Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Strongly θ_{cl} -Continuous Functions

Masoumeh Etebar [1]

1. Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. E-mail: m.etebar@scu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 11 August 2021
Accepted:
26 September 2021
Published online:
3 December 2023

Keywords:
θ_{cl}-open set,
θ_{cl}-closed set,
θ_{cl}-space,
cl-closure compact space,
θ_{cl}-closed graph.

ABSTRACT

Introduction

The purpose of the present paper is to study the class of strongly θ_{cl}-continuous functions, which contains the class of cl-supercontinuous functions ($\equiv$ clopen continuous functions). Both these two classes are contained in the classes of strongly θ-continuous functions and R_{cl}-supercontinuous functions. A set A in a topological space X is called cl-open if it is the union of clopen sets. The complement of a cl-open set is referred to as cl-closed. For a set A in a topological space X the set of all $x \in X$ such that every clopen set containing x intersects A is called the cl-closure of A and it is denoted by $cl_s A$. So, a set B is cl-closed if and only if $B = cl_s B$.

An open set U in a topological space X is called r_{cl}-open if it is the union of cl-closed sets. A topological space X is called an R_{cl}-space if every open set in X is r_{cl}-open. If A is a subset of X, then $int_\theta A$ denotes the set of all $x \in A$ such that A contains a closed neighborhood containing x. A set B is called θ-open if $B = int_\theta B$. The complement of a θ-open set is called *θ-closed*. The set of all $x \in X$ such that every closed neighborhood of x intersects A is called the *θ-closure* of A and it is denoted by $cl_\theta A$. So, a set B is θ-closed if and only if $B = cl_\theta B$. A function $f: X \longrightarrow Y$ is said to be *cl-supercontinuous* (respectively *R_{cl}-supercontinuous*, respectively strongly *θ-continuous*) if $f^{-1}(V)$ is cl-open (respectively r_{cl}-open, respectively θ-open) in X for every open set V in Y.

Material and methods

A function $f: X \longrightarrow Y$ is said to be *strongly θ_{cl}-continuous* at $x \in X$ if for each open set V in Y containing $f(x)$, there exists an open set U in X containing x such that $f(cl_s U) \subseteq V$. The function f is said to be *strongly θ_{cl}-continuous* if it is strongly θ_{cl}-continuous at each $x \in X$. Clearly, such functions are strongly θ-continuous but not conversely. For instance, the identity function on the real line is strongly θ-continuous, but it is not strongly θ_{cl}-continuous. This is also an example of a continuous function which is not strongly θ_{cl}-continuous. The *θ_{cl}-closure* of a set A in a topological space X, denoted by $cl_{\theta_{cl}} A$, is the set of all $x \in X$ such that each cl-closed neighborhood of x intersects A. A subset H of X is called *θ_{cl}-closed* if $H = cl_{\theta_{cl}} H$. The *θ_{cl}-interior* of A denotes the set of all $x \in A$ such that A contains a cl-closed neighborhood of x and it is denoted by $int_{\theta_{cl}} A$. A set G is called *θ_{cl}-open* if $G = int_{\theta_{cl}} G$. We denote by $S_{cl}(X)$ the ring of all real valued strongly θ_{cl} - continuous functions on a topological space X, and $C(X)$ denotes the ring of all real valued continuous functions on X.

A function $f: X \longrightarrow Y$ is strongly θ_{cl}-continuous if and only if the inverse image of a closed set under f is θ_{cl}-closed if and only if the inverse image

of an open set under f is θ_{cl}-open if and only if the inverse image of a subbasic open set under f is θ_{cl}-open if and only if for every $x \in X$ and for each closed set F in Y with $x \notin F$, there exists a θ_{cl}-open set U in X containing x such that $f(U) \cap F = \emptyset$.

A function $f: X \longrightarrow Y$ is strongly θ_{cl}-continuous if and only if $f(cl_{\theta_{cl}} A) \subseteq cl\, f(A)$ for every subset A of X if and only if $cl_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl\, B)$ for every subset B of Y if and only if $f^{-1}(int\, B)) \subseteq int_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B)$ for every subset B of Y.

Results and discussion

If $f: X \longrightarrow Y$ is a strongly θ_{cl}-continuous function and $g: Y \longrightarrow Z$ is continuous, then $g \circ f$ is strongly θ_{cl}-continuous.

A function $f: X \longrightarrow Y$ is said to be *θ_{cl}-open* (*θ_{cl}-closed*) if the image of each θ_{cl}-open (θ_{cl}-closed) set in X is open (closed) in Y.

Let $f: X \longrightarrow Y$ be a θ_{cl}-open and strongly θ_{cl}-continuous surjection and let $g: Y \longrightarrow Z$ be a function. Then $g \circ f$ is strongly θ_{cl}-continuous if and only if g is continuous. Further, if in addition $f(A)$ is θ_{cl}-open in Y for every θ_{cl}-open set A in X, then g is strongly θ_{cl}-continuous.

A subset S of a space X is said to be *θ_{cl}-embedded* in X if every θ_{cl}-open (θ_{cl}-closed) set in S is the intersection of a θ_{cl}-open (θ_{cl}-closed) set in X with S. Let $f: X \longrightarrow Y$ be a function. Let $\{U_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ be a cover of X by θ_{cl}-open sets such that each U_α is θ_{cl}-embedded in X and let $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$, $\forall \alpha \in \Lambda$. If each f_α is strongly θ_{cl}-continuous, then f is strongly θ_{cl} continuous. Let $\{F_i | i = 1, \cdots, n\}$ be a cover of X by θ_{cl}-closed sets such that each F_i is θ_{cl}-embedded in X and let $f_i = f|_{F_i}$, where $i = 1, \cdots, n$. If each f_i is strongly θ_{cl}-continuous, then f is strongly θ_{cl}-continuous.

Let $\{f_\alpha: X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ be a family of functions and let $f: \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ be a function defined by $f\big((x_\alpha)\big) = \big(f_\alpha(x_\alpha)\big)$. If each f_α is strongly θ_{cl}-continuous, then f is strongly θ_{cl}-continuous and whenever each X_α is extremally disconnected, then the converse is also true.

A space is said to be a *θ_{cl}-space* if every open set is θ_{cl}-open. A topological space (X, τ) is a θ_{cl}-space if and only if every continuous function from (X, τ) into a space (Y, σ) is strongly θ_{cl}-continuous.

Let $f: X \longrightarrow Y$ be a function and let $g: X \longrightarrow X \times Y$ be the graph function of f defined by $g(x) = \big(x, f(x)\big)$. Then g is strongly θ_{cl}-continuous if and only if f is strongly θ_{cl}-continuous and X is a θ_{cl}-space.

