط کاپه [۱] معرفی شده است.

در سال ۲۰۱۵ رجب‌زاده مقدم و همکاران [۷]، مفهوم گروه‌های تانسوری غیرآبلی را معرفی کردند. ما در این مقاله، برای گروه G، گروه حاصل‌ضرب بیرونی ناآبلی را تعریف می‌کنیم. این گروه را گروه تولیدشده توسط عناصر $g\wedge\alpha$تعریف می‌کنیم که در روابط زیر صدق کند.

$$
\begin{aligned}
&gg'\wedge\alpha=\left(g^{g'}\wedge\alpha^{g'}\right)\left(g'\wedge\alpha\right),\\
&g\wedge\alpha\beta=\left(g\wedge\beta\right)\left(g^{\beta}\wedge\alpha^{\beta}\right),\\
&\alpha\wedge\alpha=1,
\end{aligned}
$$

برای هر $g,g'\in G$ و هر $\alpha,\beta\in Aut(G)$.

در این تعاریف قرارداد می‌کنیم $\alpha^g=\varphi_{g^{-1}}\alpha\varphi_g$ و $g^h=h^{-1}gh$.

این مفهوم نسبت به گروه‌های تانسوری غیرآبلی ضعیف‌تر است. به عنوان مثال، هر گروه۲-بل بیرونی ناآبلی، یک گروه ۲-بل تانسوری ناآبلی می‌باشد، اما عکس این مطلب درست نیست.

فرض کنیم G گروهی دلخواه، gعضوی از G و $\alpha\in Aut\left(G\right)$ باشد. یادآوری می‌کنیم که نمادهای $[g,_n\alpha]$ و $[\alpha,_n g]$ بترتیب به صورت استقرایی $[g,\alpha]=g^{-1}\alpha\left(g\right)$; $[g,_n\alpha]=\left[[g,_{n-1}\alpha],\alpha\right]$ و

$$[\alpha,_n g]=\left[[\alpha,_{n-1}g],g\right];\ [\alpha,g]=[g,\alpha]^{-1}$$

تعریف می‌شوند.

فرض کنیم G گروهی دلخواه، gعضوی از G و $\alpha\in Aut\left(G\right)$ باشد. اگر $[g,_{n-1}\alpha]\wedge\alpha=1$، که در آن آنگاه g را یک عنصر $n-$خودانگل بیرونی راست گروه Gمی‌نامیم و مجموعه تمام عناصر $n-$خودانگل بیرونی راست گروه G را با نماد $AR_n^{\wedge}(G)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $AR_n^{\wedge}\left(G\right)=\left\{x\in G:\left[x,_{n-1}\alpha\right]\wedge\alpha=1,\forall\alpha\in Aut\left(G\right)\right\}$ مجموعه تمام عناصر $n-$خودانگل بیرونی چپ گروه G را با نماد $AL_n^{\wedge}(G)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$AL_n^{\wedge}\left(G\right)=\left\{x\in G:\left[\alpha,_{n-1}x\right]\wedge x=1,\forall\alpha\in Aut\left(G\right)\right\}$$

همچنین

$$L_n^{\wedge}\left(G\right)=\left\{g\in G:\left[x,_{n-1}g\right]\wedge g=1,\forall x\in G\right\}$$

را nامین مرکز مطلق بیرونی گروه G می‌نامیم که شامل $L(G)$ (مرکز مطلق گروه G) می‌باشد.
واضح است این گروه یک زیرگروه مشخصه از G است. یادآوری می‌کنیم که $L_1^{\wedge}(G) = L^{\wedge}(G)$، مرکز مطلق بیرونی گروه G نامیده می‌شود.
در این مقاله، ثابت می‌کنیم که $AR_2^{\wedge}(G)$ و $AL_2^{\wedge}(G)$ زیرگروه‌های مشخصه در G هستند. همچنین ثابت می‌کنیم که اگر G گروه $n-$خودبل بیرونی باشد، $G / L_3^{\wedge}(G)$ دارای نمای متناهی است که بر $2n(n-1)$ بخش‌پذیر است.

۲- نتایجی از گروه ۲-خود بل بیرونی

در این بخش ابتدا چند قضیه بیان می‌کنیم که در اثبات نتایج اصلی استفاده می‌شوند. برای اثبات و جزئیات بیشتر در این موارد می‌توان به [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰] و [۱۱] مراجعه نمود.

قضیه ۱.۲. فرض کنید G یک گروه، $x \in G$ و $\alpha \in Aut(G)$. در این صورت روابط زیر برقرارند.

