



Strongly θ_{cl} -Continuous Functions

Masoumeh Etebar¹

1. Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. E-mail: m.etebar@scu.ac.ir

Article Info**Article type:**
Research Article**Article history:**

Received: 11 August 2021

Accepted:

26 September 2021

Published online:

3 December 2023

Keywords: θ_{cl} -open set,
 θ_{cl} -closed set,
 θ_{cl} -space,
 cl -closure compact space,
 θ_{cl} -closed graph.

ABSTRACT**Introduction**

The purpose of the present paper is to study the class of strongly θ_{cl} -continuous functions, which contains the class of cl -supercontinuous functions (\equiv clopen continuous functions). Both these two classes are contained in the classes of strongly θ -continuous functions and R_{cl} -supercontinuous functions. A set A in a topological space X is called cl -open if it is the union of clopen sets. The complement of a cl -open set is referred to as cl -closed. For a set A in a topological space X the set of all $x \in X$ such that every clopen set containing x intersects A is called the cl -closure of A and it is denoted by $cl_s A$. So, a set B is cl -closed if and only if $B = cl_s B$.

An open set U in a topological space X is called r_{cl} -open if it is the union of cl -closed sets. A topological space X is called an R_{cl} -space if every open set in X is r_{cl} -open. If A is a subset of X , then $int_{\theta} A$ denotes the set of all $x \in A$ such that A contains a closed neighborhood containing x . A set B is called θ -open if $B = int_{\theta} B$. The complement of a θ -open set is called θ -closed. The set of all $x \in X$ such that every closed neighborhood of x intersects A is called the θ -closure of A and it is denoted by $cl_{\theta} A$. So, a set B is θ -closed if and only if $B = cl_{\theta} B$. A function $f: X \rightarrow Y$ is said to be cl -supercontinuous (respectively R_{cl} -supercontinuous, respectively strongly θ -continuous) if $f^{-1}(V)$ is cl -open (respectively r_{cl} -open, respectively θ -open) in X for every open set V in Y .

Material and methods

A function $f: X \rightarrow Y$ is said to be *strongly θ_{cl} -continuous* at $x \in X$ if for each open set V in Y containing $f(x)$, there exists an open set U in X containing x such that $f(cl_s U) \subseteq V$. The function f is said to be *strongly θ_{cl} -continuous* if it is strongly θ_{cl} -continuous at each $x \in X$. Clearly, such functions are strongly θ -continuous but not conversely. For instance, the identity function on the real line is strongly θ -continuous, but it is not strongly θ_{cl} -continuous. This is also an example of a continuous function which is not strongly θ_{cl} -continuous. The θ_{cl} -closure of a set A in a topological space X , denoted by $cl_{\theta_{cl}} A$, is the set of all $x \in X$ such that each cl -closed neighborhood of x intersects A . A subset H of X is called θ_{cl} -closed if $H = cl_{\theta_{cl}} H$. The θ_{cl} -interior of A denotes the set of all $x \in A$ such that A contains a cl -closed neighborhood of x and it is denoted by $int_{\theta_{cl}} A$. A set G is called θ_{cl} -open if $G = int_{\theta_{cl}} G$. We denote by $S_{cl}(X)$ the ring of all real valued strongly θ_{cl} -continuous functions on a topological space X , and $C(X)$ denotes the ring of all real valued continuous functions on X .

A function $f: X \rightarrow Y$ is strongly θ_{cl} -continuous if and only if the inverse image of a closed set under f is θ_{cl} -closed if and only if the inverse image

of an open set under f is θ_{cl} -open if and only if the inverse image of a subbasic open set under f is θ_{cl} -open if and only if for every $x \in X$ and for each closed set F in Y with $x \notin F$, there exists a θ_{cl} -open set U in X containing x such that $f(U) \cap F = \emptyset$.

A function $f: X \rightarrow Y$ is strongly θ_{cl} -continuous if and only if $f(cl_{\theta_{cl}} A) \subseteq cl f(A)$ for every subset A of X if and only if $cl_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl B)$ for every subset B of Y if and only if $f^{-1}(int B) \subseteq int_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B))$ for every subset B of Y .

Results and discussion

If $f: X \rightarrow Y$ is a strongly θ_{cl} -continuous function and $g: Y \rightarrow Z$ is continuous, then $g \circ f$ is strongly θ_{cl} -continuous.

A function $f: X \rightarrow Y$ is said to be θ_{cl} -open (θ_{cl} -closed) if the image of each θ_{cl} -open (θ_{cl} -closed) set in X is open (closed) in Y .

Let $f: X \rightarrow Y$ be a θ_{cl} -open and strongly θ_{cl} -continuous surjection and let $g: Y \rightarrow Z$ be a function. Then $g \circ f$ is strongly θ_{cl} -continuous if and only if g is continuous. Further, if in addition $f(A)$ is θ_{cl} -open in Y for every θ_{cl} -open set A in X , then g is strongly θ_{cl} -continuous.

A subset S of a space X is said to be θ_{cl} -embedded in X if every θ_{cl} -open (θ_{cl} -closed) set in S is the intersection of a θ_{cl} -open (θ_{cl} -closed) set in X with S . Let $f: X \rightarrow Y$ be a function. Let $\{U_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ be a cover of X by θ_{cl} -open sets such that each U_α is θ_{cl} -embedded in X and let $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$, $\forall \alpha \in \Lambda$. If each f_α is strongly θ_{cl} -continuous, then f is strongly θ_{cl} continuous. Let $\{F_i | i = 1, \dots, n\}$ be a cover of X by θ_{cl} -closed sets such that each F_i is θ_{cl} -embedded in X and let $f_i = f|_{F_i}$, where $i = 1, \dots, n$. If each f_i is strongly θ_{cl} -continuous, then f is strongly θ_{cl} -continuous.

Let $\{f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ be a family of functions and let $f: \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ be a function defined by $f((x_\alpha)) = (f_\alpha(x_\alpha))$. If each f_α is strongly θ_{cl} -continuous, then f is strongly θ_{cl} -continuous and whenever each X_α is extremally disconnected, then the converse is also true.

A space is said to be a θ_{cl} -space if every open set is θ_{cl} -open. A topological space (X, τ) is a θ_{cl} -space if and only if every continuous function from (X, τ) into a space (Y, σ) is strongly θ_{cl} -continuous.

Let $f: X \rightarrow Y$ be a function and let $g: X \rightarrow X \times Y$ be the graph function of f defined by $g(x) = (x, f(x))$. Then g is strongly θ_{cl} -continuous if and only if f is strongly θ_{cl} -continuous and X is a θ_{cl} -space.

The *component* of a point x in a topological space X is the maximal connected subset C_x in X containing x . The *quasi-component* Q_x of x in X is the intersection of all clopen subsets of X containing x . A space is called *totally disconnected* if the only nonempty components are singletons. For a strongly θ_{cl} -continuous function $f: X \rightarrow Y$, $f(Q_x) \subseteq Q_{f(x)}$ for each $x \in X$ and if Y is a T_1 -space, then $f(Q_x) = \{f(x)\}$ for each $x \in X$. Also if f is injective and Y is a T_1 -space, then X is totally disconnected.