The *component* of a point x in a topological space X is the maximal connected subset C_x in X containing x. The *quasi-component* Q_x of x in X is the intersection of all clopen subsets of X containing x.. A space is called *totally disconnected* if the only nonempty components are singletons. For a strongly θ_{cl}-continuous function $f: X \longrightarrow Y$, $f(Q_x) \subseteq Q_{f(x)}$ for each $x \in X$ and if Y is a T_1-space, then $f(Q_x) = \{f(x)\}$ for each $x \in X$. Also if f is injective and Y is a T_1-space, then X is totally disconnected.

If $f: X \longrightarrow Y$ is an open strongly θ_{cl}-continuous injection, then X is a θ_{cl}-space. If $f: X \longrightarrow Y$ is a continuous function and Y is a θ_{cl}-space, then f is strongly θ_{cl}-continuous.

A space is called *ultra-Hausdorff* if for each pair of distinct points, there is a clopen set containing one and not the other. Let $f: X \longrightarrow Y$ be a strongly θ_{cl}-continuous injection. If Y is T_0, then X is ultra-Hausdorff.

A space X is called *cl-closure compact* if every open cover of X has a finite subcollection whose cl-closures cover X. A subset A of a space X is said to be *cl-closure compact relative to X* if for each cover of A by open sets in X, there exists a finite subcollection whose cl-closures cover A.

The strongly θ_{cl}-continuous image of a cl-closure compact space is compact. Let $f: X \longrightarrow Y$ be a strongly θ_{cl}-continuous function and let $A \subseteq X$. If A is cl-closure compact relative to X, then $f(A)$ is compact.

The graph $G(f)$ of a function $f: X \longrightarrow Y$ is said to be *θ_{cl}-closed* if for each $(x, y) \notin G(f)$, there exist an open set U in X and an open set V in Y containing x and y, respectively, such that $(cl_s U \times cl_s V) \cap G(f) = \emptyset$. The graph of f is said to be *θ_{cl}-closed with respect to X* if for each $(x, y) \notin G(f)$, there exist an open set U in X and an open set V in Y containing x and y, respectively, such that $f(cl_s U) \cap V = \emptyset$. If $f: X \longrightarrow Y$ is a strongly θ_{cl}-continuous function and Y is Hausdorff, then $G(f)$ is θ_{cl}-closed with respect to X.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- If X is a θ_{cl}-space, then $C(X) = S_{cl}(X)$, and whenever X is completely regular the converse is true.
- For every topological space X, there is an ultra-Hausdorff space Y such that $S_{cl}(X) \cong C(Y)$. Also if X is compact, then Y is zero-dimensional.

How to cite: Etebar, Masoumeh, (2023). Strongly θ_{cl}-Continuous Functions. *Mathematical Researches*, 9 (2), 107 – 124.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نگاشت های به طور قوی θ_{cl} - پیوسته

معصومه اعتبار [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. رایانامه: m.etebar@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۲۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۷/۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۹/۱۲

واژه‌های کلیدی:
مجموعه‌ی θ_{cl} - باز،
مجموعه‌ی θ_{cl} -بسته،
θ_{cl} - فضا،
فضای cl - بستار فشرده،
نمودار θ_{cl} - بسته.

چکیده

در این مقاله کلاسی از نگاشت های پیوسته میان فضاهای توپولوژی؛ به نام نگاشت های به طور قوی θ_{cl}- پیوسته، مورد بررسی قرار می‌گیرد. با بررسی ویژگی‌های اساسی نگاشت های به طور قوی θ_{cl}- پیوسته، مشاهده می‌شودکه این خواص، مشابه خواص نگاشت های پیوسته هستند. حلقه‌ی شامل تمام نگاشت های حقیقی ـ مقدار به طور قوی θ_{cl}- پیوسته روی فضای توپولوژی X را با $S_{cl}\left(X\right)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که اگر برد یک نگاشت به طور قوی θ_{cl}- پیوسته‌ی f یک T_1- فضا باشد، آن‌گاه f روی شبه مؤلفه های همبندی دامنه‌ی خود ثابت است. با استفاده از این موضوع، ثابت می‌کنیم که برای هر فضای توپولوژی X، فضای فراهاسدورف Y وجود دارد که $S_{cl}\left(X\right)\cong C\left(Y\right)$. رفتار این نگاشت ها در ارتباط با اصول موضوع تفکیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نشان می‌دهیم که اگر f یک نگاشت به طور قوی θ_{cl}- پیوسته از فضای توپولوژی X به T_0- فضای Yباشد، آن‌گاه X فراهاسدورف است. خواص توپولوژیکی نگاره‌ی مستقیم و نگاره‌ی وارون فضاهایی با ویژگی های توپولوژیکی معین، تحت نگاشت های به طور قوی θ_{cl}- پیوسته بررسی می‌شود. از جمله ثابت می‌شود که نگاره‌ی مستقیم هر فضای cl - بستار فشرده تحت یک نگاشت به طور قوی θ_{cl}- پیوسته، فشرده است. در پایان، ویژگی های نمودارهای این نگاشت ها بیان می‌شود. ثابت می‌شود که برای هر فضای فشرده و هاسدورف مانند Y، به طور قوی θ_{cl}- پیوستگی نگاشت $f:X\to Y$ با θ_{cl}- بسته بودن نمودار آن نسبت به X معادل است.

استناد: اعتبار، معصومه (۱۴۰۲). نگاشت های به طور قوی θ_{cl} - پیوسته. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۲)، ۱۰۷ – ۱۲۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

هدف این مقاله بررسی خواص نوعی قوی از نگاشت های پیوسته به نام نگاشت های به طور قوی θ_{cl}- پیوسته و همچنین مطالعه‌ی حلقه‌ی نگاشت های به طور قوی θ_{cl}- پیوسته‌ی حقیقی مقدار روی یک فضای توپولوژی است که برای اولین بار در[۴] معرفی شده است. کلاس نگاشت های به طور قوی θ_{cl}- پیوسته شامل کلاس نگاشت های cl- بالاپیوسته (نگاشت های بستباز پیوسته) است که توسط ریلی و وامانامورتی در [۹] معرفی شد و خواص این نگاشت ها توسط سینک در[۱۰] مورد بررسی قرار گرفت وسپس افروز و همکارانش حلقه‌ی نگاشت های بستبازپیوسته‌ی حقیقی مقدار روی یک فضای توپولوژی را در[۱] بررسی نمودند. هر دوی این کلاس ها مشمول کلاس نگاشت های به طور قوی θ- پیوسته و کلاس نگاشت های R_{cl}- بالا پیوسته می‌باشند که توسط نویری، تیاگی و همکاران در[۱۳،۸] معرفی و مطالعه شدند. مجموعه‌ی A در فضای توپولوژی X را cl- باز گوییم، هرگاه A به صورت اجتماعی از مجموعه‌های بستباز باشد. متمم یک مجموعه‌ی cl- باز را cl- بسته گوییم. برای مجموعه‌ی A در فضای توپولوژی X، cl- بستار A مجموعه‌ی شامل تمام نقاط $x \in X$ است که هر مجموعه‌ی بستباز شامل x، A را قطع می‌کند و این مجموعه به صورت $[A]_{cl}$ در [۱۰] ($cl_s A$ در[۱]) نمایش داده می‌شود. بنابراین مجموعه‌ی A، cl- بسته است اگر و تنها اگر $A = cl_s A$. مجموعه‌ی باز U در فضای توپولوژی X را r_{cl}- باز گوییم، اگر U به صورت اجتماعی از مجموعه های cl- بسته باشد. فضای توپولوژی X یک- R_{cl} فضا نامیده می‌شود، اگر هر مجموعه‌ی باز در آن r_{cl}- باز باشد. برای $A \subseteq X$، مجموعه‌ی شامل تمام نقاط $x \in A$ که A شامل یک همسایگی بسته‌ی شامل x است را با $\operatorname{int}_\theta A$ نمایش می‌دهیم [۱۴]. گفته می‌شود مجموعه‌ی B، θ- باز است، اگر $B = \operatorname{int}_\theta B$. متمم یک مجموعه‌ی θ- باز را θ- بسته نامیم. مجموعه‌ی شامل تمام نقاط $x \in X$ که هر همسایگی بسته‌ی شامل x، A را قطع می‌کند، θ- بستار A نامیده می‌شود و با $cl_\theta A$ نشان داده می‌شود. تابع $f : X \to Y$ را cl- بالاپیوسته (R_{cl}- بالاپیوسته، به طور قوی θ- پیوسته) گوییم، هر گاه برای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-1}(V)$ در X، cl- باز (r_{cl}- باز، θ- باز) باشد.

