Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Geometry of non-symmetric metrics and its application to theoretical physics

Ghodratallah Fasihi-Ramandi [1]

1. Department of Pure Mathematics, Faculty of Science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran. E-mail: gh_fasihi@aut.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 17 July 2021
Received in revised form: 2 October 2021
Accepted: 1 December 2021
Published online: 3 December 2023

Keywords:
semi-Riemannain metrics, scalar curvature, Hilbert-Einstein action, Calculus of variations.

ABSTRACT

Introduction

General relativity is model of nature, especially, of gravity. Its central assum ption is that space, time, and gravity are all aspects of a single entity, called space-time, which is modeled by a 4-dimensional Lorentzian manifold. It analyzes space-time, electromagnetism, matter, and their mutual influences. But the effects of matter and electromagnetism are added t o the model in a way which is not directly related to geometry of space-time manifold. In fact, influences of matter and electromagnetism fields are a dded to theory under notion of stress-energy tensor. Hence, considering non-symmetric metrics extends this geometry and make a good apparatus to describe other physical quantities.

Material and Methods

In this paper, we consider the geometry of a non-symmetric semi-Riemannian metric on a manifold M. A special class of such metrics contains a semi-Riemannian metric and a symplectic structure on M, simultaneously. Similar to the Levi-Civita connections in semi-Riemannain manifold, we define a new connection which is torsion free and compatible with our symplectic structure. With the help of semi-Riemannian metric, we define and compute the Rcci and scalar curvature of this new connection.

Results and Discussion

Using a natural Lagrangian (which is a generalization of Hilbert-Einstein action) and calculus of variations we derive some new field equations. The equations show that the symmetric part of semi-Riemannain metrics is directly related to gravity and the symplectic part is capable of describing quantities related to matter.

Conclusion

In this work, we present a completely geometric theory of gravity. The Riemannian geometry, which is usually used to formulate gravitational theories adds the notion of matter to space time manifold as the way which is not directly related to geometry of the theory. In this framework, we retrieve Einstein's field equation and we will show that the distribution of matter in space-time is directly related to symplectic part of our geometry.

How to cite: Ghodratallah Fasihi-Ramandi. (2023). Geometry of non-symmetric metrics and its application to theoretical physics *Mathematical Researches*, 9 (2), 146 – 156.

 Publisher: Kharazmi University

پژوهش‌های ریاضی

شاپا چاپی: ۲۵۴٦-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵٤-۲۵۸۸

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

هندسه مترهای نامتقارن و کاربرد آن در فیزیک نظری

قدرت اله فصیحی رامندی [۱]

۱. گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران. رایانامه: gh_fasihi@aut.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۲۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۷/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۹/۱۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲

واژه‌های کلیدی:
همتافته،
شبه ریمانی.

چکیده

در این مقاله، هندسه مترهای شبه-ریمانی و نامتقارن روی منیفلدها را در نظر می‌گیریم. رده خاصی از مترهای نامتقارن روی یک منیفلد، همزمان شامل یک متر شبه-ریمانی متقارن و یک ساختار همتافته هستند. یک التصاق با خواص التصاق لوی-چویتا برای این گونه مترهای نامتقارن را در نظر می‌گیریم. سپس، تانسورهای انحنای این التصاق و انحنای اسکالر وابسته به آن را محاسبه کرده و به کمک یک لاگرانژین طبیعی (که تعمیم عمل هیلبرت-اینشتین است) و استفاده از حساب تغییرات، معادلاتی بدست خواهیم آورد. معادلات بدست آمده نشان می‌دهند که قسمت متقارن متر شبه-ریمانی در ارتباط با مفهوم گرانش و قسمت همتافته آن در ارتباط با کمیات مربوط به ماده خواهد بود.