1. $x^{\alpha} = x[x,\alpha]$
2. $[x,\alpha] = [\alpha,x]^{-1}$
3. $[x,\alpha^{-1}] = [x,\alpha]^{-\alpha^{-1}}$
4. $[x^{-1},\alpha] = [x,\alpha]^{-x^{-1}}$
5. $[x,\alpha]^{\beta} = [x^{\beta},\alpha^{\beta}]$
6. $[x,\alpha\beta] = [x,\beta][x,\alpha]^{\beta}$

برهان. مرجع [۱۱] را ببینید.

قضیه ۲،۲. فرض کنید G یک گروه، $x \in AR_2(G)$ و $\alpha \in Aut(G)$. در این صورت روابط زیر برقرارند.

1. $[g,\alpha,\beta] = [g,\beta,\alpha]^{-1}$
2. $[g,[\alpha,\beta]] = [g,\alpha,\beta]^2$
3. $[g,\alpha,\beta,\gamma]^2 = 1$
4. $g^2 \in L_3(G)$
5. $[g,[\alpha,\beta],\gamma] = [g,\gamma,[\alpha,\beta]]^{-1} = [\alpha,\beta,[g,\gamma]] = 1$
6. $[g,\alpha,\beta,\beta] = 1$

برهان. مرجع [۱۱] را ببینید.

قضیه۳.۲. فرض کنیم G یک گروه باشد، آنگاه رابطه‌های زیر برای هر $g,h,g' \in G$ برقرار است.

1. $(g\wedge\alpha)^{-1}=(g^{-1}\wedge\alpha)^{g}=(g\wedge\alpha^{-1})^{\alpha}=\alpha\wedge g$
2. $(g'\wedge\alpha)^{g\wedge\beta}=(g'\wedge\alpha)^{[g,\beta]}$
3. $[g,\alpha]\wedge\beta=(g\wedge\alpha)^{-1}(g\wedge\alpha)^{\beta}$
4. $[g,\alpha]\wedge[g',\beta]=[g\wedge\alpha,g'\wedge\beta]$

برهان. مرجع [۸] را ببینید.

قضیه ۴.۲. فرض کنید G گروهی دلخواه، $\alpha\in Aut(G)$ و $x\in AR_2^{\wedge}(G)$. در این صورت روابط زیر برقرارند.

۱. x یک عنصر ۲-خودانگل بیرونی چپ است.

۲. برای هر r و s صحیح، $[x^r,\alpha^s]=[x,\alpha]^{rs}$

۳. $x^2\in Z_3(G)$

برهان. مرجع [۹] را ببینید.

برای اثبات نتایج اصلی، ابتدا لم زیر را می‌آوریم.

لم ۵.۲. فرض کنیم G یک گروه، g عضوی از $AR_2^{\wedge}(G)$ و $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in Aut(G)$ باشند. روابط زیر برقرار است.

1. $(g\wedge\alpha)^{-1}=g\wedge\alpha^{-1}$
2. $[g,\alpha]\wedge\beta=([g,\beta]\wedge\alpha)^{-1}$
3. $([g,\alpha]\wedge\beta)^{[\gamma,\delta]}=[g,\alpha]\wedge\beta$
4. $[g,\alpha]^{\beta}\wedge\alpha=1$

برهان.

۱) از آنجا که $g\in AR_2^{\wedge}(G)$، با استفاده از قسمت (۳) از قضیه ۳.۲ داریم:

$$1=[g,\alpha]\wedge\alpha=(g\wedge\alpha)^{-1}(g\wedge\alpha)^{\alpha}$$

در نتیجه $g\wedge\alpha=(g\wedge\alpha)^{\alpha}$. با مزدوج‌کردن توسط α^{-1} و استفاده از قسمت (۱) قضیه ۳.۲، نتیجه بدست می‌آید.