If $f: X \rightarrow Y$ is an open strongly θ_{cl} -continuous injection, then X is a θ_{cl} -space. If $f: X \rightarrow Y$ is a continuous function and Y is a θ_{cl} -space, then f is strongly θ_{cl} -continuous.

A space is called *ultra-Hausdorff* if for each pair of distinct points, there is a clopen set containing one and not the other. Let $f: X \rightarrow Y$ be a strongly θ_{cl} -continuous injection. If Y is T_0 , then X is ultra-Hausdorff.

A space X is called *cl-closure compact* if every open cover of X has a finite subcollection whose *cl-closures* cover X . A subset A of a space X is said

to be *cl-closure compact relative to X* if for each cover of A by open sets in X , there exists a finite subcollection whose *cl*-closures cover A .

The strongly θ_{cl} -continuous image of a *cl*-closure compact space is compact. Let $f: X \rightarrow Y$ be a strongly θ_{cl} -continuous function and let $A \subseteq X$. If A is *cl*-closure compact relative to X , then $f(A)$ is compact.

The graph $G(f)$ of a function $f: X \rightarrow Y$ is said to be θ_{cl} -closed if for each $(x, y) \notin G(f)$, there exist an open set U in X and an open set V in Y containing x and y , respectively, such that $(cl_s U \times cl_s V) \cap G(f) = \emptyset$. The graph of f is said to be θ_{cl} -closed with respect to X if for each $(x, y) \notin G(f)$, there exist an open set U in X and an open set V in Y containing x and y , respectively, such that $f(cl_s U) \cap V = \emptyset$. If $f: X \rightarrow Y$ is a strongly θ_{cl} -continuous function and Y is Hausdorff, then $G(f)$ is θ_{cl} -closed with respect to X .

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- If X is a θ_{cl} -space, then $C(X) = S_{cl}(X)$, and whenever X is completely regular the converse is true.
- For every topological space X , there is an ultra-Hausdorff space Y such that $S_{cl}(X) \cong C(Y)$. Also if X is compact, then Y is zero-dimensional.

How to cite: Etebar, Masoumeh, (2023). Strongly θ_{cl} -Continuous Functions. *Mathematical Researches*, 9 (2), 107 – 124.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

نگاشت‌های به طور قوی θ_{cl} - پیوسته

معصومه اعتبار^۱

۱. گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. رایانامه: m.etebar@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله کلاسی از نگاشت‌های پیوسته میان فضاهای توپولوژی؛ به نام نگاشت‌های به طور قوی θ_{cl} - پیوسته، مورد بررسی قرار می‌گیرد. با بررسی ویژگی‌های اساسی نگاشت‌های به طور قوی θ_{cl} - پیوسته، مشاهده می‌شود که این خواص، مشابه خواص نگاشت‌های پیوسته هستند. حلقه‌ی شامل تمام نگاشت‌های حقیقی - مقدار به طور قوی θ_{cl} - پیوسته روی فضای توپولوژی X را با $S_{cl}(X)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که اگر برد یک نگاشت به طور قوی θ_{cl} - پیوسته f یک T_1 - فضا باشد، آن‌گاه f روی شبه مؤلفه‌های همبندی دامنه‌ی خود ثابت است. با استفاده از این موضوع، ثابت می‌کنیم که برای هر فضای توپولوژی X ، فضای فراهاسدورف Y وجود دارد که $S_{cl}(X) \cong C(Y)$. رفتار این نگاشت‌ها در ارتباط با اصول موضوع تفکیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نشان می‌دهیم که اگر f یک نگاشت به طور قوی θ_{cl} - پیوسته از فضای توپولوژی X به T_0 - فضای Y باشد، آن‌گاه X فراهاسدورف است. خواص توپولوژیکی نگاره‌ی مستقیم و نگاره‌ی وارون فضاهایی با ویژگی‌های توپولوژیکی معین، تحت نگاشت‌های به طور قوی θ_{cl} - پیوسته بررسی می‌شود. از جمله ثابت می‌شود که نگاره‌ی مستقیم هر فضای cl - بستار فشرده تحت یک نگاشت به طور قوی θ_{cl} - پیوسته، فشرده است. در پایان، ویژگی‌های نمودارهای این نگاشت‌ها بیان می‌شود. ثابت می‌شود که برای هر فضای فشرده و هاسدورف مانند Y ، به طور قوی θ_{cl} - پیوستگی نگاشت $f: X \rightarrow Y$ با θ_{cl} - بسته بودن نمودار آن نسبت به X معادل است.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۷/۴ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲	
واژه‌های کلیدی: مجموعه‌ی θ_{cl} - باز، مجموعه‌ی θ_{cl} - بسته، θ_{cl} - فضا، فضای cl - بستار فشرده، نمودار θ_{cl} - بسته.	

استناد: اعتبار، معصومه (۱۴۰۲). نگاشت‌های به طور قوی θ_{cl} - پیوسته. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۲)، ۱۰۷ - ۱۲۴.



مقدمه

هدف این مقاله بررسی خواص نوعی قوی از نگاشت های پیوسته به نام نگاشت های به طور قوی θ_{cl} -پیوسته و همچنین مطالعه حلقه های نگاشت های به طور قوی θ_{cl} -پیوسته حقیقی مقدار روی یک فضای توپولوژی است که برای اولین بار در [۴] معرفی شده است. کلاس نگاشت های به طور قوی θ_{cl} -پیوسته شامل کلاس نگاشت های cl -بالا پیوسته (نگاشت های بستباز پیوسته) است که توسط ریلی و وامانامورتی در [۹] معرفی شد و خواص این نگاشت ها توسط سینک در [۱۰] مورد بررسی قرار گرفت و سپس افروز و همکارانش حلقه های نگاشت های بستباز پیوسته حقیقی مقدار روی یک فضای توپولوژی را در [۱۱] بررسی نمودند. هر دوی این کلاس ها مشمول کلاس نگاشت های به طور قوی θ -پیوسته و کلاس نگاشت های R_{cl} -بالا پیوسته می باشند که توسط نویری، تیاگی و همکاران در [۸، ۱۳] معرفی و مطالعه شدند. مجموعه A در فضای توپولوژی X را cl -باز گوئیم، هر گاه A به صورت اجتماعی از مجموعه های بستباز باشد. متمم یک مجموعه cl -باز را cl -بسته گوئیم. برای مجموعه A در فضای توپولوژی X ، cl -بستار A مجموعه ای شامل تمام نقاط $x \in X$ است که هر مجموعه بستباز شامل x ، A را قطع می کند و این مجموعه به صورت $[A]_{cl}$ در [۱۰] (در $cl_s A$ در [۱]) نمایش داده می شود. بنابراین مجموعه A ، cl -بسته است اگر و تنها اگر $A = cl_s A$. مجموعه U در فضای توپولوژی X را r_{cl} -باز گوئیم، اگر U به صورت اجتماعی از مجموعه های cl -بسته باشد. فضای توپولوژی X یک- R_{cl} فضا نامیده می شود، اگر هر مجموعه r_{cl} -باز در آن r_{cl} -باز باشد. برای $A \subseteq X$ ، مجموعه ای شامل تمام نقاط $x \in A$ که A شامل یک همسایگی بسته ای شامل x است را با $\text{int}_\theta A$ نمایش می دهیم. [۱۴]. گفته می شود مجموعه B ، θ -باز است، اگر $B = \text{int}_\theta B$. متمم یک مجموعه θ -باز را θ -بسته نامیم. مجموعه ای شامل تمام نقاط $x \in X$ که هر همسایگی بسته ای شامل x ، A را قطع می کند، θ -بستار A نامیده می شود و با $cl_\theta A$ نشان داده می شود. تابع $f: X \rightarrow Y$ را cl -بالا پیوسته (R_{cl} -بالا پیوسته، به طور قوی θ -پیوسته) گوئیم، هر گاه برای هر مجموعه V در Y ، $f^{-1}(V)$ در X ، cl -باز (r_{cl} -باز، θ -باز) باشد.