استناد: قدرت اله فصیحی رامندی (۱۴۰۲). عنوان مقاله. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۱۴۶ – ۱۵۶.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

هیچ نظریه فیزیکی ادعا نمی‌کند که می‌تواند تمام طبیعت را مدل‌بندی کند و هر یک از نظریه‌های موجود از بخشی از واقعیات چشم‌پوشی می‌کنند. نظریه نسبیت، مدلی از طبیعت است که در آن نیروی گرانش و الکترومغناطیس فرموله می‌شوند ولی از تاثیرات کوانتومی پدیده‌ها چشم‌پوشی می‌شود. در نظریه نسبیت عام، نیروی گرانش به کمک مفهوم انحنا در منیفلدهای لورنتزی توصیف می‌شود و اثرات ماده و میدان الکترومغناطیسی تحت مفهوم تانسور تکانه-انرژی به نظریه اضافه می‌شوند [۵]. بنابراین، پس از ارائه نظریه نسبیت عام توسط اینشتین، سوالی به طور طبیعی طرح شد مبنی بر اینکه آیا ممکن است الکترومغناطیس را هندسی کرد؟ یا به عبارت دیگر، آیا می‌توان گرانش و الکترومغناطیس را در یک نظریه هندسی واحد ترکیب کرد؟ این مسئله امروزه به نظریه وحدت نیروها مشهور است. بیش‌تر تلاش‌هایی که تاکنون در این زمینه انجام شده است، ساختار نسبیت عام را به عنوان ساختار پایه در نظر می‌گیرند و آن را با ساختارهای اضافی یا افزایش درجه آزادی غنی می‌سازند.

در نظریه نسبیت عام، متر منیفلد شبه-ریمانی، یک فرم دوخطی و متقارن در نظر گرفته می‌شود. اما باید دقت کرد که واقعیت جهان تابع فرضیات ما نیست و طبیعت بطور سازگار به سیر خود ادمه می‌دهد. بنابراین، هر کجا نظریات ما نابسنده باشد می‌توانیم فرضیات خود را تعدیل نماییم. ایده اینشتین برای حل این مسئله، درنظرگیری متر نامتقارن بود و او تصور می‌کرد که بخش متقارن این‌گونه مترها معرف گرانش و بخش پادمتقارن آنها مستقیما در ارتباط با میدان الکترومغناطیسی خواهد بود. اگرچه این فرضیه اینشتین صحیح نبود و بخش پادمتقارن این مترها ممکن است با سایر کمیت‌های فیزیکی در ارتباط باشد با این حال، پژوهش‌های ریاضی و فیزیکی در زمینه مترهای نامتقارن از موضوعات مهم و مورد علاقه پژوهشگران قرار گرفت (نگاه کنید به [۳]).

در این مقاله، رده خاصی از مترهای شبه-ریمانی نامتقارن که قسمت پادمتقارن آن‌ها یک فرم همتافته است را در نظر می‌گیریم. التصاق لوی-چویتا و انحنای اسکالر وابسته به آن از مفاهیم اصلی، در نسبیت است. در اینجا، ما نیز التصاق‌های خاصی که نسبت به ساختارهای موجود خوش‌رفتار هستند را در نظر خواهیم گرفت و هندسه آن‌ها را بررسی خواهیم کرد. با تعمیم عمل هیلبرت-اینشتین برای انحنای اسکالر وابسته به این التصاق‌ها و استفاده از حساب تغییرات به دستگاهی از معادلات همزمان می‌رسیم و در واقع، یک نظریه فضا-زمان-ماده ایجاد خواهیم کرد.

۲ فرم و التصاق همتافته

در این بخش، مفاهیم وابسته به ساختارهای همتافته که در ادامه این مقاله مورد نیاز هستند را بیان کرده و نمادگذاری‌های مربوطه را ثابت می‌کنیم .

تعریف: فرض کنید M یک منیفلد از بعد $2n$ و ω یک دو-فرم ناتبهگون و بسته باشد، در این صورت ω را یک ساختار همتافته و زوج (M,ω) را یک منیفلد همتافته گویند.

قضیه کلاسیک داربو، نشان می‌دهد که هندسه همتافته در ذات خود یک هندسه سرتاسری است و وجود دستگاه مختصات خاص در منیفلدهای همتافته و صلبیت فرم همتافته نشان می‌دهد که ساختار همتافته، هندسه زیادی روی منیفلد قرار نمی‌دهد (عملا تمام این منیفلدها بطور موضعی یکریخت هستند). روی یک منیفلد همتافته، تعریف مفهوم

التصاق همتافته که به ویژگی‌های موضعی منیفلد مرتبط است می‌تواند نتیجه‌های جدیدی در بر داشته باشد. بعنوان مثال، ثابت شده است که در صورت وجود التصاق‌های همتافته، این منیفلدها صلب‌تر می‌شوند و با فرض فشردگی منیفلد مورد مطالعه، صلبیت موضعی به حالت سرتاسری قابل گسترش است. اکنون مفهوم التصاق همتافته را تعریف می‌کنیم.