۲) با استفاده از قسمت (۱) داریم:

$$g\wedge\alpha\beta=(g\wedge\beta^{-1}\alpha^{-1})^{-1}$$

با بسط طرفین این رابطه و استفاده مجدد از قسمت (۱)،

$$(g\wedge\beta)(g\wedge\alpha)^{\beta}=(g\wedge\beta)^{\alpha^{-1}}(g\wedge\alpha)$$

چون $G\wedge Aut(G)$ آبلی است، با ضرب طرفین رابطه فوق در عبارت $\left(g\wedge\beta^{-1}\right)^{\alpha^{-1}}\left(g\wedge\alpha^{-1}\right)^{\beta}$ و معکوس نمودن آن داریم:

$$\left(\left(g\wedge\beta^{-1}\right)^{-1}\left(g\wedge\beta^{-1}\right)^{\alpha^{-1}}\right)^{-1}=\left(g\wedge\alpha\right)^{-1}\left(g\wedge\alpha\right)^{\beta}$$

حال بنا به قسمت (۳) از قضیه ۳.۲،

$$\left([g,\alpha]\wedge\beta\right)\left([g,\beta^{-1}]\wedge\alpha^{-1}\right)=1$$

از طرفی بنا به قسمت (۲) از قضیه ۴.۲ و قسمت (۱) از قضیه ۳.۲ داریم:

$$\left([g,\alpha]\wedge\beta\right)\left([g,\beta]\wedge\alpha^{-1}\right)^{-[g,\beta]^{-1}}=1$$

با مزدوج‌کردن رابطه اخیر توسط $[g,\beta]$ نتیجه می‌شود که

$$\left([g,\alpha]\wedge\beta\right)^{[g,\beta]}\left([g,\beta]\wedge\alpha^{-1}\right)^{-1}=1$$

بنابر قسمت (۱) از قضیه ۱,۲ و قسمت (۵) از قضیه ۲,۲، $[g,\beta]$ روی $[g,\alpha]\wedge\beta$ بدیهی عمل می‌کند. لذا

$$\left([g,\alpha]\wedge\beta\right)\left([g,\beta]\wedge\alpha\right)^{\alpha^{-1}}=1$$

حال در این رابطه به جای α، α^{-1} قرار می‌دهیم. بنابراین

$$\left(\left[g,\alpha^{-1}\right]\wedge\beta\right)\left([g,\beta]\wedge\alpha^{-1}\right)^{\alpha}=1$$

و از آنجا

$$\left([g,\alpha]\wedge\beta\right)^{-[g,\alpha]^{-1}}\left([g,\beta]\wedge\alpha\right)^{-1}=1$$

با معکوس‌کردن رابطه اخیر و مزدوج‌کردن توسط $[g,\alpha]$، حکم بدست می‌آید.

۳) با استفاده از قسمت (۳) قضیه ۳.۲، قسمت (۵) قضیه ۲,۲ و قسمت (۲) نتیجه به دست می‌آید.

۴) از آنجا که $g\in AR_2^{\wedge}(G)$، به ازای هر $\alpha,\beta\in Aut(G)$ داریم: $[g,\alpha\beta]\wedge\alpha\beta=1$

با بسط این رابطه و استفاده از روابط تعریف حاصل‌ضرب بیرونی ناآبلی نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}1&=[g,\alpha\beta]\wedge\alpha\beta\\&=\left([g,\beta]\wedge\alpha\right)^{\beta[g,\alpha]^{\beta}}\left([g,\alpha]^{\beta}\wedge\beta\right)\left([g,\alpha]^{\beta}\wedge\alpha\right)^{\beta}\end{aligned}$$

با مزدوج‌کردن این رابطه توسط β^{-1}،

$$\left([g,\beta]\wedge\alpha\right)^{[g,\alpha]}\left([g,\alpha]\wedge\beta\right)\left([g,\alpha]^{\beta}\wedge\alpha\right)=1$$

از طرفی بنابر قسمت (۳)، $[\varphi_g,\alpha]$ روی $\left([g,\beta]\wedge\alpha\right)$ بطور بدیهی عمل می‌کند. در نتیجه

$$[g,\alpha]^{\beta}\wedge\alpha=1$$

قضیه ۶.۲. فرض کنید G یک گروه دلخواه، $g \in AR_2^{\wedge}(G)$ و $\alpha,\beta,\gamma \in Aut(G)$ و n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت روابط زیر برقرار است.

1. $[g,\alpha]^n \wedge \beta = \left([g,\alpha]\wedge\beta\right)^n$
2. $g\wedge\alpha^n = g^n\wedge\alpha = \left(g\wedge\alpha\right)^n$
3. $g\wedge[\alpha,\beta] = [\left(g,\alpha]\wedge\beta\right)^2$
4. $[g,\alpha]\wedge[\beta,\gamma]=1$
5. $g^2 \in L_3^{\wedge}(G)$
6. $\left(g\wedge\alpha\right)^{\gamma\wedge\alpha} = \left(g\wedge\beta\right)^{[\gamma,\alpha]} = g\wedge\beta$

برهان.