۱. نگاشت های به طور قوی θ_{cl} - پیوسته

در این بخش پس از مشخصه سازی نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته، به بررسی ارتباط میان حلقه‌ی نگاشت‌های حقیقی ـ مقدار به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته روی فضای توپولوژی X با حلقه‌ی $C(X)$ می‌پردازیم. در ادامه ویژگی‌های اساسی نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا به بیان مفاهیم زیر می‌پردازیم که برگرفته از مرجع [۴] می‌باشند.

گوییم نگاشت $f : X \to Y$ در $x \in X$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است، اگر برای هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x موجود باشد که $f(cl_s U) \subseteq V$. گفته می‌شود که f به‌طور قوی θ_{cl}- پیوسته است، اگر در هر $x \in X$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد. بدیهی است که هر نگاشت به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته،

به‌طور قوی θ-پیوسته است، اما عکس این گزاره لزوماً برقرار نیست. به عنوان مثال، نگاشت همانی روی $\mathbb{R}$ به‌طور قوی θ-پیوسته است، اما به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته نمی‌باشد.

برای مجموعه‌ی A در فضای توپولوژی X، مجموعه‌ی شامل تمام نقاط $x\in X$ که هر همسایگی cl بسته‌ی شامل x، با A اشتراک ناتهی دارد را θ_{cl}-بستار A گوییم و با $cl_{\theta_{cl}}A$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی H در فضای توپولوژی X را θ_{cl} بسته گوییم، اگر $H = cl_{\theta_{cl}}H$. مجموعه‌ی شامل تمام نقاط $x \in A$ که A شامل یک همسایگی cl-بسته‌ی شامل x باشد را θ_{cl}- درون A نامیم و با $\operatorname{int}_{\theta_{cl}} A$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی G را θ_{cl}- باز گوییم، اگر $G = \operatorname{int}_{\theta_{cl}} G$. بدیهی است که هر مجموعه‌ی θ_{cl}- باز (θ_{cl}- بسته) یک مجموعه‌ی باز (بسته) است. افزون بر آن، متمم یک مجموعه‌ی θ_{cl}- باز (θ_{cl}- بسته) یک مجموعه‌ی θ_{cl}- بسته (θ_{cl}- باز) می‌باشد. خانواده‌ی شامل تمام مجموعه‌های θ_{cl}- باز در فضای (X ,τ) یک توپولوژی روی X تشکیل می‌دهد که با $\tau_{\theta_{cl}}$ نشان داده می‌شود. فضای $(X ,\tau_{\theta_{cl}})$ را با $X_{\theta_{cl}}$ نشان می‌دهیم.

قضیه‌ی زیر نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته را توصیف می‌کند. به دلیل سادگی، از ذکر اثبات آن صرف‌نظر می‌شود.

قضیه ۱: گزاره‌های زیر برای نگاشت $f : X \to Y$ معادلند.

(۱) f به طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

(۲) نگاره‌ی وارون هر مجموعه‌ی بستهٔ در Y تحت f ، θ_{cl}- بسته است.

(۳) نگاره‌ی وارون هر مجموعه‌ی باز در Y تحت f ، θ_{cl}- باز است.

(۴) نگاره‌ی وارون هر عضو زیرپایه‌ی Y تحت f ، θ_{cl}- باز است.

(۵) برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته مانند F در Y که $f(x) \notin F$ ، مجموعه‌ی θ_{cl}- باز U در X شامل x وجود دارد که $f(U) \cap F = \phi$.

از قضیه‌ی قبل، گزاره‌ی زیر نتیجه می‌شود.

نتیجه ۱: گزاره‌های زیر برای نگاشت $f : X \to Y$ معادلند.

(۱) f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

(۲) برای هر $A\subseteq X$، $f(cl_{\theta_{cl}}A) \subseteq clf(A)$.

(۳) برای هر $B\subseteq Y$، $cl_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(clB)$

(۴) برای هر $B \subseteq Y$، $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int}_{\theta_{cl}}(f^{-1}(B))$.

با استفاده از قضیه ۱ و از آن‌جا که یک مجموعه در X، θ_{cl}- باز است اگر و تنها اگر در $X_{\theta_{cl}}$ باز باشد، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۲: نگاشت $f: X \to Y$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است اگر و تنها اگر $f: X_{\theta_{cl}} \to Y$ پیوسته باشد.

مشابه R_{cl}- فضاها، θ_{cl}- فضاها به‌صورت زیر معرفی می‌شوند.

فضای X را یک θ_{cl}- فضا گوییم، اگر هر مجموعه‌ی باز در آن θ_{cl}- باز باشد[۴]. بدیهی است که θ_{cl}- بودن یک فضا یک ویژگی توپولوژیکی است و هر θ_{cl}-فضا یک R_{cl}- فضاست، اما عکس این گزاره لزوما درست نیست. مثال زیر (مثال ۱۱۳ در [۱۲]) گویای این مطلب است.