تعریف: یک التصاق همتافته روی یک منیفلد همتافته (M,ω) یک التصاق خطی ∇ روی M است که در شرایط زیر صدق کند.

۱) التصاق ∇ تاب-آزاد باشد، یعنی برای هر میدان برداری هموار X و Y روی M داشته باشیم

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0,$$

۲) فرم همتافته ω نسبت به التصاق ∇ موازی باشد، یعنی برای میدان‌های برداری هموار X ، Yو Z روی M داشته باشیم

$$(\nabla_X\omega)(Y,Z)=X.\omega(Y,Z)-\omega(\nabla_X Y,Z)-\omega(Y,\nabla_X Z)=0.$$

برای اثبات وجود چنین التصاق $\overline{\nabla}$ روی یک منیفلد M ، فرض کنید ∇ یک التصاق خطی و با تاب صفر روی M در نظر بگیرید (به عنوان مثال، التصاق لوی-چویتای وابسته به یک متر شبه-ریمانی g روی منیفلد M). میدان تانسوری N روی منیفلد M را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$(\nabla_X\omega)(Y,Z):=\omega(N(X,Y),Z),$$

با توجه به خاصیت ناتبهگونی ω ، میدان تانسوری N خوش تعریف بوده و به طور یکتا مشخص می‌شود. از آنجا که ω پادمتقارن است داریم $\omega(N(X,Y),Z)=-\omega(N(X,Z),Y)$ و چون فرم همتافته ω بسته است داریم

$$\omega(N(X,Y),Z)+\omega(N(Y,Z),X)+\omega(N(Z,X),Y)=0.$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\frac{1}{3}N(X,Y)+\frac{1}{3}N(Y,X).$$

در این صورت $\overline{\nabla}$ یک التصاق با تاب صفر است و بعلاوه

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\omega)(Y,Z)&=X.\omega(Y,Z)-\omega(\overline{\nabla}_X Y,Z)-\omega(Y,\overline{\nabla}_X Z)\\
&=(\nabla_X\omega)(Y,Z)-\frac{1}{3}\omega(N(X,Y),Z)-\frac{1}{3}\omega(N(Y,X),Z)\\
&\quad-\frac{1}{3}\omega(Y,N(X,Z))-\frac{1}{3}\omega(Y,N(Z,X))\\
&=(\nabla_X\omega)(Y,Z)-\frac{1}{3}\omega(N(X,Y),Z)-\frac{1}{3}\omega(N(Y,X),Z)\\
&\quad-\frac{1}{3}\omega(N(X,Y),Z)-\frac{1}{3}\omega(N(X,Z),Y)\\
&=(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3})\omega(N(X,Y),Z)+\frac{1}{3}\omega(N(X,Z),Y)=0,\end{aligned}$$

بنابراین، التصاق خطی $\overline{\nabla}$ یک التصاق همتافته است. در ادامه، خواهیم دید که التصاق‌های همتافته منحصر بفرد نیستند و فضای تمام اینگونه التصاق‌ها یک فضای آفین است.

یک التصاق همتافته $\overline{\nabla}$ روی یک منیفلد همتافته M در نظر بگیرید در این صورت التصاق

$\widehat{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + S(X,Y)$ نیز همتافته است اگر و تنها اگر $S(X,Y) = S(Y,X)$ و بعلاوه

$$(\widehat{\nabla}_X \omega)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_X \omega)(Y,Z) - \omega(S(X,Y),Z) - \omega(Y,S(X,Z))$$
$$= -\omega(S(X,Y),Z) + \omega(S(X,Y),Z) = 0$$

و بنابراین همتافته بودن $\widehat{\nabla}$ معادل این است که میدان تانسوری $\omega(S(X,Y),Z)$ کلا متقارن باشد. اکنون، یافته‌های خود را می‌توانیم در گزاره زیر خلاصه کنیم.