۱) با استفاده از استقرا و قسمت (۳) لم ۵.۲ داریم:

$$\begin{aligned}[g,\alpha]^n\wedge\beta &= \left([g,\alpha]\wedge\beta\right)^{[g,\alpha]^{n-1}}\left([g,\alpha]^{n-1}\wedge\beta\right)\\ &=\left([g,\alpha]\wedge\beta\right)\left([g,\alpha]\wedge\beta\right)^{n-1}\\ &=\left([g,\alpha]\wedge\beta\right)^n\end{aligned}$$

۲) اثبات را با استقرا انجام می‌دهیم. با استفاده از قسمت (۲) از قضیه ۴.۲ داریم:

$$\begin{aligned}g\wedge\alpha^n &= \left(g\wedge\alpha\right)\left(\left(g\wedge\alpha\right)^{\alpha}\right)^{n-1}\\ &= g\wedge\alpha^n = \left(g\wedge\alpha\right)\left(g\wedge\alpha\right)^{n-1} = \left(g\wedge\alpha\right)^n\end{aligned}$$

به روشی مشابه، با استقرا ریاضی و استفاده از قسمت (۳) از قضیه ۳.۲، قسمت (۲) لم ۵.۲ و قسمت (۱) بدست می‌آوریم:

$$g^n\wedge\alpha = \left(g\wedge\alpha\right)^n$$

۳) با استفاده از قسمت (۳) قضیه ۳.۲ و قسمت (۱) لم ۵.۲ داریم:

$$\begin{aligned}g\wedge[\alpha,\beta] &= g\wedge\left(\beta\alpha\right)^{-1}\alpha\beta\\ &=\left(g\wedge\alpha\beta\right)\left(g\wedge\left(\beta\alpha\right)^{-1}\right)^{\alpha\beta} = \left(g\wedge\alpha\beta\right)\left(g\wedge\beta\alpha\right)^{-1}\end{aligned}$$

حال با استفاده از قضیه ۳.۲ و لم ۵.۲ و آبلی‌بودن $G\wedge Aut(G)$ داریم:

$$g\wedge[\alpha,\beta] = \left([g,\alpha]\wedge\beta\right)^2$$

۴) با استفاده از قسمت (۲) لم ۵.۲ داریم:

$$[g,\beta]\wedge\alpha\gamma = \left([g,\alpha\gamma]\wedge\beta\right)^{-1}$$

با بسط دو طرف رابطه فوق و استفاده مجدد از لم ۵.۲ و قسمت (۱) قضیه ۱.۲ داریم:

$$([g,\beta]\wedge\gamma)([g,\beta]\wedge\alpha)^{\gamma}=([g,\alpha]\wedge\beta)^{-\gamma}([g,\alpha]\wedge[\beta,\gamma])([g,\beta]\wedge\gamma)$$

بنابراین

$$([g,\beta]\wedge\gamma)([g,\alpha]\wedge\beta)^{-\gamma}=([g,\alpha]\wedge\beta)^{-\gamma}([g,\alpha]\wedge[\beta,\gamma])([g,\beta]\wedge\gamma)$$

درنتیجه

$$[g,\alpha]\wedge[\beta,\gamma]=1$$

۵) با استفاده از قسمت (۲) لم ۵.۲ و قسمت (۲) قضیه ۲,۲ داریم:

$$\begin{aligned}1=[g,\beta]\wedge[\alpha,\gamma]&=([g,[\alpha,\gamma]]\wedge\beta)^{-1}\\&=([g,\alpha,\gamma]^2\wedge\beta)^{-1}=([g^2,\alpha,\gamma]\wedge\beta)^{-1}=[g^2,\alpha,\beta]\wedge\gamma\end{aligned}$$

لذا $g^2\in L_3^{\wedge}(G)$.

۶) با استفاده از قسمت‌های (۲) و (۴) قضیه۳.۲ داریم:

$$(g\wedge\beta)^{\gamma\wedge\alpha}=(g\wedge\beta)^{[\gamma,\alpha]}=g\wedge\beta$$

قضیه۷.۲. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت $AR_2^{\wedge}(G)$ یک زیرگروه مشخصه شامل $L(G)$ و مشمول در $AR_2(G)$ است.