مثال ۱: فرض کنیم M خانواده‌ی شامل تمام فراپالایه‌های روی $\mathbb{Z}^+$ باشد که اصلی نیستند. گیریم $X = \mathbb{Z}^+ \bigcup M$ با توپولوژی فراپالایه‌ای قوی باشد. در این صورت بنا به مثال ۲٫۳ در [۱۳]، X یک R_{cl}-فضاست. این فضا یک θ_{cl}- فضا نمی‌باشد؛ زیرا، اگر $F \in M$، $A \in F$ و $U = A \bigcup \{F\}$، آن‌گاه U مجموعه‌ی بازی است که θ_{cl}- باز نیست. در واقع، اگر U، θ_{cl}- باز باشد، آن‌گاه $B \in F$ و مجموعه‌ی cl- بسته‌ی C_F در X وجود دارند که $B \bigcup \{F\} \subseteq C_F \subseteq U$ و در نتیجه $cl(B \bigcup \{F\}) \subseteq U$ که تناقض است؛ زیرا بنا به بند۳ مثال۱۱۳ در[۱۲]، $cl\left(B \bigcup \{F\}\right)$ شامل تمام فراپالایه های آزادی در $\mathbb{Z}^+$ است که شامل B هستند و این مجموعه نمی‌تواند مشمول U باشد. بنابراین X یک θ_{cl}- فضا نیست.

گزاره ۱: فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت (X, τ) یک θ_{cl}- فضاست اگر وتنها اگر هر نگاشت پیوسته از (X, τ) به هر فضای (Y, σ) به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد.

اثبات: $\Leftarrow$ بدیهی است.

$\Rightarrow$ گیریم $(Y, \sigma) = (X, \tau)$. در این صورت نگاشت همانی i روی X پیوسته و در نتیجه به طور قوی θ_{cl}-پیوسته است. پس بنا به قضیه ۱، برای هر $U \in \tau$، $i^{-1}(U) = U$، یک مجموعه‌ی θ_{cl}- باز در X می‌باشد که نتیجه می‌دهد X یک θ_{cl}- فضاست.

مجموعه‌ی شامل تمام نگاشت‌های حقیقی ـ مقدار به طور قوی θ_{cl}-پیوسته روی فضای X را با $S_{cl}(X)$ نشان می‌دهیم. با استفاده از قضیه ۱ می‌توان مشاهده نمود که $S_{cl}(X)$ با اعمال جمع و ضرب معمولی یک زیرحلقه و زیرمشبکه‌ی $C(X)$ می‌باشد که $C(X)$ حلقه‌ی تمام نگاشت‌های حقیقی مقدار پیوسته روی X است.

برای هر $f \in C(X)$، صفر- مجموعه‌ی f؛ که با $Z(f)$ نشان داده می‌شود، مجموعه‌ی شامل تمام نقاطی مانند $x \in X$ است که $f(x)=0$. مجموعه‌ی شامل تمام صفر- مجموعه‌های X را با $Z(X)$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی $X \setminus Z(f)$ را متمم صفر- مجموعه‌ی f نامیم و با $coz(f)$ نشان می‌دهیم. بنا به قضیه ۲٫۳ در [۵]، فضای توپولوژی X کاملاً منظم است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی $Z(X)$ پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته در X باشد اگر و تنها اگر مجموعه‌ی شامل تمام متمم صفرـ مجموعه‌های X پایه‌ای برای مجموعه‌های باز در X باشد. قضیه‌ی زیر ارتباط میان $S_{cl}(X)$ و $C(X)$ را بیان می‌کند.

قضیه ۲: اگر X یک θ_{cl}- فضا باشد، آن‌گاه $C(X)=S_{cl}(X)$ و اگر X کاملاً منظم باشد، عکس آن نیز برقرار است.

اثبات: اگر X یک θ_{cl}- فضا باشد، آن‌گاه بنا به گزاره ۱، $C(X)=S_{cl}(X)$. برعکس، فرض کنیم X کاملاً منظم باشد و $C(X)=S_{cl}(X)$. همچنین فرض کنیم $f \in C(X)$ و $x \in coz(f)$. بنابراین $f(x) \neq 0$ و چون $f \in S_{cl}(X)$، پس مجموعه‌ی باز U شامل x در X وجود دارد که برای هر $y \in cl_s U$، $f(y) \neq 0$ و در نتیجه $cl_s U \subseteq coz(f)$. پس $coz(f)$ یک مجموعه‌ی θ_{cl}- باز است و از آن‌جا که هر مجموعه‌ی باز در X به‌صورت اجتماعی از متمم صفرـ مجموعه‌هاست، پس هر مجموعه‌ی باز، θ_{cl}- باز خواهد بود. بنابراین X یک θ_{cl}- فضاست.

حال به بررسی ویژگی‌های اساسی نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته می‌پردازیم و مشاهده خواهیم کرد که مشابه ویژگی‌های شناخته شده در مورد پیوستگی هستند. حال لم زیر را بیان می‌کنیم که به‌طور مستقیم از نتیجه ۲ حاصل می‌شود.

لم ۱: اگر $f: X \to Y$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته و $g: Y \to Y$ پیوسته باشد، آن‌گاه $gof: X \to Z$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

مشابه نگاشت باز، نگاشت θ_{cl}-باز را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱: نگاشت $f: X \to Y$ را θ_{cl}- باز گوییم، اگر تصویر هر مجموعه‌ی θ_{cl}- باز در X، یک مجموعه‌ی باز در Y باشد. نگاشت θ_{cl}- بسته نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

بدیهی است که هر نگاشت θ_{cl}- باز روی فضای توپولوژی X، روی $X_{\theta_{cl}}$ باز است.

گزاره ۲: فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت θ_{cl}- باز، به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته و پوشا باشد. همچنین فرض کنیم $g: Y \to Z$ یک نگاشت باشد. در این صورت gof به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است اگر و تنها اگر g پیوسته باشد. افزون بر آن، اگر علاوه بر شروط فوق، نگاره‌ی هر مجموعه‌ی θ_{cl}- باز در X تحت نگاشت f، θ_{cl}- باز باشد، آن‌گاه g به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

اثبات: شرط لازم با استفاده از خواص پیوستگی و از آن‌جا که بنا به نتیجه ۲، gof روی $X_{\theta_{cl}}$ پیوسته و f روی $X_{\theta_{cl}}$ پیوسته و باز است، به‌سادگی اثبات می‌شود. شرط کافی، نتیجه مستقیم لم ۱ می‌باشد. برای اثبات گزاره‌ی دوم، فرض کنیم W مجموعه‌ی بازی در Z باشد. از آن‌جا که gof به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است، $(gof)^{-1}(W)$، در X، θ_{cl}-باز است و چون f پوشاست، $g^{-1}(W)=f(f^{-1}(g^{-1}(W)))=f\left((gof)^{-1}(W)\right)$ که بنا به فرض، در Y، θ_{cl}-باز است. پس بنا به قضیه ۱، g به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

مشابه پیوستگی، اگر $f:X\to Y$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد و $A\subseteq X$، آن‌گاه نگاشت تحدید $f|_A:A\to Y$ نیز به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است. برای بیان عکس این گزاره به مفهوم θ_{cl}- نشاندگی نیاز داریم. گفته می‌شود که مجموعه‌ی S در فضای توپولوژی X، θ_{cl}- نشانده است، اگر هر مجموعه‌ی θ_{cl}- باز (θ_{cl}- بسته) در S به صورت اشتراک S با یک مجموعه‌ی θ_{cl}- باز (θ_{cl}- بسته) در X باشد.