۱. نگاشت های به طور قوی θ_{cl} -پیوسته

در این بخش پس از مشخصه سازی نگاشت های به طور قوی θ_{cl} -پیوسته، به بررسی ارتباط میان حلقه های نگاشت های حقیقی - مقدار به طور قوی θ_{cl} -پیوسته روی فضای توپولوژی X با حلقه های $C(X)$ می پردازیم. در ادامه ویژگی های اساسی نگاشت های به طور قوی θ_{cl} -پیوسته مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرد. ابتدا به بیان مفاهیم زیر می پردازیم که برگرفته از مرجع [۴] می باشند.

گوئیم نگاشت $f: X \rightarrow Y$ در $x \in X$ به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است، اگر برای هر مجموعه V در Y شامل $f(x)$ ، مجموعه U در X شامل x موجود باشد که $f(cl_s U) \subseteq V$. گفته می شود که f به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است، اگر در هر $x \in X$ به طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد. بدیهی است که هر نگاشت به طور قوی θ_{cl} -پیوسته،

به‌طور قوی θ -پیوسته است، اما عکس این گزاره لزوماً برقرار نیست. به عنوان مثال، نگاشت همانی روی \mathbb{R} به‌طور قوی θ -پیوسته است، اما به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته نمی‌باشد.

برای مجموعه‌ی A در فضای توپولوژی X ، مجموعه‌ی شامل تمام نقاط $x \in X$ که هر همسایگی cl بسته‌ی شامل x ، با A اشتراک ناتهی دارد را θ_{cl} -بستار A گوئیم و با $cl_{\theta_{cl}} A$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی H در فضای توپولوژی X را θ_{cl} بسته گوئیم، اگر $H = cl_{\theta_{cl}} H$. مجموعه‌ی شامل تمام نقاط $x \in A$ که A شامل یک همسایگی cl -بسته‌ی شامل x باشد را θ_{cl} -درون A نامیم و با $\text{int}_{\theta_{cl}} A$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی G را θ_{cl} -باز گوئیم، اگر $G = \text{int}_{\theta_{cl}} G$. بدیهی است که هر مجموعه‌ی θ_{cl} -باز (θ_{cl} -بسته) یک مجموعه‌ی باز (بسته) است. افزون بر آن، متمم یک مجموعه‌ی θ_{cl} -باز (θ_{cl} -بسته) یک مجموعه‌ی θ_{cl} -بسته (θ_{cl} -باز) می‌باشد. خانواده‌ی شامل تمام مجموعه‌های θ_{cl} -باز در فضای (X, τ) یک توپولوژی روی X تشکیل می‌دهد که با $\tau_{\theta_{cl}}$ نشان داده می‌شود. فضای $(X, \tau_{\theta_{cl}})$ را با $X_{\theta_{cl}}$ نشان می‌دهیم.

قضیه‌ی زیر نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته را توصیف می‌کند. به دلیل سادگی، از ذکر اثبات آن صرف‌نظر می‌شود.

قضیه ۱: گزاره‌های زیر برای نگاشت $f : X \rightarrow Y$ معادلند.

(۱) f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

(۲) نگاره‌ی وارون هر مجموعه‌ی بسته در Y تحت f ، θ_{cl} -بسته است.

(۳) نگاره‌ی وارون هر مجموعه‌ی باز در Y تحت f ، θ_{cl} -باز است.

(۴) نگاره‌ی وارون هر عضو زیرپایه‌ی Y تحت f ، θ_{cl} -باز است.

(۵) برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته مانند F در Y که $f(x) \notin F$ ، مجموعه‌ی θ_{cl} -باز U در X شامل x وجود دارد که $f(U) \cap F = \emptyset$.

از قضیه‌ی قبل، گزاره‌ی زیر نتیجه می‌شود.

نتیجه ۱: گزاره‌های زیر برای نگاشت $f : X \rightarrow Y$ معادلند.

(۱) f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

(۲) برای هر $A \subseteq X$ ، $f(cl_{\theta_{cl}} A) \subseteq cl f(A)$.

(۳) برای هر $B \subseteq Y$ ، $cl_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl B)$.

$$(۴) \text{ برای هر } B \subseteq Y, f^{-1}(\text{int } B) \subseteq \text{int}_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B))$$

با استفاده از قضیه ۱ و از آن جا که یک مجموعه در X, θ_{cl} - باز است اگر و تنها اگر در $X_{\theta_{cl}}$ باز باشد، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۲: نگاشت $f: X \rightarrow Y$ به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است اگر و تنها اگر $f: X_{\theta_{cl}} \rightarrow Y$ پیوسته باشد.

مشابه R_{cl} - فضاها، θ_{cl} - فضاها به صورت زیر معرفی می‌شوند.

فضای X را یک θ_{cl} - فضا گوئیم، اگر هر مجموعه‌ی باز در آن θ_{cl} - باز باشد [۴]. بدیهی است که θ_{cl} - بودن یک فضا یک ویژگی توپولوژیکی است و هر θ_{cl} - فضا یک R_{cl} - فضا است، اما عکس این گزاره لزوماً درست نیست. مثال زیر (مثال ۱۱۳ در [۱۲]) گویای این مطلب است.