برهان: همریختی

$$\kappa: G\wedge Aut(G)\to[G,Aut(G)]$$

با ضابطه $\kappa(x\wedge\alpha)=[x,\alpha]$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه $[g,\alpha]\wedge\alpha=1$ برای هر $g\in AR_2^{\wedge}(G)$ و $\alpha\in Aut(G)$، داریم:

$$1=\kappa([g,\alpha]\wedge\alpha)=[g,\alpha,\alpha]$$

لذا $g\in AR_2(G)$.

اثبات $L(G)\subseteq AR_2^{\wedge}(G)$ بدیهی است.

اکنون ثابت می‌کنیم که $AR_2^{\wedge}(G)$ یک زیرگروه G است. فرض کنید $g\in AR_2^{\wedge}(G)$، در این صورت با استفاده از قسمت (۱) قضیه 3.2 و قسمت (۱) قضیه ۱.۲ و از آنجایی که $AR_2^{\wedge}(G)\subseteq AR_2(G)$ داریم:

$$[g^{-1},\alpha]\wedge\alpha=1$$

پس $g^{-1}\in AR_2^{\wedge}(G)$.

برای بسته‌بودن فرض کنید $g,h\in AR_2^{\wedge}(G)$ و $\alpha\in Aut(G)$. با قسمت (۴) قضیه ۴.۲، $[gh,\alpha]\wedge\alpha=1$ و لذا حکم اثبات شده است.

۳- گروه‌های n–خودبل بیرونی

در این بخش به معرفی گروه‌های n-خودبل بیرونی، n-خودلوی بیرونی و n-خودکاپه بیرونی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید G یک گروه و $n\neq 0,1$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت G را n–خودبل بیرونی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x\in G$ و هر $\alpha\in Aut(G)$ داشته باشیم:

$$x^n\wedge\alpha = x\wedge\alpha^n$$

به‌سادگی اثبات می‌شود که همه گروه‌های از نمای متناهی که نمای آنها عدد صحیح n یا $n-1$ را می‌شمارند و $|Aut(G)|$ عدد n یا $n-1$ را می‌شمارد، n-خودبل بیرونی هستند. این مطلب، مثال‌هایی برای گروه‌های $n-$خودبل بیرونی بدست می‌دهد. به عنوان مثال، گروه دووجهی D_8، یک گروه ۳-خودبل بیرونی می‌باشد.

تعریف ۲,۳. فرض کنید G یک گروه و $n\neq 0,1$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت G را یک گروه $n-$خودلوی بیرونی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x\in G$ و هر $\alpha\in Aut(G)$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$x^n\wedge\alpha=(x\wedge\alpha)^n$$

طبق قضیه ۳.۲، هر گروه $n-$ خودلوی بیرونی $n-$ خودبل بیرونی است. عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. اما برای گروه‌های ۲-خودانگل بیرونی این دو مفهوم یکسان‌اند.

در ادامه بعضی از خواص گروه‌های n-خودبل بیرونی و n-خودلوی بیرونی را بررسی می‌کنیم.

لم ۳.3. فرض کنید G یک گروه n–خودبل (لوی) بیرونی و m–خودبل (لوی) بیرونی باشد. در این صورت nm–خودبل (لوی) بیرونی است.

برهان: اثبات واضح است.

قضیه۴.۳. فرض کنید G یک گروه باشد. روابط زیر به ازای هر $x,y\in G$ و هر $\alpha,\beta\in Aut(G)$ برقرار است.

1. $(y\wedge\beta)(x\wedge\alpha)^{\varphi_y\beta}=(x\wedge\alpha)^{\beta\varphi_y}(y\wedge\beta)$
2. $(x\wedge\alpha)(x\wedge\beta)^{\alpha}=(\alpha\wedge\beta)^{x}(x\wedge\beta)(x\wedge\alpha)^{\beta}(\beta\wedge\alpha)$
3. $\left([x,\varphi_{y^{-1}}]\wedge\beta\right)^{\varphi_y}\left([y,\beta^{-1}]\wedge\varphi_x\right)^{\beta}\left([\beta,x^{-1}]\wedge\varphi_y\right)^{x}=1$

برهان.

۱) با استفاده از تعریف، به آسانی بدست می‌آید.