گزاره: در هر منیفلد همتافته (M,ω) یک التصاق همتافته موجود است. مجموعه تمام التصاق‌های همتافته روی M یک فضای آفین است و فضای برداری هادی آن فضای میدان‌های تانسورهای ۳-مرتبه همگشت و متقارن $S^3(TM)$ است.

همانطور که مشاهده می‌شود التصاق‌های همتافته، بر خلاف التصاق لوی-چویتا با شرط توازی و تاب-آزادی به صورت یکتا مشخص نمی‌شوند، اما مواردی نیز وجود دارد که این التصاق‌ها منحصر بفرد هستند که مورد بحث ما در این مقاله نیست و از بیان آن صرفنظر می‌کنیم .

۳ مترهای شبه-ریمانی نامتقارن

در این بخش مترهای نامتقارن را تعریف کرده و هندسه مربوط به رده خاصی از این مترها را بدست می‌آوریم. این مفاهیم، در بخش بعد، برای حصول به معادلات میدان بکار گرفته خواهند شد.

تعریف: فرض کنید M یک منیفلد و $\bar{g}$ یک میدان تانسوری ۲-مرتبه همگشت روی آن است و همچنین $\bar{g}$ ناتبهگون است یعنی

$$\forall X \in \mathcal{X}(M) \quad (\forall Y \in \mathcal{X}(M) \quad \bar{g}(X,Y) = 0) \Rightarrow X = 0$$

در این صورت $\bar{g}$ را یک متر شبه-ریمانی نامتقارن روی M گوییم .چون فضای برداری میدان‌های تانسوری ۲-مرتبه همگشت را می‌توان به صورت جمع مستقیم تانسورهای متقارن و تانسورهای پادمتقارن نوشت، بنابراین هر متر شبه-ریمانی نامتقارن به صورت جمع یک متر شبه ریمانی معمولی روی M مانند g و یک میدان تانسوری پادمتقارن و البته ناتبهگون مانند ω نوشته می‌شود. در ادامه این مقاله، فرض می‌کنیم ω بسته نیز باشد. در نتیجه، مترهای شبه-ریمانی نامتقارنی را در نظر می‌گیریم که قسمت پادمتقارن آن‌ها یک فرم همتافته روی M باشد. پس، فرض کنیم

$$\bar{g} = g + \omega$$

یک متر شبه-ریمانی و نامتقارن و ω یک فرم همتافته روی M است. التصاق لوی-چویتای متر شبه-ریمانی g را ∇ می‌نامیم .

در نظریه نسبیت که M بعنوان یک منیفلد فضا-زمان در نظر گرفته می‌شود، فرض بر این است که $\omega = 0$ و تمام مفاهیم فیزیکی از طریق هندسه متر g بدست می‌آید و معادله اینشتین در خلا به صورت زیر داده می‌شود

$$\mathrm{R}ic - \frac{1}{2}Rg = 0$$

که در آن $\mathrm{R}ic$ تانسور انحنای ریچی و R انحنای اسکالر وابسته به g است. از طرفی، می‌دانیم که مترهای صادق در معادله بالا، نقاط بحرانی تابعک اینشتین هیلبرت یعنی

$$\mathcal{L}(g') = \int_M R_{g'} dV_{g'}$$

هستند که $dV_{g'}$ فرم حجم و $R_{g'}$ انحنای اسکالر وابسته به متر g هستند.

حال، دقت می‌کنیم که مفهوم تانسور انحنا مفهومی وابسته به التصاق است ولی تانسور انحنای ریچی و انحنای اسکالر مرتبط با متر (انقباض) هستند. با این سرنخ، التصاق خاصی روی منیفلد M که مجهز به متر شبه-ریمانی نامتقارن است در نظر می‌گیریم که از طریق التصاق لوی-چویتای متر g و التصاق همتافته‌ای سازگار با ω ایجاد می‌شود. البته، این التصاق همتافته خیلی دلخواه نیست و به کمک التصاق لوی-چویتای متر g تعریف می‌شود و این امر با توجه به برهمکنش مفاهیم فیزیکی که قرار است با این ساختار مدل شوند طبیعی است. تانسور انحنای این التصاق و انقباضات آن از طریق متر g ابزار مناسبی برای بدست آوردن معادلات جدید خواهد بود.