مثال ۱: فرض کنیم M خانواده‌ی شامل تمام فرآپالایه‌های روی \mathbb{Z}^+ باشد که اصلی نیستند. گیریم $X = \mathbb{Z}^+ \cup M$ با توپولوژی فرآپالایه‌ای قوی باشد. در این صورت بنا به مثال ۲، ۳ در [۱۳]، X یک R_{cl} - فضا است. این فضا یک θ_{cl} - فضا نمی‌باشد؛ زیرا، اگر $A \in F, F \in M$ و $U = A \cup \{F\}$ ، آن‌گاه U مجموعه‌ی بازی است که θ_{cl} - باز نیست. در واقع، اگر U, θ_{cl} - باز باشد، آن‌گاه $B \in F$ و مجموعه‌ی cl - بسته‌ی C_F در X وجود دارند که $B \cup \{F\} \subseteq C_F \subseteq U$ و در نتیجه $cl(B \cup \{F\}) \subseteq U$ که تناقض است؛ زیرا بنا به بند ۳ مثال ۱۱۳ در [۱۲]، $cl(B \cup \{F\})$ شامل تمام فرآپالایه‌های آزادی در \mathbb{Z}^+ است که شامل B هستند و این مجموعه نمی‌تواند مشمول U باشد. بنابراین X یک θ_{cl} - فضا نیست.

گزاره ۱: فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت (X, τ) یک θ_{cl} - فضا است اگر و تنها اگر هر نگاشت پیوسته از (X, τ) به هر فضای (Y, σ) به طور قوی θ_{cl} - پیوسته باشد.

اثبات: \Leftarrow بدیهی است.

\Rightarrow گیریم $(Y, \sigma) = (X, \tau)$. در این صورت نگاشت همانی i روی X پیوسته و در نتیجه به طور قوی θ_{cl} - پیوسته است. پس بنا به قضیه ۱، برای هر $U \in \tau, i^{-1}(U) = U$ ، یک مجموعه‌ی θ_{cl} - باز در X می‌باشد که نتیجه می‌دهد X یک θ_{cl} - فضا است.

مجموعه‌ی شامل تمام نگاشت‌های حقیقی - مقدار به طور قوی θ_{cl} - پیوسته روی فضای X را با $S_{cl}(X)$ نشان می‌دهیم. با استفاده از قضیه ۱ می‌توان مشاهده نمود که $S_{cl}(X)$ با اعمال جمع و ضرب معمولی یک زیرحلقه و زیرمشبکه‌ی $C(X)$ می‌باشد که $C(X)$ حلقه‌ی تمام نگاشت‌های حقیقی مقدار پیوسته روی X است.

برای هر $f \in C(X)$ ، صفر-مجموعه‌ی f ؛ که با $Z(f)$ نشان داده می‌شود، مجموعه‌ی شامل تمام نقاطی مانند $x \in X$ است که $f(x) = 0$. مجموعه‌ی شامل تمام صفر-مجموعه‌های X را با $Z(X)$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی $X \setminus Z(f)$ را متمم صفر-مجموعه‌ی f نامیم و با $\text{coz}(f)$ نشان می‌دهیم. بنا به قضیه ۲،۳ در [۵]، فضای توپولوژی X کاملاً منظم است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی $Z(X)$ پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در X باشد اگر و تنها اگر مجموعه‌ی شامل تمام متمم صفر-مجموعه‌های X پایه‌ای برای مجموعه‌های باز در X باشد. قضیه‌ی زیر ارتباط میان $C(X)$ و $S_{cl}(X)$ را بیان می‌کند.

قضیه ۲: اگر X یک θ_{cl} -فضا باشد، آن‌گاه $C(X) = S_{cl}(X)$ و اگر X کاملاً منظم باشد، عکس آن نیز برقرار است.

اثبات: اگر X یک θ_{cl} -فضا باشد، آن‌گاه بنا به گزاره ۱، $C(X) = S_{cl}(X)$. برعکس، فرض کنیم X کاملاً منظم باشد و $C(X) = S_{cl}(X)$. همچنین فرض کنیم $f \in C(X)$ و $x \in \text{coz}(f)$. بنابراین $f(x) \neq 0$ و چون $f \in S_{cl}(X)$ ، پس مجموعه‌ی باز U شامل x در X وجود دارد که برای هر $y \in cl_s U$ ، $f(y) \neq 0$ و در نتیجه $cl_s U \subseteq \text{coz}(f)$. پس $\text{coz}(f)$ یک مجموعه‌ی θ_{cl} -باز است و از آن‌جا که هر مجموعه‌ی باز در X به صورت اجتماعی از متمم صفر-مجموعه‌هاست، پس هر مجموعه‌ی باز، θ_{cl} -باز خواهد بود. بنابراین X یک θ_{cl} -فضاست.

حال به بررسی ویژگی‌های اساسی نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته می‌پردازیم و مشاهده خواهیم کرد که مشابه ویژگی‌های شناخته شده در مورد پیوستگی هستند. حال لم زیر را بیان می‌کنیم که به‌طور مستقیم از نتیجه ۲ حاصل می‌شود.

لم ۱: اگر $f: X \rightarrow Y$ به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته و $g: Y \rightarrow Z$ پیوسته باشد، آن‌گاه $g \circ f: X \rightarrow Z$ به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

مشابه نگاشت باز، نگاشت θ_{cl} -باز را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱: نگاشت $f: X \rightarrow Y$ را θ_{cl} -باز گوئیم، اگر تصویر هر مجموعه‌ی θ_{cl} -باز در X ، یک مجموعه‌ی باز در Y باشد. نگاشت θ_{cl} -بسته نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

بدیهی است که هر نگاشت θ_{cl} -باز روی فضای توپولوژی X ، روی $X_{\theta_{cl}}$ باز است.

گزاره ۲: فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت θ_{cl} -باز، به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته و پوشا باشد. همچنین فرض کنیم $g: Y \rightarrow Z$ یک نگاشت باشد. در این صورت $g \circ f$ به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است اگر و تنها اگر g پیوسته باشد. افزون بر آن، اگر علاوه بر شروط فوق، نگاره‌ی هر مجموعه‌ی θ_{cl} -باز در X تحت نگاشت f ، θ_{cl} -باز باشد، آن‌گاه g به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

اثبات: شرط لازم با استفاده از خواص پیوستگی و از آنجا که بنا به نتیجه ۲، gof روی $X_{\theta_{cl}}$ پیوسته و f روی $X_{\theta_{cl}}$ پیوسته و باز است، به سادگی اثبات می شود. شرط کافی، نتیجه مستقیم لم ۱ می باشد. برای اثبات گزاره ی دوم، فرض کنیم W مجموعه ی باز ی در Z باشد. از آنجا که gof به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است، $(gof)^{-1}(W)$ ، در $X_{\theta_{cl}}$ باز است و چون f پوشاست، $f((gof)^{-1}(W)) = f(f^{-1}(g^{-1}(W))) = g^{-1}(W)$ که بنا به فرض، در $Y_{\theta_{cl}}$ باز است. پس بنا به قضیه ۱، g به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

مشابه پیوستگی، اگر $f: X \rightarrow Y$ به طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد و $A \subseteq X$ ، آن گاه نگاشت تحدید $f|_A: A \rightarrow Y$ نیز به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است. برای بیان عکس این گزاره به مفهوم θ_{cl} -نشاندگی نیاز داریم. گفته می شود که مجموعه ی S در فضای توپولوژی $X_{\theta_{cl}}$ ، θ_{cl} -نشاندگی است، اگر هر مجموعه ی θ_{cl} -باز $(\theta_{cl}$ -بسته) در S به صورت اشتراک S با یک مجموعه ی θ_{cl} -باز $(\theta_{cl}$ -بسته) در X باشد.