گزاره ۳: گزاره‌های زیر برای نگاشت $f:X\to Y$ برقرارند.

(۱) فرض کنیم خانواده‌ی $\{U_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ پوششی از مجموعه‌های θ_{cl}- باز برای X باشد که هر U_α در X یک θ_{cl}- نشانده است. اگر برای هر $\alpha\in\Lambda$، نگاشت $f_\alpha=f|_{U_\alpha}$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی θ_{cl}- پیوسته است.

(۲) فرض کنیم $\{F_i \mid 1\le i\le n, n\in\mathbb{N}\}$ پوششی از مجموعه‌های θ_{cl}- بسته برای X باشد که هر F_i در X یک θ_{cl}- نشانده است. اگر برای هر $1\le i\le n$، $f|_{F_i}$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

اثبات: (۱) فرض کنیم $V\subseteq Y$ باز باشد. چون هر f_α به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است، پس بنا به قضیه ۱، هر $f_\alpha^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی θ_{cl}- باز در U_α است و از آن‌جا که U_α یک مجموعه‌ی θ_{cl}- باز و θ_{cl}- نشانده در X است، پس $f_\alpha^{-1}(V)$ در X، θ_{cl}- باز خواهد بود. حال $f^{-1}(V)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha^{-1}(V)$ به‌صورت اجتماعی از مجموعه‌های θ_{cl}- باز در X است و در نتیجه $f^{-1}(V)$ در X، θ_{cl}- باز و بنا به قضیه ۱، f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته می‌باشد.

(۲) اثبات مشابه قسمت (۱) است.

در ادامه شرایطی را بیان می‌کنیم که در آن، قضایای مربوط به حاصلضرب نگاشت‌های به‌طور قوی θ-پیوسته در [۷] برای نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته نیز برقرار باشد.

قضیه ۳: فرض کنیم $\{f_\alpha : X_\alpha\to Y_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ خانواده‌ای از نگاشت‌ها باشد و نگاشت

$$f:\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$$

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f\,((x_\alpha)) = (f_\alpha(x_\alpha))$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) اگر هر f_α به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

(۲) اگر f پیوسته و هر X_α یک θ_{cl}- فضا باشد، آن‌گاه هر f_α، به‌طور قوی θ_{cl}- پیوسته است.

اثبات: (۱) فرض کنیم هر f_α به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته و V یک عضو زیرپایه برای $\prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ باشد. در این صورت $\beta\in\Lambda$ و مجموعه‌ی باز V_β در Y_β وجود دارند که $V = V_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha$. چون f_β به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است، بنا به قضیه ۱، $f_\beta^{-1}(V_\beta)$ در X_β، θ_{cl}- باز خواهد بود. داریم $f^{-1}(V) = f_\beta^{-1}(V_\beta)\times \prod_{\alpha\neq\beta} X_\alpha$. بنابراین $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی θ_{cl}- باز در $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ می‌باشد و در نتیجه بنا به قضیه ۱، f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

(۲) از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

نکته ۱: بنا به قضیه ۲ در[۲]، اگر X و Y دو فضای توپولوژی باشند که حداقل یکی از آن‌ها فشرده است و C مجموعه‌ی بستبازی در $X\times Y$ شامل (x,y) باشد، آن‌گاه مجموعه‌های بستباز U در X و V در Y وجود دارند که $(x,y)\in U\times V\subseteq C$.

حال به بیان قضیه‌ی زیر می‌پردازیم.

قضیه۴: فرض کنیم $f_۱ : X_۱ \to Y_۱$ و $f_۲ : X_۲ \to Y_۲$ دو نگاشت باشند و نگاشت

$$f : X_۱\times X_۲ \to Y_۱\times Y_۲$$

را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x_۱, x_۲) = (f_۱(x_۱), f_۲(x_۲))$$

اگر حداقل یکی از فضاهای $X_۱$ و $X_۲$ فشرده و f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد، آن‌گاه $f_۱$ و $f_۲$ به‌طور قوی θ_{cl}- پیوسته هستند.

اثبات: برای اثبات، کافیست نشان دهیم که برای $A_1 \subseteq X_1$ و $A_2 \subseteq X_2$، مجموعه‌ی $A_1 \times A_2$ در $X_1 \times X_2$، θ_{cl} - باز است اگر و تنها اگر A_1 و A_2 به ترتیب در X_1 و X_2، θ_{cl} - باز باشند. برای این منظور، فرض کنیم A_1 در X_1 و A_2 و در X_2 هر دو θ_{cl} - باز باشند. در این صورت $A_1 \times X_2$ و $X_1 \times A_2$ هر دو در $X_1 \times X_2$، θ_{cl} - باز هستند. در نتیجه $A_1 \times A_2$ که به‌صورت اشتراک دو مجموعه‌ی θ_{cl} - باز است، در $X_1 \times X_2$، θ_{cl} - باز خواهد بود . حال فرض کنیم $A_1 \times A_2$ در $X_1 \times X_2$، θ_{cl} - باز باشد. حال نشان می‌دهیم که برای هر $U \subseteq X_1$ و $V \subseteq X_2$، $cl_s(U \times V) = cl_s U \times cl_s V$. برای این منظور، فرض می‌کنیم که $(x,y) \in cl_s(U \times V)$ و W مجموعه‌ی بستبازی شامل x در X باشد. در این صورت $W \times Y$ مجموعه‌ی بستبازی شامل (x,y) در $X_1 \times X_2$ خواهد بودو در نتیجه $(W \times Y) \bigcap (U \times V) \neq \phi$. بنابراین $W \bigcap U \neq \phi$ که نتیجه می‌شود. $x \in cl_s U$ به صورت مشابه می‌توان ثابت کرد که $y \in cl_s V$. حال فرض کنیم $(x,y) \in cl_s U \times cl_s V$ و C مجموعه‌ی بستبازی شامل (x,y) در $X_1 \times X_2$ باشد. بنا به نکته ۱، مجموعه های بستباز W_1 و W_2 به ترتیب شامل x در X_1 و شامل y در X_2 وجود دارند که $(x,y) \in W_1 \times W_2 \subseteq C$. چون $x \in cl_S U$ و $y \in cl_s V$، پس $W_1 \bigcap U \neq \phi$ و $W_2 \bigcap V \neq \phi$ و در نتیجه $C \bigcap (U \times V) \neq \phi$. پس $(x,y) \in cl_s(U \times V)$ که نشان می‌دهد $cl_s(U \times V) = cl_s U \times cl_s V$. با استفاده از این مطلب، نتیجه می‌گیریم که A_1 و A_2 به ترتیب در X_1 و X_2، θ_{cl} - باز هستند.

قضیه ۵: فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژی باشد و $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. نگاشت $f : Y \to X$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in \Lambda$، $\pi_\alpha o f$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد.