التصاق $\overline{\nabla}$ روی M مجهز به متر $\bar{g} = g + \omega$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{6}N(X,Y) + \frac{1}{6}N(Y,X),$$

در واقع،

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\nabla_X Y + \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \frac{1}{3}N(X,Y) + \frac{1}{3}N(Y,X))$$

یعنی $\overline{\nabla}$ یک ترکیب آفین از التصاق لوی-چویتای g و التصاق همتافته وابسته به ω است. امید است که با محاسبه تانسور انحنای التصاق $\overline{\nabla}$ و انقباضات آن کاربردهایی فیزیکی برای این ساختار استخراج کنیم. چون عبارت

$$S(X,Y) := \frac{1}{6}N(X,Y) + \frac{1}{6}N(Y,X)$$

یک (۰،۲)-میدان تانسوری متقارن است پس، می‌توان نتیجه گرفت که هندسه‌ی ایجاد شده از طریق ساختار فوق زیرمجموعه‌ای از هندسه التصاق‌های آفین است. بهرحال، در ادامه، مفاهیم هندسی وابسته به التصاق

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X,Y)$$

را محاسبه می‌کنیم. در این مقاله، حالتی را در نظر می‌گیریم که

$$S(X,Y) := \alpha(X)Y + \alpha(Y)X,$$

که در آن α یک ۱-فرم روی M است .

قضیه: تانسور انحنای $\overline{\nabla}$ که با نماد $\overline{R}$ نمایش می‌دهیم در تساوی زیر صدق می‌کند

$$\overline{R}(X,Y)(Z) = R(X,Y)(Z) + d\alpha(X,Y).Z + (\nabla_X\alpha)(Z).Y - (\nabla_Y\alpha)(Z).X$$
$$+\alpha(Z)\alpha(Y)X - \alpha(Z)\alpha(X)Y,$$

که در آن R تانسور انحنای التصاق لوی-چویتای ∇ است.

برهان: طبق تعریف، داریم

$$\overline{R}(X,Y)(Z) = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z$$
$$= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + S(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + S(X,Z)) - \nabla_{[X,Y]}Z - S([X,Y],Z)$$
$$= \nabla_X\nabla_Y Z + S(X,\nabla_Y Z) + \nabla_X S(Y,Z) + S(X,S(Y,Z))$$
$$-\nabla_Y\nabla_X Z - S(Y,\nabla_X Z) - \nabla_Y S(X,Z) - S(Y,S(X,Z))$$
$$-\nabla_{[X,Y]}Z - S(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z)$$
$$= R(X,Y)(Z) + (\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Y S)(X,Z) + S(X,S(Y,Z)) - S(Y,S(X,Z))$$

اکنون با در نظر گرفتن $S(X,Y) = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X$ و کمی محاسبات نتیجه مطلوب بدست می‌آید .

برای ۱- فرم α و یک میدان برداری دلخواه X روی M تعریف می‌کنیم

$$F_X\colon \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M), \qquad F_X(Y) = (\nabla_Y\alpha)(X),$$

واضح است که F_X یک ۱- فرمی وابسته به α و X بوده و به نوعی در ارتباط با مشتق α است. در ادامه این مقاله، این ۱- فرم در محاسبات ظاهر خواهد شد. فرض کنید (x,U) یک دستگاه مختصات موضعی حول نقطه p و $\{E_i\}_{i=1}^n$ یک قاب متعامد یکه‌ای موضعی با پایه معکوس $\{E^i\}_{i=1}^n$ حول آن باشد، اگر تانسور ریچی $\overline{\mathrm{R}ic}$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\overline{\mathrm{R}ic}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto \overline{R}(Z,X)(Y)) = \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(E_i,X)(Y), E^i\rangle,$$

آنگاه قضیه زیر را داریم.

قضیه: تانسور انحنای ریچی وابسته به $\overline{\nabla}$ که با $\overline{\mathrm{R}ic}$ نمایش می‌دهیم در تساوی زیر صدق می‌کند .

$$\overline{\mathrm{R}ic}(X,Y) = \mathrm{R}ic(X,Y) + F_X(Y) + F_Y(X) + (n-1)\alpha(X)\alpha(Y) - (n+1)(\nabla_X\alpha)(Y),$$

که در آن $\mathrm{R}ic$ تانسور انحنای ریچی وابسته به ∇ است .