گزاره ۳: گزاره های زیر برای نگاشت $f: X \rightarrow Y$ برقرارند.

(۱) فرض کنیم خانواده ی $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ پوششی از مجموعه های θ_{cl} -باز برای X باشد که هر U_α در $X_{\theta_{cl}}$ یک θ_{cl} -نشاندگی است. اگر برای هر $\alpha \in \Lambda$ ، نگاشت $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$ به طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد، آن گاه f به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

(۲) فرض کنیم $\{F_i \mid 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ پوششی از مجموعه های θ_{cl} -بسته برای X باشد که هر F_i در $X_{\theta_{cl}}$ یک θ_{cl} -نشاندگی است. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $f|_{F_i}$ به طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد، آن گاه f به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

اثبات: (۱) فرض کنیم $V \subseteq Y$ باز باشد. چون هر f_α به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است، پس بنا به قضیه ۱، هر $f_\alpha^{-1}(V)$ یک مجموعه ی θ_{cl} -باز در U_α است و از آنجا که U_α یک مجموعه ی θ_{cl} -باز و θ_{cl} -نشاندگی در X است، پس $f_\alpha^{-1}(V)$ در $X_{\theta_{cl}}$ باز خواهد بود. حال $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha^{-1}(V)$ به صورت اجتماعی از مجموعه های θ_{cl} -باز در X است و در نتیجه $f^{-1}(V)$ در $X_{\theta_{cl}}$ باز و بنا به قضیه ۱، f به طور قوی θ_{cl} -پیوسته می باشد.

(۲) اثبات مشابه قسمت (۱) است.

در ادامه شرایطی را بیان می کنیم که در آن، قضایای مربوط به حاصلضرب نگاشت های به طور قوی θ -پیوسته در [۷] برای نگاشت های به طور قوی θ_{cl} -پیوسته نیز برقرار باشد.

قضیه ۳: فرض کنیم $\{f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ خانواده ای از نگاشت ها باشد و نگاشت

$$f: \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$$

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f((x_\alpha)) = (f_\alpha(x_\alpha))$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) اگر هر f_α به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

(۲) اگر f پیوسته و هر X_α یک θ_{cl} -فضا باشد، آن‌گاه هر f_α ، به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

اثبات: (۱) فرض کنیم هر f_α به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته و V یک عضو زیرپایه برای $\prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ باشد. در این صورت $\beta \in \Lambda$ و مجموعه‌ی باز V_β در Y_β وجود دارند که $V = V_\beta \times \prod_{\alpha \neq \beta} Y_\alpha$. چون f_β به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است، بنا به قضیه ۱، $f_\beta^{-1}(V_\beta)$ در X_β ، θ_{cl} -باز خواهد بود. داریم $f^{-1}(V) = f_\beta^{-1}(V_\beta) \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$. بنابراین $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی θ_{cl} -باز در $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ می‌باشد و در نتیجه بنا به قضیه ۱، f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

(۲) از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

نکته ۱: بنا به قضیه ۲ در [۲]، اگر X و Y دو فضای توپولوژی باشند که حداقل یکی از آنها فشرده است و C مجموعه‌ی بستبازی در $X \times Y$ شامل (x, y) باشد، آن‌گاه مجموعه‌های بستباز U در X و V در Y وجود دارند که $(x, y) \in U \times V \subseteq C$.

حال به بیان قضیه‌ی زیر می‌پردازیم.

قضیه ۴: فرض کنیم $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ و $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ دو نگاشت باشند و نگاشت

$$f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$$

را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(X_1, X_2) = (f_1(X_1), f_2(X_2))$$

اگر حداقل یکی از فضاهای X_1 و X_2 فشرده و f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد، آن‌گاه f_1 و f_2 به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته هستند.

اثبات: برای اثبات، کفایت نشان دهیم که برای $A \subseteq X_1$ و $A_1 \subseteq X_2$ ، مجموعه $A \times A_1$ در $X_1 \times X_2$ ، θ_{cl} - باز است اگر و تنها اگر A و A_1 به ترتیب در X_1 و X_2 ، θ_{cl} - باز باشند. برای این منظور، فرض کنیم A در X_1 و A_1 در X_2 هر دو θ_{cl} - باز باشند. در این صورت $A \times A_1$ و $X_1 \times X_2$ هر دو در $X_1 \times X_2$ ، θ_{cl} - باز هستند. در نتیجه $A \times A_1$ که به صورت اشتراک دو مجموعه θ_{cl} - باز است، در $X_1 \times X_2$ ، θ_{cl} - باز خواهد بود. حال فرض کنیم $A \times A_1$ در $X_1 \times X_2$ ، θ_{cl} - باز باشد. حال نشان می‌دهیم که برای هر $U \subseteq X_1$ و $V \subseteq X_2$ ، $cl_s(U \times V) = cl_s U \times cl_s V$. برای این منظور، فرض می‌کنیم که $(x, y) \in cl_s(U \times V)$ و W مجموعه بستبازی شامل x در X باشد. در این صورت $W \times Y$ مجموعه بستبازی شامل (x, y) در $X_1 \times X_2$ خواهد بود و در نتیجه $(W \times Y) \cap (U \times V) \neq \emptyset$ بنابراین $W \cap U \neq \emptyset$ که نتیجه می‌شود. $x \in cl_s U$ به صورت مشابه می‌توان ثابت کرد که $y \in cl_s V$. حال فرض کنیم $(x, y) \in cl_s U \times cl_s V$ و C مجموعه بستبازی شامل (x, y) در $X_1 \times X_2$ باشد. بنا به نکته ۱، مجموعه های بستباز W_1 و W_2 به ترتیب شامل x در X_1 و y در X_2 وجود دارند که $(x, y) \in W_1 \times W_2 \subseteq C$. چون $x \in cl_s U$ و $y \in cl_s V$ پس $W_1 \cap U \neq \emptyset$ و $W_2 \cap V \neq \emptyset$ و در نتیجه $C \cap (U \times V) \neq \emptyset$ پس $(x, y) \in cl_s(U \times V)$ که نشان می‌دهد $cl_s(U \times V) = cl_s U \times cl_s V$. با استفاده از این مطلب، نتیجه می‌گیریم که A و A_1 به ترتیب در X_1 و X_2 ، θ_{cl} - باز هستند.

قضیه ۵: فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ خانواده‌ای از فضاهاى توپولوژى باشد و $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. نگاشت $f: Y \rightarrow X$ به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in \Lambda$ ، $\pi_\alpha \circ f$ به طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد.

اثبات: با استفاده از نتیجه ۲ و همچنین خواص پیوستگی به آسانی قابل اثبات است.