۲) با استفاده از تعریف حاصل‌ضرب بیرونی ناآبلی و قضیه ۳.۲ داریم:

$$\begin{aligned}(x\wedge\alpha)(x\wedge\beta)&=x\wedge\beta\alpha=x\wedge\alpha\beta[\beta,\alpha]\\&=(x\wedge[\beta,\alpha])(x\wedge\alpha\beta)^{[\beta,\alpha]}\\&=(\beta\wedge\alpha)^{-x}(\beta\wedge\alpha)(\beta\wedge\alpha)^{-1}(x\wedge\beta)(x\wedge\alpha)^{\beta}(\beta\wedge\alpha)\\&=(\alpha\wedge\beta)^{x}(x\wedge\beta)(x\wedge\alpha)^{\beta}(\beta\wedge\alpha)\end{aligned}$$

۳) بنابر قسمت (۱) و قضیه ۳.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\left([x,\varphi_{y^{-1}}]\wedge\beta\right)^{\varphi_y}&=\left(x\wedge\varphi_{y^{-1}}\right)^{-\varphi_y}\left(x\wedge\varphi_{y^{-1}}\right)^{\beta\varphi_y}\\&=\left(x\wedge\varphi_y\right)(y\wedge\beta)\left(x\wedge\varphi_y\right)^{-\beta}(y\wedge\beta)^{-1}\end{aligned}$$

ازطرفی با استفاده از قسمت‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\left([y,\beta^{-1}]\wedge\varphi_x\right)^{\beta}&=\left(y\wedge\beta^{-1}\right)^{-\beta}\left(y\wedge\beta^{-1}\right)^{\varphi_x\beta}=(y\wedge\beta)\left(y\wedge\beta^{-1}\right)^{\varphi_x\beta}(\beta\wedge\varphi_x)(\beta\wedge\varphi_x)^{-1}\\&=(y\wedge\beta)(\beta\wedge\varphi_x)\left(y\wedge\beta^{-1}\right)^{\beta\varphi_x}(\beta\wedge\varphi_x)^{-1}\\&=(y\wedge\beta)(y\wedge\varphi_x)^{-\beta}(y\wedge\beta)^{-1}\left(\beta\wedge\varphi_{x^{-1}}\right)^{-\varphi_x\varphi_y}(\varphi_x\wedge y)^{-1}(\beta\wedge\varphi_x)^{-1}\\&=(y\wedge\beta)(y\wedge\varphi_x)^{-\beta}(y\wedge\beta)^{-1}(\varphi_x\wedge y)^{-1}\left(\beta\wedge\varphi_{x^{-1}}\right)^{-\varphi_y\varphi_x}(\beta\wedge\varphi_x)^{-1}\end{aligned}$$

همچنین

$$\left([\beta,x^{-1}]\wedge\varphi_y\right)^{x}=\left(\beta\wedge x^{-1}\right)^{-\varphi_x}\left(\beta\wedge x^{-1}\right)^{\varphi_y\varphi_x}$$

با استفاده از روابط فوق، حکم حاصل می‌شود.

قضیه۵.۳. هر گروه n-خودبل بیرونی، $(1-n)$-خودبل بیرونی است.

برهان:

فرض کنید G یک گروه n-خودبل بیرونی باشد. در این صورت برای هر $x\in G$ و هر $\alpha\in Aut(G)$ رابطه $x^n\wedge\alpha=x\wedge\alpha^n$ را داریم. با مزدوج‌کردن این تساوی به‌وسیله $\alpha^{-1}\varphi_{x^{-1}}$ و معکوس‌کردن آن و با استفاده از قسمت (۱) از قضیه ۴.۳، داریم:

$$\left(x^n\wedge\alpha^{-1}\right)^{\varphi_{x^{-1}}}\left(x^{-1}\wedge\alpha^{-1}\right)=\left(x^{-1}\wedge\alpha^{-1}\right)\left(x^{-1}\wedge\alpha^n\right)^{\alpha^{-1}}$$

بنابراین $x^{n-1}\wedge\alpha^{-1}=x^{-1}\wedge\alpha^{n-1}$.

با جایگذاری α^{-1} توسط α و x^{-1} توسط x خواهیم داشت:

$$x^{1-n}\wedge\alpha=x\wedge\alpha^{1-n}$$

بنابراین G گروه $(1-n)$- خود بل بیرونی است.

نتیجه ۶.۳. هر گروه n-خودبل بیرونی، $n(1-n)$-خودبل بیرونی است.

برهان: بنابر لم ۳.۳، واضح است.

قضیه 7.3. هر گروه n-خودلوی بیرونی، $n(1-n)$-خودلوی بیرونی است.

برهان.