برهان: بنا به تعریف داریم

$$\overline{\mathrm{R}ic}(X,Y) = \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(E_i,X)(Y), E^i\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^n \langle R(E_i,X)(Y) + (\nabla_{E_i}\alpha)(X).Y - (\nabla_X\alpha)(E_i).Y$$
$$+(\nabla_{E_i}\alpha)(Y).X - (\nabla_X\alpha)(Y).E_i$$

$$+\alpha(Y)\alpha(X)E_i - \alpha(E_i)\alpha(Y)X, E^i\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i, X)(Y), E^i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle(\nabla_{E_i}\alpha)(X).Y, E^i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle(\nabla_X\alpha)(E_i).Y, E^i\rangle$$

$$+\textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle(\nabla_{E_i}\alpha)(Y).X, E^i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle(\nabla_X\alpha)(Y).E_i, E^i\rangle$$

$$+\textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle\alpha(Y)\alpha(X)E_i, E^i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\alpha(E_i)\alpha(Y)X, E^i\rangle$$

$$= \mathrm{R}ic(X,Y) + \langle Y, \textstyle\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i}\alpha)(X).E^i\rangle - \langle Y, \sum_{i=1}^{n} (\nabla_X\alpha)(E_i).E^i\rangle$$

$$+\langle X, \textstyle\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i}\alpha)(Y).E^i\rangle - (\nabla_X\alpha)(Y)\sum_{i=1}^{n} \langle E_i, E^i\rangle$$

$$+\alpha(Y)\alpha(X)\textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle E_i, E^i\rangle - \alpha(Y)\langle X, \sum_{i=1}^{n} \alpha(E_i)E^i\rangle$$

$$= \mathrm{R}ic(X,Y) + \langle Y, \textstyle\sum_{i=1}^{n} F_X(E_i).E^i\rangle - \langle Y, (\nabla_X\alpha)\ \ \rangle$$

$$+\langle X, \textstyle\sum_{i=1}^{n} F_Y(E_i).E^i\rangle - n(\nabla_X\alpha)(Y) + n\alpha(Y)\alpha(X) - \alpha(Y)\langle X, \alpha\ \ \rangle$$

$$= \mathrm{R}ic(X,Y) + \langle Y, F_X\rangle - (\nabla_X\alpha)(Y) + \langle X, F_Y\rangle - n(\nabla_X\alpha)(Y)$$

$$+n\alpha(Y)\alpha(X) - \alpha(Y)\alpha(X)$$

$$= \mathrm{R}ic(X,Y) + F_X(Y) + F_Y(X) + (n-1)\alpha(X)\alpha(Y) - (n+1)(\nabla_X\alpha)(Y).$$

اکنون انحنای اسکالر $\overline{\nabla}$ را که با $\overline{R}$ نشان می‌دهیم به صورت انقباض تانسور ریچی $\overline{\mathrm{R}ic}$ تعریف می‌کنیم، در واقع

$$\overline{R} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{R}ic}(E_i, E^i).$$

قضیه: انحنای اسکالر $\overline{R}$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\overline{R} = R + (n-1)|\alpha|^2 - (n-1)\mathrm{d}iv(\alpha),$$

که در آن R انحنای اسکالر وابسته به التصاق لوی-چویتا ∇ است .

۴ کاربرد در فیزیک نظری

در این بخش M یک منیفلد شبه-ریمانی بسته (مجهز به متر نامتقارن $\bar{g} = g + \omega$) از بعد n است که $n \geq 2$ و آن را به عنوان یک منیفلد فضا-زمان در نظر می‌گیریم. همانطور که قبلا مشاهده شد، هندسه متر نامتقارن $\bar{g}$ در واقع هندسه مربوط به التصاق آفین $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X,Y)$ است. در این بخش، در حالتی که $S(X,Y) = df(X).Y +$ $df(Y).X$، برای یک تابع هموار f روی M ، یک کاربرد فیزیکی از این ساختار ارائه می‌کنیم. هرگاه Ω_g فرم حجم کانونیک M وابسته به متر شبه-ریمانی g باشد، تابعک هیلبرت-اینشتین را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{L}(g,f)=\int_M \overline{R}\Omega_g$$