حال نتیجه‌ی زیر را می‌توان به آسانی از قضیه‌ی فوق نتیجه گرفت.

نتیجه ۳: فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت باشد و نگاشت

$$g: X \rightarrow X \times Y$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = (x, f(x))$$

در این صورت g به طور قوی θ_{cl} -پیوسته است اگر و تنها اگر f به طور قوی θ_{cl} -پیوسته و X یک θ_{cl} -فضا باشد.

نگاشت g معرفی شده در نتیجه ۳ را نگاشت نموداری نگاشت f می‌نامیم.

نکته ۲: فرض θ_{cl} - فضا بودن در نتیجه ۳ لازم است. به عنوان مثال، فرض کنیم $X = Y = \{a, b, c\}$ ، $\tau_X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ و $\tau_Y = \{\emptyset, \{c\}, Y\}$. در این صورت نگاشت $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ با ضابطه‌ی $f(x) = c$ به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است، اما نگاشت نموداری آن به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته نمی‌باشد.

۲. حلقه‌ی $S_{cl}(X)$

در این بخش، ابتدا رفتار نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته را روی شبه مؤلفه‌های همبندی بررسی کرده و سپس با استفاده از آن نشان می‌دهیم که حلقه‌ی $S_{cl}(X)$ با یک $C(Y)$ یکرخت است. حال به بیان تعاریف و مفاهیم لازم می‌پردازیم. مؤلفه‌ی همبندی نقطه‌ی x در فضای توپولوژی X زیرمجموعه‌ی همبند ماکسیمال C_x شامل x در X تعریف می‌شود. اشتراک تمام مجموعه‌های بستباز در X شامل x را شبه‌مؤلفه‌ی همبندی x در X گوئیم و با Q_x نشان می‌دهیم. بدیهی است که $C_x \subseteq Q_x$ و ممکن است تساوی برقرار نباشد، مثال ۲۴، ۱، ۶ در [۳] را ببینید. یک فضای توپولوژی را کاملاً ناهمبند گوئیم، اگر تنها مؤلفه‌های همبندی ناتهی آن، مجموعه‌های تک عضوی باشند. بر اساس [۶]، فضای توپولوژی X به‌طور ضعیف همبند موضعی خوانده می‌شود، اگر هر مؤلفه‌ی همبندی در X باز باشد.

قضیه ۶: گزاره‌های زیر برای نگاشت به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته‌ی $f: X \rightarrow Y$ برقرارند.

$$(۱) \text{ برای هر } x \in X, f[Q_x] \subseteq Q_{f(x)}$$

$$(۲) \text{ اگر } Y \text{ یک } T_1\text{-فضا باشد، آن‌گاه برای هر } x \in X, f[Q_x] = \{f(x)\}$$

$$(۳) \text{ اگر } f \text{ یک به یک و } Y \text{ یک } T_1\text{-فضا باشد، آن‌گاه } X \text{ کاملاً ناهمبند است.}$$

اثبات: (۱) فرض کنیم $x \in X$ ، $z \in Q_x$ و $f(z) \notin Q_{f(x)}$. در این صورت مجموعه‌ی بستباز V شامل $f(x)$ وجود دارد به طوری که $f(z) \notin V$. از آن‌جا که f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است، پس مجموعه‌ی باز U شامل x وجود دارد به طوری که $f(cl_s U) \subseteq V$. به این ترتیب با توجه به این که $Q_x \subseteq cl_s U$ ، داریم $f[Q_x] \subseteq f[cl_s U] \subseteq V$ که این یک تناقض است.

(۲) فرض کنیم $y \in Q_x$ و $f(x) \neq f(y)$. در این صورت مجموعه‌ی باز V در Y وجود دارد که $f(x) \in V$ و $f(y) \notin V$. از آن‌جا که f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است، مجموعه‌ی باز U شامل x در X وجود دارد که $f[cl_s U] \subseteq V$ و در نتیجه $f(y) \in V$ که تناقض است.

(۳) با استفاده از بند (۲)، اگر f یک به یک باشد، آن‌گاه برای هر $x \in X$ ، $Q_x = \{x\}$ و در نتیجه برای هر $x \in X$ ، $C_x = \{x\}$ ، کاملاً ناهمبند است.

نتیجه ۴: فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت به طور قوی θ_{cl} -پیوسته و Y یک T_1 -فضا باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) f روی هر شبه‌مؤلفه‌ی همبندی در X ثابت است.

(۲) اگر X همبند باشد، آن‌گاه f روی X ثابت است.

نتیجه ۵: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد و $f \in S_{cl}(X)$. در این صورت برای هر $x \in X$ ،

$$f[Q_x] = \{f(x)\}$$

حال به بیان نتیجه‌ی اصلی این بخش می‌پردازیم. قبل از آن مفهوم فضاهای فراهاسدورف را یادآوری می‌کنیم. فضای توپولوژی X را فراهاسدورف گوییم، هرگاه برای هر دو نقطه‌ی متمایز $x, y \in X$ مجموعه‌ی بستباز U در X موجود باشد که $x \in U$ و $y \notin U$ [۱۱].

قضیه ۷: برای هر فضای توپولوژی X ، فضای فراهاسدورف Y وجود دارد که $S_{cl}(X) \cong C(Y)$.

اثبات: قرار می‌دهیم $Y = \{Q_x \mid x \in X\}$ و توپولوژی τ روی Y را گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌هایی مانند G در Y اختیار می‌کنیم که $\bigcup_{Q_x \in G} Q_x$ یک مجموعه‌ی θ_{cl} -باز در X باشد. حال نشان می‌دهیم که (Y, τ) یک فضای فراهاسدورف است. برای این منظور، فرض کنیم Q_x و Q_y در نقطه‌ی متمایز در Y باشند. در این صورت $x \notin Q_y$ و در نتیجه مجموعه‌ی بستباز U در X وجود دارد که $x \in U$ و $y \notin U$. حال قرار می‌دهیم $G = \{Q_z : z \in U\}$. در این صورت $U = \bigcup_{Q_z \in G} Q_z$ در X بستباز و در نتیجه θ_{cl} -باز و بسته است و در نتیجه G مجموعه‌ی بستبازی در Y است که $Q_x \in G$ و $Q_y \notin G$. بنابراین Y فراهاسدورف خواهد بود.