اثبات: با استفاده از نتیجه ۲ و همچنین خواص پیوستگی به آسانی قابل اثبات است.

حال نتیجه‌ی زیر را می‌توان به آسانی از قضیه‌ی فوق نتیجه گرفت.

نتیجه ۳: فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت باشد و نگاشت

$$g : X \to X \times Y$$

را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = (x, f(x))$$

در این صورت g به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است اگر و تنها اگر f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته و X یک θ_{cl}- فضا باشد.

نگاشت g معرفی شده در نتیجه ۳ را نگاشت نموداری نگاشت f می‌نامیم.

نکته ۲: فرض θ_{cl}- فضا بودن در نتیجه ۳ لازم است. به عنوان مثال، فرض کنیم $X=Y=\{a,b,c\}$، $\tau_X=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ و $\tau_Y=\{\phi,\{c\},Y\}$. در این صورت نگاشت $f:(X,\tau_x)\to(Y,\tau_Y)$ با ضابطه‌ی $f(x)=c$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است، اما نگاشت نموداری آن به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته نمی‌باشد.

۲. حلقه‌ی $S_{cl}(X)$

در این بخش، ابتدا رفتار نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته را روی شبه مؤلفه‌های همبندی بررسی کرده و سپس با استفاده از آن نشان می‌دهیم که حلقه‌ی $S_{cl}(X)$ با یک $C(Y)$ یکریخت است. حال به بیان تعاریف و مفاهیم لازم می‌پردازیم. مؤلفه‌ی همبندی نقطه‌ی x در فضای توپولوژی X زیرمجموعه‌ی همبند ماکسیمال C_x شامل x در X تعریف می‌شود. اشتراک تمام مجموعه‌های بستباز در X شامل x را شبه‌مؤلفه‌ی همبندی x در X گوییم و با Q_x نشان می‌دهیم. بدیهی است که $C_x\subseteq Q_x$ و ممکن است تساوی برقرار نباشد، مثال ۲۴،۱،۶ در [۳] را ببینید. یک فضای توپولوژی را کاملاً ناهمبند گوییم، اگر تنها مؤلفه‌های همبندی ناتهی آن، مجموعه‌های تک عضوی باشند. بر اساس[۶]، فضای توپولوژی X به‌طور ضعیف همبند موضعی خوانده می‌شود، اگر هر مؤلفه‌ی همبندی در X باز باشد.

قضیه۶: گزاره‌های زیر برای نگاشت به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته‌ی $f:X\to Y$ برقرارند.

(۱) برای هر $x\in X$، $f[Q_x]\subseteq Q_{f(x)}$.

(۲) اگر Y یک T_1- فضا باشد، آن‌گاه برای هر $x\in X$، $f[Q_x]=\{f(x)\}$.

(۳) اگر f یک به یک و Y یک T_1- فضا باشد، آن‌گاه X کاملاً ناهمبند است.

اثبات: (۱) فرض کنیم $x\in X$، $z\in Q_x$ و $f(z)\notin Q_{f(x)}$. در این صورت مجموعه‌ی بستباز V شامل $f(x)$ وجود دارد به طوری که $f(z)\notin V$. از آن‌جا که f به طور قوی θ_{cl}-پیوسته است، پس مجموعه‌ی باز U شامل x وجود دارد به طوری که $f(cl_sU)\subseteq V$. به این ترتیب با توجه به این که $Q_x\subseteq cl_sU$، داریم $f(z)\in f(Q_x)\subseteq f(cl_sU)\subseteq V$ که این یک تناقض است.

(۲) فرض کنیم $y\in Q_x$ و $f(x)\neq f(y)$. در این صورت مجموعه‌ی باز V در Y وجود دارد که $f(x)\in V$ و $f(y)\notin V$. از آن‌جا که f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است، مجموعه‌ی باز U شامل x در X وجود دارد که $f(cl_sU)\subseteq V$. پس $f[Q_x]\subseteq V$ و در نتیجه $f(y)\in V$ که تناقض است.

(۳) با استفاده از بند (۲)، اگر f یک به یک باشد، آن‌گاه برای هر $x\in X$، $Q_x=\{x\}$ و در نتیجه برای هر $x\in X$، $C_x=\{x\}$ که نشان می‌دهد X کاملاً ناهمبند است.

نتیجه ۴: فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته و Y یک T_1- فضا باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) f روی هر شبه‌مؤلفه‌ی همبندی در X ثابت است.

(۲) اگر X همبند باشد، آن‌گاه f روی X ثابت است.

نتیجه ۵: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد و $f \in S_{cl}(X)$. در این صورت برای هر $x \in X$، $f[Q_x] = \{f(x)\}$.

حال به بیان نتیجه‌ی اصلی این بخش می‌پردازیم. قبل از آن مفهوم فضاهای فراهاسدورف را یادآوری می‌کنیم. فضای توپولوژی X را فراهاسدورف گوییم، هرگاه برای هر دو نقطه‌ی متمایز $x, y \in X$ مجموعه‌ی بستباز U در X موجود باشد که $x \in U$ و $y \notin U$ [۱۱].

قضیه ۷: برای هر فضای توپولوژی X، فضای فراهاسدورف Y وجود دارد که $S_{cl}(X) \cong C(Y)$.

اثبات: قرار می‌دهیم $Y = \{Q_x \mid x \in X\}$ و توپولوژی τ روی Y را گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌هایی مانند G در Y اختیار می‌کنیم که $\bigcup_{Q_x \in G} Q_x$ یک مجموعه‌ی θ_{cl}- باز در X باشد. حال نشان می‌دهیم که (Y, τ) یک فضای فراهاسدورف است. برای این منظور، فرض کنیم Q_x و Q_y در نقطه‌ی متمایز در Y باشند. در این صورت $x \notin Q_y$ و در نتیجه مجموعه‌ی بستباز U در X وجود دارد که $x \in U$ و $y \notin U$. حال قرار می‌دهیم $G = \{Q_z : z \in U\}$. در این صورت $U = \bigcup_{Q_z \in G} Q_z$ در X بستباز و در نتیجه θ_{cl}- باز و θ_{cl}- بسته است و در نتیجه G مجموعه‌ی بستبازی در Y است که $Q_x \in G$ و $Q_y \notin G$. بنابراین Y فراهاسدورف خواهد بود.