که $\overline{R}$ انحنای اسکالر وابسته به التصاق $\overline{\nabla}$ است. از آنجا که انتگرال دیورژانس روی منیفلدهای بسته صفر است، بنابراین تابعک بالا به شکل زیر قابل بازنویسی است

$$\mathcal{L}(g,f)=\int_M (R+(n-1)|df|^2)\Omega_g$$

حال، نقاط بحرانی این تابعک را که منجر به پیدایش معادلات میدان در مدل فضا-زمان ما هستند را محاسبه می‌کنیم. به ازای t های به اندازه کافی کوچک

$$g(t)=g+ts,$$

$$f(t)=f+th,$$

یک وردش از زوج (g,f) است که در آن s یک میدان تانسوری متقارن از نوع (۰،۲) و h یک تابع هموار روی M است. زوج (g,h) یک نقطه بحرانی برای تابعک هیلبرت-اینشتین است اگر و فقط اگر جواب معادله زیر باشد

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\mathcal{L}(g(t),f(t))|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(\int_M (R_{g(t)}+(n-1)|df(t)|^2)\Omega_{g(t)}\right)|_{t=0}=0$$

برای محاسبه این مشتق لازم است مشتق $R_{g(t)}$ ، $|df(t)|^2$ و $\Omega_{g(t)}$ را در $t=0$ محاسبه کنیم. می‌دانیم [۱ و ۲].

$$(\Omega_{g(t)})'(0)=\frac{1}{2}\langle g,s\rangle\Omega_g$$

$$(R_{g(t)})'(0)=-\langle \mathrm{R}ic,s\rangle+\mathrm{d}iv(X).$$

همچنین، یک محاسبه سرراست نشان می‌دهد که

$$(|df(t)|^2)'(0)=-\langle df\otimes df,s\rangle+2\langle\vec{\nabla}h,\vec{\nabla}f\rangle,$$

که در این تساوی منظور از $\vec{\nabla}f$ گرادیان تابع f در منیفلد شبه-ریمانی (M,g) است. اکنون آمادگی آن را داریم که مشتق (۱) را محاسبه کنیم. داریم

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}(g(t),f(t)))'(0)&=\int_M (R+(n-1)|df|^2)\langle\tfrac{1}{2}g,s\rangle\Omega_g\\ &+\int_M (-\langle\mathrm{R}ic,s\rangle+\mathrm{d}iv(X)-(n-1)\langle df\otimes df,s\rangle+2(n-1)\langle\vec{\nabla}h,\vec{\nabla}f\rangle)\Omega_g\\ &=\int_M \langle\tfrac{1}{2}Rg-\mathrm{R}ic+\tfrac{(n-1)}{2}|df|^2g-(n-1)df\otimes df,s\rangle\Omega_g\\ &-2(n-1)\int_M h\,\Delta(f)\Omega_g\end{aligned}$$

تساوی آخر به ازای تمام زوج‌های (s,h) صفر است اگر و تنها اگر

$$(2)\quad \mathrm{R}ic-\frac{1}{2}Rg=\frac{(n-1)}{2}|df|^2g-(n-1)df\otimes df$$

$$(3)\quad \Delta(f)=0$$

این معادلات، معادلات میدان حاصل از رده خاصی از مترهای شبه-ریمانی نامتقارن است که در ابتدای این بخش در نظر گرفته‌ایم. معادله (۲) همان معادله اینشتین است. در حالتی که $n = 4$، با محاسبه اثر (تریس) در طرفین این معادله بدست می‌آوریم

$$R = -3|df|^2 = -3|\vec{\nabla} f|^2$$

مقدار R در نظریه نسبیت در ارتباط با توزیع ماده در فضا-زمان است، بنابراین $\vec{\nabla} f$ جریانی از ماده را نشان می‌دهد که برطبق معادله (۳) در اصل پایستگی ماده صدق می‌کند. در واقع، صفر شدن دیورژانس یک تانسور در فیزیک نظری به معنای پایستگی مفهوم وابسته به آن تانسور تعبیر می‌شود و داریم

$$\Delta\,(f) = \mathrm{d}iv(\vec{\nabla} f) = 0$$

در بعد $n = 4$، قرار می‌دهیم

$$T^f = \frac{3}{2}|df|^2 g - 3df \otimes df$$

و T^f را که یک تانسور متقارن است تانسور تکانه-انرژی مربوط به ماده می‌نامیم. چون دیورژانس تانسور اینشتین $G = \mathrm{R}ic - \frac{1}{2}Rg$ صفر است، بایستی دیورژانس T^f نیز صفر باشد که به معنی پایستگی تانسور تکانه-انرژی خواهد بود.