حال ثابت می‌کنیم که حلقه‌های $S_{cl}(X)$ و $C(Y)$ یکرخت هستند. نگاشت $\sigma: S_{cl}(X) \rightarrow C(Y)$ را به صورت $\sigma(f) = f_c$ برای هر $f \in S_{cl}(X)$ تعریف می‌کنیم که در آن $f_c: Y \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f_c(Q_x) = f(x)$ تعریف می‌شود. بنا به نتیجه ۵، f_c و σ خوش‌تعریف هستند. ابتدا نشان می‌دهیم که $f_c \in C(Y)$. برای این منظور، فرض کنیم $Q_x \in Y$ و $f_c(Q_x) = f(x) = r$. از آن‌جا که $f \in S_{cl}(X)$ ، برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ی θ_{cl} -باز U شامل x در X وجود دارد که $f(U) \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. حال قرار می‌دهیم $G = \{Q_z : Q_z \subseteq U\}$. چون U یک مجموعه‌ی θ_{cl} -باز در X است، پس برای هر $y \in U$ ، مجموعه‌ی θ_{cl} -باز V در X وجود دارد که $y \in V \subseteq cl_s V \subseteq U$ و از آن‌جا که $cl_s V$ یک مجموعه‌ی cl -بسته‌ی شامل y و Q_y کوچکترین مجموعه‌ی cl -بسته‌ی شامل y است، پس $Q_y \subseteq cl_s V$ و در نتیجه $Q_y \in G$. پس $U = \bigcup_{Q_z \in G} Q_z$ در X بستباز است که $f_c(G) \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ و در نتیجه f_c پیوسته می‌باشد. بدیهی است که σ یک هم‌ریختی

یک به یک است. برای اثبات پوشا بودن σ ، فرض کنیم $f \in C(Y)$ و نگاشت $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $g(x) = f(Q_x)$ تعریف می‌کنیم. به آسانی می‌توان دید که $g \in S_{cl}(X)$ و $\sigma(g) = f$.

یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژی X صفر-بعدی نامیده می‌شود، اگر هاسدورف باشد و دارای پایه‌ای شامل مجموعه‌های بستباز باشد.

نتیجه ۶: اگر X یک فضای فشرده باشد، آنگاه فضای صفر-بعدی Z وجود دارد که $S_{cl}(X) \cong C(Z)$.

اثبات: قرار می‌دهیم $Z = Y$ که همان فضای توپولوژی معرفی شده در قضیه ۷ است. بنا به قضیه ۷، Z فراهاسدورف و در نتیجه هاسدورف است. حال فرض کنیم F یک مجموعه‌ی بسته در Y باشد و $Q_x \notin F$. برای هر $z \in X$ که $Q_z \in F$ و از آنجا که $Q_z \neq Q_x$ ، $Q_z \in V_z$ و $Q_x \notin V_z$ ، $Q_x \notin V_z$ و $Q_z \in V_z$ ، حال قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{Q_z \in F} Q_z$ و $G_z = \bigcup_{Q_y \in V_z} Q_y$. چون A فشرده است، $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in A$ وجود دارند که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{z_i}$. حال قرار می‌دهیم $G = \bigcup_{i=1}^n G_{z_i}$. در این صورت G مجموعه‌ی بستبازی در X است که $A \subseteq G$ و $x \notin G$. حال قرار می‌دهیم $H = \{Q_z : Q_z \subseteq G\}$. در این صورت H مجموعه‌ی بستبازی در Z است که $F \subseteq H$ و $Q_x \notin H$ و در نتیجه Z صفر-بعدی است.

نتیجه ۷: اگر X یک فضای به‌طور ضعیف همبند موضعی باشد، آنگاه فضای گسسته‌ی Z وجود دارد که $S_{cl}(X) \cong C(Z)$.

اثبات: قرار می‌دهیم $Z = Y$ که همان فضای توپولوژی معرفی شده در قضیه ۷ است. چون X به‌طور ضعیف همبند موضعی است، برای هر $x \in X$ داریم $C_x = Q_x$ و در نتیجه Q_x یک مجموعه‌ی بستباز در X می‌باشد. بنابراین Q_x در X ، θ_{cl} -باز و در نتیجه $\{Q_x\}$ در Z باز می‌باشد که نشان می‌دهد Z گسسته است.

۳. ویژگی‌های توپولوژیکی و نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته

در این بخش ارتباط میان ویژگی‌های توپولوژیکی و نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

گزاره ۴: فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت دوسویی، باز و به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد. در این صورت X و Y دو θ_{cl} -فضای همسانریخت هستند.

اثبات: آسان است.

گزاره ۵: فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته باشد. اگر Y یک θ_{cl} -فضا باشد، آنگاه f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم $x \in X$ و V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. از آنجا که Y یک θ_{cl} -فضاست، مجموعه‌ی باز W در Y وجود دارد که $f(x) \in W \subseteq cl_s W \subseteq V$. به راحتی ثابت می‌شود اگر $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای هر مجموعه‌ی باز W در Y داریم $(cl_s f^{-1}(W)) \subseteq f^{-1}(cl_s W)$. با استفاده از این گزاره نتیجه می‌شود $(f^{-1}(V)) \subseteq cl_s f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(V)$ که نشان می‌دهد $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی θ_{cl} -باز در X است و در نتیجه f به طور قوی θ_{cl} -پیوسته می‌باشد.

گزاره ۶: فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت یک به یک و به طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد. اگر Y یک T_0 -فضا باشد، آن‌گاه X فراهاسدورف است.

اثبات: فرض کنیم x_1 و x_2 دو نقطه‌ی متمایز در X باشند. در این صورت $f(x_1) \neq f(x_2)$. چون Y یک T_0 -فضاست، مجموعه‌ی باز V در Y وجود دارد که شامل یکی از نقاط $f(x_1)$ یا $f(x_2)$ و نه هر دو باشد. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنیم $f(x_1) \in V$ و $f(x_2) \notin V$. در این صورت مجموعه‌ی باز U در X شامل x_1 وجود دارد که $f(cl_s U) \subseteq V$. بنابراین $x_2 \notin cl_s U$ و در نتیجه مجموعه‌ی بستباز W در X وجود دارد که $x_1 \in W$ و $x_2 \notin W$ که نشان می‌دهد X فراهاسدورف است.

در ادامه‌ی این بخش، ارتباط میان نگاشت‌های به طور قوی θ_{cl} -پیوسته و ویژگی cl -بستار فشردگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا به معرفی این مفهوم می‌پردازیم. فضای توپولوژی X را cl -بستار فشرده گوئیم، اگر برای هر پوشش باز X مانند $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ موجود باشند که $X = \bigcup_{i=1}^n cl_s U_{\alpha_i}$. گفته می‌شود مجموعه‌ی A نسبت به cl -بستار فشرده است، هرگاه برای هر پوشش A از زیرمجموعه‌های باز X ، زیرخانواده‌ی متناهی موجود باشد که cl -بستارهای اعضای آن پوششی برای A باشد [۴].

نکته ۳: یادآوری می‌کنیم که X یک فضای H -بسته نامیده می‌شود، اگر هر پوشش باز X دارای زیرخانواده‌ی متناهی باشد که بستارهای اعضای آن پوششی برای X باشد. بدیهی است که هر فضای H -بسته، cl -بستار فشرده است، اما عکس این گزاره لزوماً درست نیست. به عنوان مثال، \mathbb{R} با توپولوژی معمولی، فضای cl -بستار فشرده‌ای است که H -بسته نمی‌باشد. افزون بر آن، هر زیرفضای cl -بستار فشرده‌ی X ، نسبت به X ، cl -بستار فشرده است. همچنین، اگر $A \subseteq Y \subseteq X$ و A نسبت به Y ، cl -بستار فشرده باشد، آن‌گاه A نسبت به X ، cl -بستار فشرده است. به آسانی می‌توان مشاهده نمود که هر زیرمجموعه‌ی θ_{cl} -بسته‌ی فضای cl -بستار فشرده‌ی X ، نسبت به X ، cl -بستار فشرده است.