فرض کنیم G یک گروه n-خودلوی بیرونی است، در این صورت

$$x^{1-n} \wedge \alpha = \left(x^{-n} \wedge \alpha\right)^{x}\left(x \wedge \alpha\right) = \left(\left(x^{-1} \wedge \alpha\right)^{x}\right)^{n}\left(x \wedge \alpha\right) = \left(x \wedge \alpha\right)^{-n}\left(x \wedge \alpha\right) = \left(x \wedge \alpha\right)^{1-n}$$

بنابراین G گروهی $(1-n)$-خودلوی بیرونی است. بنابر لم 3.3، G گروهی $n(1-n)$-خودلوی بیرونی است.

در ادامه کرانی برای نمای گروه خارج‌قسمتی $G/AR_2^{\wedge}(G)$ معرفی می‌کنیم. توجه داریم که مرکز بیرونی گروه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Z^{\wedge}(G) = \{x \in G : x \wedge g = 1, \forall g \in G\}$$

ابتدا خواصی از مرکز بیرونی گروه را در قضیه زیر می‌آوریم.

قضیه 8.3. فرض کنید G یک گروه n-خودبل بیرونی باشد. روابط زیر به ازای هر $x \in G$ و هر $\alpha \in Aut(G)$ برقرار است.

۱) $[x^n, \alpha] \wedge x^{1-n} = 1$

۲) $x^{n(1-n)} \in Z^{\wedge}\left(\left\langle x^{Aut(G)}\right\rangle\right)$

۳) $x^n \in Z^{\wedge}\left(\left\langle x^{Aut(G)}\right\rangle\right)$ اگروتنهااگر $[\alpha^n, x] \wedge x = 1$، به ازای هر $\alpha \in Aut(G)$.

برهان.

۱) چون G یک گروه n-خود بل بیرونی است،

$$\begin{aligned}\left(x^n \wedge \alpha\right)^{-x^{-n}} &= \left(x^n\right)^{-1} \wedge \alpha = x^{-n} \wedge \alpha \\ &= x^{-1} \wedge \alpha^n = \left(x \wedge \alpha^n\right)^{-x^{-1}}\end{aligned}$$

با مزدوج‌کردن بوسیله x و معکوس‌کردن آن داریم:

$$\left(x^n \wedge \alpha\right)^{x^{1-n}} = x \wedge \alpha^n$$

با استفاده از این مطلب و قضیه 3.2، $\left(x^n \wedge \alpha\right)\left([x^n, \alpha] \wedge x^{1-n}\right) = x \wedge \alpha^n$. بنابراین $[x^n, \alpha] \wedge x^{1-n} = 1$

۲) با استفاده از قسمت (۳) قضیه 4.3، به ازای هر $g, h \in G$ و $\alpha \in Aut(G)$ داریم:

$\left([g,\alpha] \wedge h^{g}\right)\left([h,g] \wedge \alpha^{\varphi_h}\right)\left([\alpha,h] \wedge g^{\alpha}\right) = 1$ حال اگر قرار دهیم $g := x^n$ و $h := x^{1-n}$. با استفاده از قسمت (۱) و تعریف گروه n-خودبل بیرونی داریم:

$$1 = [\alpha, x^{1-n}] \wedge (x^n)^{\alpha} = x^{(n-1)\alpha} x^{1-n} \wedge (x^n)^{\alpha} = x^{1-n} \wedge (x^n)^{\alpha} = x^{n(1-n)} \wedge x^{\alpha}$$

از این رو $x^{n(1-n)} \in Z^{\wedge}\left(\left\langle x^{Aut(G)}\right\rangle\right)$.

۳) $x^n \in Z^{\wedge}\left(< x^{Aut(G)} >\right)$ معادل این است که به ازای هر $\alpha \in Aut(G)$، $x^n \wedge x^{\alpha} = 1$. لذا $1 = x \wedge [x^n, \alpha]$ و بنابراین $[\alpha^n, x] \wedge x = 1$.

تعریف 9.3. فرض کنید G یک گروه و $n \neq 0,1$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت G را n–خودکاپه بیرونی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in G$ و $\alpha \in Aut(G)$ داشته باشیم:

$$[x^n, \alpha] \wedge \alpha = 1$$

واضح است که گروه G، n-خودکاپه بیرونی است، هرگاه گروه خارج‌قسمتی $G/AR_2^{\wedge}(G)$ دارای نمای متناهی باشد که عدد n را می‌شمارد.

در ادامه نتایجی در مورد ارتباط بین گروه‌های خودبل بیرونی و خودکاپه بیرونی بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه 10.3. فرض کنید G یک گروه $(n-1)$-خودکاپه بیرونی و n-خودبل بیرونی باشد. در این صورت G گروهی $(n-1)$-خودبل بیرونی است.