حال ثابت می‌کنیم که حلقه‌های $S_{cl}(X)$ و $C(Y)$ یکریخت هستند. نگاشت $\sigma : S_{cl}(X) \to C(Y)$ را به‌صورت $\sigma(f) = f_c$ برای هر $f \in S_{cl}(X)$ تعریف می‌کنیم که در آن $f_c : Y \to \mathbb{R}$ به‌صورت $f_c(Q_x) = f(x)$ تعریف می‌شود. بنا به نتیجه ۵، f_c و σ خوش‌تعریف هستند. ابتدا نشان می‌دهیم که $f_c \in C(Y)$. برای این منظور، فرض کنیم $Q_x \in Y$ و $r = f_c(Q_x) = f(x)$. از آن‌جا که $f \in S_{cl}(X)$، برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ی θ_{cl}-باز U شامل x در X وجود دارد که $f(U) \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. حال قرار می‌دهیم $G = \{Q_z : Q_z \subseteq U\}$. چون U یک مجموعه‌ی θ_{cl}- باز در X است، پس برای هر $y \in U$، مجموعه‌ی باز V در X وجود دارد که $y \in V \subseteq cl_s V \subseteq U$ و از آن‌جا که $cl_s V$ یک مجموعه‌ی cl- بسته‌ی شامل y و Q_y کوچکترین مجموعه‌ی cl- بسته‌ی شامل y است، پس $Q_y \subseteq cl_s V$ و در نتیجه $Q_y \in G$. پس $U = \bigcup_{Q_z \in G} Q_z$. بنابراین G مجموعه‌ی بازی در Y شامل Q_x است که $f_c(G) \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ و در نتیجه f_c پیوسته می‌باشد. بدیهی است که σ یک همریختی

یک به یک است. برای اثبات پوشا بودن σ، فرض کنیم $f \in C(Y)$ و نگاشت $g: X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $g(x) = f(Q_x)$ تعریف می‌کنیم. به آسانی می‌توان دید که $g \in S_{cl}(X)$ و $\sigma(g) = f$.

یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژی X صفر- بعدی نامیده می‌شود، اگر هاسدورف باشد و دارای پایه‌ای شامل مجموعه‌های بستباز باشد.

نتیجه ۶: اگر X یک فضای فشرده باشد، آن‌گاه فضای صفر- بعدی Z وجود دارد که $S_{cl}(X) \cong C(Z)$.

اثبات: قرار می‌دهیم $Z = Y$ که Y همان فضای توپولوژی معرفی شده در قضیه ۷ است. بنا به قضیه ۷، Z فراهاسدورف و در نتیجه هاسدورف است. حال فرض کنیم F یک مجموعه‌ی بسته در Y باشد و $Q_x \notin F$. برای هر $z \in X$ که $Q_z \in F$، $Q_z \neq Q_x$ و از آن‌جا که Z فراهاسدورف است، مجموعه‌ی بستباز V_z در Z وجود دارد که $Q_z \in V_z$ و $Q_x \notin V_z$. حال قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{Q_z \in F} Q_z$ و $G_z = \bigcup_{Q_y \in V_z} Q_y$. چون A فشرده است، $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \ldots, z_n \in A$ وجود دارند که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{z_i}$. حال قرار می‌دهیم $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_{z_i}$. در این صورت G مجموعه‌ی بستبازی در X است که $A \subseteq G$ و $x \notin G$. حال قرار می‌دهیم $H = \{Q_z : Q_z \subseteq G\}$. در این صورت H مجموعه‌ی بستبازی در Z است که $F \subseteq H$ و $Q_x \notin H$ و در نتیجه Z صفر- بعدی است.

نتیجه ۷: اگر X یک فضای به‌طور ضعیف همبند موضعی باشد، آنگاه فضای گسسته‌ی Z وجود دارد که $S_{cl}(X) \cong C(Z)$.

اثبات: قرار می‌دهیم $Z = Y$ که Y همان فضای توپولوژی معرفی شده در قضیه ۷ است. چون X به‌طور ضعیف همبند موضعی است، برای هر $x \in X$ داریم $C_x = Q_x$ و در نتیجه Q_x یک مجموعه‌ی بستباز در X می‌باشد. بنابراین Q_x در X، θ_{cl}- باز و در نتیجه $\{Q_x\}$ در Z باز می‌باشد که نشان می‌دهد Z گسسته است.

۳. ویژگی‌های توپولوژیکی و نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته

در این بخش ارتباط میان ویژگی‌های توپولوژیکی و نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

گزاره ۴: فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت دوسویی، باز و به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد. در این صورت X و Y دو θ_{cl}- فضای همسانریخت هستند.

اثبات: آسان است.

گزاره ۵: فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت پیوسته باشد. اگر Y یک θ_{cl}- فضا باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی θ_{cl}- پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم $x \in X$ و V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. از آن‌جا که Y یک θ_{cl}-فضاست، مجموعه‌ی باز W در Y وجود دارد که $f(x) \in W \subseteq cl_s W \subseteq V$. به‌راحتی ثابت می‌شود اگر $f: X \to Y$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای هر مجموعه‌ی باز W در Y داریم $cl_s f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(cl_s W)$. با استفاده از این گزاره نتیجه می‌شود $x \in f^{-1}(W) \subseteq cl_s f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(V)$ که نشان می‌دهد $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی θ_{cl}-باز در X است و در نتیجه f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته می‌باشد.

گزاره ۶: فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت یک به یک و به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد. اگر Y یک $T_{\circ}$-فضا باشد، آن‌گاه X فراهاسدورف است.

اثبات: فرض کنیم $x_۱$ و $x_۲$ دو نقطه‌ی متمایز در X باشند. در این صورت $f(x_۱) \neq f(x_۲)$. چون Y یک $T_{\circ}$-فضاست، مجموعه‌ی باز V در Y وجود دارد که شامل یکی از نقاط $f(x_۱)$ یا $f(x_۲)$ و نه هر دو باشد. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنیم $f(x_۱) \in V$ و $f(x_۲) \notin V$. در این صورت مجموعه‌ی باز U در X شامل x_1 وجود دارد که $f(cl_s U) \subseteq V$. بنابراین $x_۲ \notin cl_s U$ و در نتیجه مجموعه‌ی بستباز W در X وجود دارد که $x_۱ \in W$ و $x_۲ \notin W$ که نشان می‌دهد X فراهاسدورف است.

در ادامه‌ی این بخش، ارتباط میان نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته و ویژگی cl- بستار فشردگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا به معرفی این مفهوم می‌پردازیم. فضای توپولوژی X را cl- بستار فشرده گوییم، اگر برای هر پوشش باز X مانند $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ موجود باشند که $X = \bigcup_{i=1}^{n} cl_s U_{\alpha_i}$. گفته می‌شود مجموعه‌ی A نسبت به X، cl- بستار فشرده است، هرگاه برای هر پوشش A از زیرمجموعه‌های باز X، زیرخانواده‌ای متناهی موجود باشد که cl- بستارهای اعضای آن پوششی برای A باشد [۴].