نتیجه‌ی بعد نشان می‌دهد که cl -بستار فشردگی یک ویژگی توپولوژیکی است.

قضیه ۸: نگاره‌ی یک فضای cl -بستار فشرده تحت یک نگاشت پیوسته، cl -بستار فشرده است.

اثبات: فرض کنیم X یک فضای cl -بستار فشرده و $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته و پوشا باشد. همچنین فرض کنیم $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوشش بازی برای Y باشد. در این صورت $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ پوشش بازی برای X است و بنا به cl -بستار فشرده‌گی X ، مجموعه‌ی متناهی $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq I$ وجود دارد که $X = \bigcup_{i=1}^n cl_s f^{-1}(V_{\alpha_i})$. بنابراین

$$Y = \bigcup_{i=1}^n f(cl_s f^{-1}(V_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^n cl_s V_{\alpha_i}$$

که نشان می‌دهد Y یک فضای cl -بستار فشرده است.

قضیه ۹: نگاره‌ی یک فضای cl -بستار فشرده تحت یک نگاشت به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته، فشرده است.

اثبات: فرض کنیم X یک فضای cl -بستار فشرده و $f: X \rightarrow Y$ به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته و پوشا باشد. همچنین فرض کنیم V پوشش بازی برای Y باشد. در این صورت برای هر $x \in X$ ، مجموعه‌ی باز $V_x \in V$ وجود دارد که $f(x) \in V_x$. پس مجموعه‌ی باز U_x در X شامل x وجود دارد که $f(cl_s U_x) \subseteq V_x$. حال خانواده‌ی $U = \{U_x\}_{x \in X}$ پوشش بازی برای X است که بنا به cl -بستار فشرده‌گی X ، مجموعه‌ی متناهی $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\} \subseteq U$ وجود دارد که $X = \bigcup_{i=1}^n cl_s U_{x_i}$. از این رو $Y = \bigcup_{i=1}^n f(cl_s U_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ که نشان می‌دهد Y فشرده است.

نتیجه‌ی زیر به‌طور مستقیم از قضیه ۹ حاصل می‌شود.

نتیجه ۸: فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد و $A \subseteq X$. اگر A نسبت به cl ، X - بستار فشرده باشد، آن‌گاه $f(A)$ فشرده است.

۴. نمودارهای θ_{cl} -بسته

نمودار نگاشت $f: X \rightarrow Y$ با $G(f)$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

تعریف ۲: گوییم $G(f)$ یک نمودار θ_{cl} -بسته است، اگر برای هر $(x, y) \notin G(f)$ ، مجموعه‌های باز U در X و V در Y به ترتیب شامل x و y موجود باشند که $(cl_s U \times cl_s V) \cap G(f) = \emptyset$. گوییم $G(f)$ نسبت به X ، θ_{cl} -بسته است، اگر برای هر $(x, y) \notin G(f)$ مجموعه‌های باز U در X شامل x و V در Y شامل y موجود باشند که $f(cl_s U) \cap V = \emptyset$.

گزاره ۷: فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت با نمودار θ_{cl} -بسته نسبت به X باشد. اگر Y فشرده باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم $x \in X$ و W مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. اگر $y \in Y \setminus W$ ، آن‌گاه $(x, y) \notin G(f)$ و در نتیجه مجموعه‌های باز U_y در X و V_y در Y به ترتیب شامل x و y وجود دارند که $f(cl_s U_y) \cap V_y = \emptyset$. حال خانواده‌ی $\{V_y : y \in Y \setminus W\}$ پوشش بازی برای $Y \setminus W$ است که بنا به فشردگی $Y \setminus W$ مجموعه‌ی متناهی $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq Y \setminus W$ وجود دارد که $Y \setminus W \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. قرار می‌دهیم $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$. در این صورت U مجموعه‌ی بازی در X شامل x است که $f(cl_s U) \subseteq W$ ؛ یعنی، f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است.

گزاره ۸: فرض کنیم $f : X \rightarrow Y$ یک نگاشت به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته باشد. اگر Y هاسدورف باشد، آن‌گاه $G(f)$ نسبت به X ، θ_{cl} -بسته است.

اثبات: آسان است.

حال نتیجه‌ی زیر را بیان می‌کنیم که به‌طور مستقیم از گزاره ۷ و گزاره ۸ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۹: فرض کنیم $f : X \rightarrow Y$ یک نگاشت و Y فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت f به‌طور قوی θ_{cl} -پیوسته است اگر و تنها اگر $G(f)$ نسبت به X ، θ_{cl} -بسته باشد.

سیاس‌گزاری:

نویسنده از داوران محترم که نظراتشان باعث بهبود مقاله شد و همچنین از دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل حمایت مالی این تحقیق، کمال تشکر را دارد. شماره گرنت: (SCU. MM1400. 776)

References

1. S. Afrooz, F. Azarpanah and M. Etebar, Rings of real valued clopen continuous functions, Appl. Gen. Topol., **19** (2018), 203-216.
2. R. Z. Buzyakova, On clopen sets in cartesian products, Comment. Math. Univ. Carolinae, **42** (2001), 357-362.
3. R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
4. M. Etebar, θ_{cl} -continuity and topological properties, Far East Journal of Mathematical Sciences, **107** (2018), 221-229.
5. L. Gillman and M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Springer, 1976.
6. J. K. Kohli, A class of spaces containing all connected and all locally connected spaces, Math.

- Nachr., **82** (1978), 121-129.
7. P. E. Long and L. Herrington, Strongly θ -continuous functions, J. Korean. Math. Soc., **18** (1981), 21-28.
 8. T. Noiri, On δ -continuous functions, J. Korean. Math. Soc., **18** (1980), 161-166.
 9. I. L. Reilly and M. K. Vamanamurthy, On super-continuous mappings, Indian J. Pure. Appl. Math., **14** (1983), 767-772.
 10. D. Singh, cl -supercontinuous functions, Applied Gen. Top., **8** (2007), 293-300.
 11. R. Staum, The algebra of bounded continuous functions into a nonarchimedean field, Pac. J. Math., **50** (1974), 169-185.
 12. L. A. Steen and J. A. Jr. Seebach, Counterexamples in Topology, Springer Verlag, New York 1978.
 13. B. K. Tyagi, J. K. Kohli and D. Singh, R_{cl} -supercontinuous functions, Demonstratio Math., **46** (2013), 229-244.
 14. N. V. Velichko, H -closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Trans., **78** (1968), 103-118.
 15. S. Willard, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company Inc., London, 1970.