برهان: فرض کنید $x \in G$ و $\alpha \in Aut(G)$. چون G، خودکاپه بیرونی است $x^{n-1} \in AR_2^{\wedge}(G)$. بنابه قسمت (۲) از لم 5.2 داریم:

$$[x^{n-1}, \alpha] \wedge x^{1-n} = \left([x^{n-1}, x^{1-n}] \wedge \alpha\right)^{-1} = 1$$

حال با استفاده از قسمت (۳) قضیه 3.2 نتیجه می‌شود:

$$x^{1-n} \wedge \alpha = \left(x^{n-1} \wedge \alpha\right)^{-x^{1-n}} \left(\left(x^{1-n} \wedge \alpha\right)\left([x^{n-1} \wedge \alpha] \wedge x^{1-n}\right)\right)^{-1} = \left(x^{n-1} \wedge \alpha\right)^{-1}$$

به طور مشابه،

$$x \wedge \alpha^{1-n} = x \wedge \left(\alpha^{n-1}\right)^{-1} = \left(x \wedge \alpha^{n-1}\right)^{-1}$$

ازآنجا که G، n-خودبل بیرونی است طبق قضیه 5.3، $(1-n)$-خودبل بیرونی نیز هست. بنابراین

$$x \wedge \alpha^{n-1} = x^{n-1} \wedge \alpha$$

و لذا اثبات کامل است.

قضیه 11.3. فرض کنید G یک گروه ۲-خودانگل بیرونی و n-خودبل بیرونی باشد. در این صورت، گروه خارج‌قسمتی $G/AR_2^{\wedge}(G)$ نمای متناهی دارد که عدد $n(n-1)$ را می‌شمارد.

برهان.

طبق قضیه ۸.۳ داریم

$$x^{n(1-n)} \in Z^{\wedge}\left(< x^{Aut(G)} >\right)$$

درنتیجه $[\alpha^{n(1-n)}, x] \wedge x = 1$.

چون G، ۲-خودانگل بیرونی است، داریم:

$$[x^{n(1-n)},\alpha]\wedge\alpha=1$$

در نتیجه $x^{n(1-n)}\in AR_2^{\wedge}(G)$ و حکم اثبات می‌شود.

قضیه ۱۲.۳. فرض کنید G یک گروه ۲-خودانگل و n-خودبل بیرونی و $L_3^{\wedge}(G)$ سومین جمله سری خودمرکزی بالایی بیرونی G باشد. در این‌صورت نمای گروه خارج‌قسمتی $G/L_3^{\wedge}(G)$ عدد $2n(n-1)$ را می‌شمارد.

برهان.

قرار دهید $m=n(n-1)$. بنابر قضیه ۱۱.۳ و با استفاده از قضیه ۶.۲، $x^{2m}\in L_3^{\wedge}(G)$ و این اثبات را کامل می‌کند.

References

1. L. C., Kappe, On n-Levi groups. Arch. Math. **47** (1986) 198-210.

2. R. Brandl, L. C. Kappe, On n-Bell groups, Commun. Algebra **17** (1989) 787-807.

3. C. Delizia, M. R. R. Moghaddam and A. Rhemtulla, The structure of Bell groups, J. Group Theory, **9**(1) (2006) 117-125.

4. A. Tortora, Some properties of Bell groups. Commun. Algebra **37**(2) (2009) 431-438.

5. R. Brown, Infinite soluble groups with the Bell property, afiniteness condition. Monatsh. Math. **104** (1987) 191-197.

6. L. C., Kappe, R. F. Morse, Groups with 3-abelian normal closures. Arch. Math. **51**(2), 1988 104-110.

7. M. j. Sadeghifard, M. R. R. Moghaddam, Non-abelian tensor analogues of 2-auto Engel groups. Bull. Korean. Math. J. **52**(4) (2015) 1097-1105.

8. E. Asheghi, S. H. Jafari, On exterior n-Bell groups, Bull. Iran. Math. Soc. **45**(5) (2019) 1545-1555.

9. T. K. Teague, On the Engel margin, Pacific J. Math. **50**(1) (1974), 205-214.

10. P. Moravec, Onnonabelian tensor analogues of 2-Engel conditions. Glasg. Math. J. **47**(1) (2005) 77-86.

11. H. Safa, M.R.R. Moghaddam, Some properties of auto-Bell groups. Commun. Algebra **37** (2) (2009) 431-438