قضیه: فرض کنید f یک تابع هموار روی منیفلد شبه-ریمانی (M, g) است و بعلاوه $\Delta\,(f) = 0$. در این صورت تانسور متقارن T^f دیورژانس صفر دارد.

برهان: فرض کنید $\{e_i\}$ یک پایه متعامد یکه‌ای با پایه معکوس $\{e^i\}_{i=1}^4$ باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(df \otimes df)(X) &= \textstyle\sum_{i=1}^4 (\nabla_{e_i} df \otimes df)(e^i, X)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^4 ((\nabla_{e_i} df) \otimes df + df \otimes (\nabla_{e_i} df))(e^i, X)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^4 ((\nabla_{e_i} df)(e^i) df(X) + df(e^i)(\nabla_{e_i} df)(X)\\
&= \Delta\,(f) df(X) + \mathrm{Hess} f(\vec{\nabla} f, X) = \mathrm{Hess} f(\vec{\nabla} f, X).
\end{aligned}$$

و همچنین،

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(|\vec{\nabla} f|^2 g)(X) = d(|\vec{\nabla} f|^2)(X) = X\langle \vec{\nabla} f, \vec{\nabla} f\rangle &= 2\langle \nabla_X(\vec{\nabla} f), \vec{\nabla} f\rangle\\
&= 2(\nabla_X df)(\vec{\nabla} f) = 2\mathrm{Hess} f(\vec{\nabla} f, X).
\end{aligned}$$

و این تساوی‌ها، صفر بودن دیورژانس تانسور متقارن T^f را نشان می‌دهد .

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از مفهوم التصاق وابسته به مترهای نامتقارن یک چارچوب هندسی برای توصیف توزیع جرم در نظریه نسبیت ارائه کردیم و در واقع مفهوم فضا-زمان را به فضا-زمان-ماده گسترش دادیم. در این چارچوب، مفهوم جرم

که در نسبیت مستقیما به هندسه فضا-زمان بستگی ندارد و تحت عنوان تانسور تکانه-انرژی به نظریه اضافه می‌شود را هندسی کرده‌ایم. معادلات بدست آمده معادله اینشتین را در بر دارد. در ادامه این مقاله، می‌توان به کمک ساختار همتافته موجود، معادلات بدست آمده را کوانتومی کرد و یک نظریه گرانش کوانتومی ایجاد کرد. همچنین، در نظر گرفتن حالات کلی تر برای تانسور متقارن S، احتمالا نتایج جدیدتر و بیش‌تری در بر خواهد داشت. مثلا، فرض کنیم که میدان تانسوری Sبه صورت

$$S(X,Y) := \alpha(X)F(Y) + \alpha(Y)F(X)$$

باشد که در آن α یک ۱- فرم و F یک (۱,۱)-فرم دیفرانسیل روی M است. پیش‌بینی می‌شود که در این شکل از تانسور S، ۱-فرم α مفهومی وابسته به ماده و F در ارتباط با میدان الکترومغناطیس باشد. بررسی این حالات، می‌تواند موضوع پژوهش دیگری باشد .

References

1. D. Bleecker, *Guage Theory and Variational Principles*, Addison-Wesely, 1981.

2. N. Boroojerdian, *Geometrization of Mass in General Relativity*, Int. J. Theor. Phys, **52** (2013), 24-32.

3. T. Damour, S. Deser, *Nonsymmetric Gravity Theories: Inconsistencies and a Cure*, Phys. Rev. D., **47** (1992), 1541-1556.

4. H. F. M. Goenenr, *On the History of Unified Field Theories. Max Planck Institute for Gravitational Physics*, Albert Einstein Institute (2004).

5. R. Sash, H. Wu, *General Relativity For Mathematicains*, Springer-Verlag, (1977).