نکته ۳: یادآوری می‌کنیم که X یک فضای H- بسته نامیده می‌شود، اگر هر پوشش باز X دارای زیرخانواده‌ای متناهی باشد که بستارهای اعضای آن پوششی برای X باشد. بدیهی است که هر فضای H- بسته، cl- بستار فشرده است، اما عکس این گزاره لزوماً درست نیست. به عنوان مثال، $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی، فضای cl- بستار فشرده‌ای است که H- بسته نمی‌باشد. افزون بر آن، هر زیرفضای cl- بستار فشرده‌ی X، نسبت به X، cl- بستار فشرده است. همچنین، اگر $A \subseteq Y \subseteq X$ و A نسبت به Y، cl- بستار فشرده باشد، آن‌گاه A نسبت به X، cl- بستار فشرده است. به آسانی می‌توان مشاهده نمود که هر زیرمجموعه‌ی θ_{cl}- بسته‌ی فضای cl- بستار فشرده‌ی X، نسبت به X، cl-بستار فشرده است.

نتیجه‌ی بعد نشان می‌دهد که cl- بستار فشردگی یک ویژگی توپولوژیکی است.

قضیه ۸: نگاره‌ی یک فضای cl- بستار فشرده تحت یک نگاشت پیوسته، cl- بستار فشرده است.

اثبات: فرض کنیم X یک فضای cl- بستار فشرده و $f: X \to Y$ یک نگاشت پیوسته و پوشا باشد. همچنین فرض کنیم $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای Y باشد. در این صورت $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای X است و بنا به cl- بستار فشردگی X، مجموعه‌ی متناهی $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\subseteq I$ وجود دارد که $X=\bigcup_{i=1}^{n} cl_s f^{-1}(V_{\alpha_i})$. بنابراین $Y=\bigcup_{i=1}^{n} f\left(cl_s f^{-1}(V_{\alpha_i})\right)\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} cl_s V_{\alpha_i}$ که نشان می‌دهد Y یک فضای cl- بستار فشرده است.

قضیه ۹: نگاره‌ی یک فضای cl- بستار فشرده تحت یک نگاشت به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته، فشرده است.

اثبات: فرض کنیم X یک فضای cl- بستار فشرده و $f: X \to Y$ به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته و پوشا باشد. همچنین فرض کنیم V پوشش بازی برای Y باشد. در این صورت برای هر $x\in X$، مجموعه‌ی باز $V_x \in V$ وجود دارد که $f(x)\in V_x$. پس مجموعه‌ی باز U_x در X شامل x وجود دارد که $f(cl_s U_x)\subseteq V_x$. حال خانواده‌ی $U=\{U_x\}_{x\in X}$ پوشش بازی برای X است که بنا به cl- بستار فشردگی X، مجموعه‌ی متناهی $\{U_{x_1},\dots,U_{x_n}\}\subseteq U$ وجود دارد که $X=\bigcup_{i=1}^{n} cl_s U_{x_i}$. از این رو $Y=\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ که نشان می‌دهد Y فشرده است.

نتیجه‌ی زیر به‌طور مستقیم از قضیه ۹ حاصل می‌شود.

نتیجه ۸ : فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد و $A\subseteq X$. اگر A نسبت به X، cl- بستار فشرده باشد، آن‌گاه $f(A)$ فشرده است.

۴. نمودارهای θ_{cl}- بسته

نمودار نگاشت $f: X \to Y$ با $G(f)$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(f)=\{(x,f(x)): x\in X\}$$

تعریف ۲: گوییم $G(f)$ یک نمودار θ_{cl}- بسته است، اگر برای هر $(x,y)\notin G(f)$، مجموعه‌های باز U در X و V در Y به ترتیب شامل x و y موجود باشند که $(cl_s U \times cl_s V)\cap G(f)=\phi$. گوییم $G(f)$ نسبت به X، θ_{cl}- بسته است، اگر برای هر $(x,y)\notin G(f)$ مجموعه‌های باز U در X شامل x و V در Y شامل y موجود باشندکه $f(cl_s U)\cap V=\phi$.

گزاره ۷: فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت با نمودار θ_{cl}- بسته نسبت به X باشد. اگر Y فشرده باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم $x \in X$ و W مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. اگر $y \in Y \setminus W$، آن‌گاه $(x, y) \notin G(f)$ و در نتیجه مجموعه‌های باز U_y در X و V_y در Y به ترتیب شامل x و y وجود دارند که $f(cl_s U_y) \cap V_y = \phi$. حال خانواده‌ی $\{V_y : y \in Y \setminus W\}$ پوشش بازی برای $Y \setminus W$ است که بنا به فشردگی $Y \setminus W$، مجموعه‌ی متناهی $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y \setminus W$ وجود دارد که $Y \setminus W \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. قرار می‌دهیم $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. در این صورت U مجموعه‌ی بازی در X شامل x است که $f(cl_s U) \subseteq W$؛ یعنی، f به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است.

گزاره۸: فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته باشد. اگر Y هاسدورف باشد، آن‌گاه $G(f)$ نسبت به X، θ_{cl}- بسته است.

اثبات: آسان است.

حال نتیجه‌ی زیر را بیان می‌کنیم که به‌طور مستقیم از گزاره ۷و گزاره ۸ به‌دست می‌آید.

نتیجه۹: فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت و Y فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت f به‌طور قوی θ_{cl}- پیوسته است اگر و تنها اگر $G(f)$ نسبت به X، θ_{cl}- بسته باشد.

سپاس‌گزاری:

نویسنده از داوران محترم که نظراتشان باعث بهبود مقاله شد و همچنین از دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل حمایت مالی این تحقیق، کمال تشکر را دارد. شماره گرنت: (SCU. MM1400. 776)

References

1. S. Afrooz, F. Azarpanah and M. Etebar, Rings of real valued clopen continuous functions, Appl. Gen. Topol., **19** (2018), 203-216.

2. R. Z. Buzyakova, On clopen sets in cartesian products, Comment. Math. Univ. Carolinae, **42** (2001), 357-362.

3. R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

4. M. Etebar, θ_{cl} - continuity and topological properties, Far East Journal of Mathematical Sciences, **107** (2018), 221-229.

5. L. Gillman and M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Springer, 1976.

6. J. K. Kohli, A class of spaces containing all connected and all locally connected spaces, Math.

Nachr., **82** (1978), 121-129.

7. P. E. Long and L. Herrington, Strongly θ-continuous functions, J. Korean. Math. Soc., **18** (1981), 21-28.

8. T. Noiri, On δ-continuous functions, J. Korean. Math. Soc., **18** (1980), 161-166.

9. I. L. Reilly and M. K. Vamanamurthy, On super-continuous mappings, Indian J. Pure. Appl. Math., **14** (1983), 767-772.

10. D. Singh, cl-supercontinuous functions, Applied Gen. Top., **8** (2007), 293-300.

11. R. Staum, The algebra of bounded continuous functions into a nonarchimedean field, Pac. J. Math., **50** (1974), 169-185.

12. L. A. Steen and J. A. Jr. Seebach, Counterexamples in Topology, Springer Verlag, New York 1978.

13. B. K. Tyagi, J. K. Kohli and D. Singh, R_{cl} -supercontinuous functions, Demonstratio Math., **46** (2013), 229-244.

14. N. V. Velichko, H-closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Trans., **78** (1968), 103-118.

15. S. Willard, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company Inc., London, 1970.