



Kharazmi University

## Groups Whose Set of Vanishing Elements Is the Union of Exactly Three Conjugacy Classes

**Sajjad Mahmood Robati**

1. Department of Pure Mathematics, Faculty of Sciences, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran  
✉ E-mail: [mahmoodrobati@sci.iiku.ac.ir](mailto:mahmoodrobati@sci.iiku.ac.ir), [sajjad.robati@gmail.com](mailto:sajjad.robati@gmail.com)

Article Info	ABSTRACT
<b>Article type:</b> Research Article	<b>Introduction</b> Let $G$ be a finite group and let $\text{Irr}(G)$ be the set of irreducible characters of $G$ . We say that an element $g$ in $G$ is a vanishing element if there exists some $\chi \in \text{Irr}(G)$ such that $\chi(g) = 0$ . In this paper, we investigate the influence of the number of the columns containing some zeros in character table of $G$ on the algebraic structure of $G$ .
<b>Article history:</b> Received: 15 August 2021 Received in revised form: 7 October 2022 Accepted: 10 January 2023 Published online: 29 February 2024	<b>Material and Methods</b> Let $\text{Van}(G)$ be the set of all vanishing elements, in other words, $\text{Van}(G) = \{g \in G \mid \exists \chi \in \text{Irr}(G) \ \chi(g) = 0\}.$ We can easily check that $\text{Van}(G)$ is the union of some conjugacy classes. Burnside show that $\text{Van}(G) = \emptyset$ if and only if $G$ is an abelian group. We know that finite groups whose set of vanishing elements is the union of at most three conjugacy classes are solvable. Using this result, we provide a relatively short proof for the main theorem.
<b>Keywords:</b> Conjugacy class, Irreducible character, Solvable group, Frobenius group.	<b>Results and discussion</b> In this paper, we classify finite groups whose set of vanishing elements is the union of exactly three conjugacy classes. <b>Conclusion</b> If the set of vanishing elements of a finite group $G$ is the union of exactly three conjugacy classes then one of the following situations occurs <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>G</math> is isomorphic to <math>D_8</math>, <math>Q_8</math>, or <math>S_4</math>.</li><li>• <math>G</math> is a Frobenius group with abelian kernel of odd order and cyclic complement of order 4.</li><li>• <math>G \cong F \times \mathbb{Z}_3</math>, in which <math>F</math> is a Frobenius group with abelian kernel of odd order and complement of order 2.</li></ul>

**How to cite:** Mahmood Robati, Sajjad. (2023). Groups Whose Set of Vanishing Elements Is the Union of Exactly Three Conjugacy Classes. *Mathematical Researches*, 9 (4), 70 – 79.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University



## گروه‌هایی که مجموعه‌ی اعضای صفرشوی آنها اجتماع دقیقاً سه کلاس تزویج است

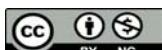
سجاد محمود رباتی<sup>۱</sup>

۱. گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران. رایانمه: [mahmoodrobati@sci.ikiu.ac.ir](mailto:mahmoodrobati@sci.ikiu.ac.ir), [sajjad.robati@gmail.com](mailto:sajjad.robati@gmail.com)

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی و $\text{Irr}(G)$ مجموعه تمام سرشت‌های تحويلناپذیر $G$ باشند. گوییم عضو $g$ در $G$ یک عضو صفرشو در $G$ است اگر سرشت $\chi \in \text{Irr}(G)$ موجود باشد بطوریکه $\chi(g) = 0$ . در این مقاله، یک اثبات نسبتاً کوتاه برای ردهندی گروه‌های متناهی‌ای ارائه می‌دهیم که مجموعه اعضای صفرشوی آنها دقیقاً اجتماع سه کلاس تزویج است.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۲۴	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۷/۱۵	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۲۰	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰	

واژه‌های کلیدی:  
کلاس تزویج،  
سرشت تحويلناپذیر،  
گروه حلپذیر،  
گروه فروبنیوس.

استناد: محمود رباتی، سجاد (۱۴۰۲). گروه‌هایی که مجموعه‌ی اعضای صفرشوی آنها اجتماع دقیقاً سه کلاس تزویج است. پژوهش‌های ریاضی, ۹(۴)، ۷۹ - ۷۰.



© نویسنده‌ان

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## مقدمه

فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی و  $\text{Irr}(G)$  مجموعه تمام سرشناس‌های تحویل‌ناپذیر  $G$  باشند. گوییم عضو  $g$  در  $G$  یک عضو صفرشو در  $G$  است هرگاه سرشت  $\chi \in \text{Irr}(G)$  موجود باشد بطوریکه  $\chi(g) = 0$ ، در غیر اینصورت  $g$  را یک عضو صفرنشوی  $G$  گوییم، به عبارت دیگر  $g$  یک عضو صفرنشوی در  $G$  است هرگاه به ازای هر  $\chi \in \text{Irr}(G)$   $\chi(g) \neq 0$ .

فرض کنیم  $\text{Van}(G)$  مجموعه تمام اعضای صفرشوی  $G$  باشد، یعنی

$$\text{Van}(G) = \{g \in G \mid \exists \chi \in \text{Irr}(G) \quad \chi(g) = 0\}.$$

براحتی می‌توان نشان داد که مجموعه اعضای صفرشوی  $G$  اجتماعی از کلاس‌های تزویج  $G$  است. برنساید نشان داد که  $\text{Van}(G) = \emptyset$  اگر و فقط اگر  $G$  یک گروه آبلی باشد (به قضیه ۳، ۱۵ از کتاب [۳] رجوع کنید). در مقاله [۷] با استفاده از رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی ثابت کردۀایم که اگر  $\text{Van}(G)$  اجتماع حداکثر سه کلاس تزویج  $G$  باشد، در اینصورت  $G$  حل‌پذیر است. سپس، در مقاله [۸]، گروه‌هایی را رده‌بندی کردۀایم که مجموعه اعضای صفرشوی آنها دقیقاً یک کلاس تزویج است. از طرف دیگر، در مقاله [۹] نشان دادهایم که اگر  $\text{Van}(G)$  اجتماع حداکثر شش کلاس تزویج  $G$  باشد، در اینصورت  $G$  یا حل‌پذیر یا تقریباً ساده است و بعلاوه در آن مقاله گروه‌های غیرحل‌پذیر با چنین خاصیتی را رده‌بندی کردۀایم.

حال، در این مقاله می‌خواهیم با ارائه یک اثبات نسبتاً کوتاه و ساده، گروه‌های متناهی را رده‌بندی کنیم که مجموعه اعضای صفرشوی آنها اجتماع دقیقاً سه کلاس تزویج است. به عبارت دقیق‌تر، در این مقاله قضیه زیر را ثابت خواهیم کرد.

قضیه اصلی. فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی باشد. در اینصورت مجموعه تمام اعضای صفرشوی  $G$  اجتماع دقیقاً سه کلاس تزویج  $G$  است اگر و فقط اگر یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد.

(آ)  $G$  با یکی از گروه‌های  $S_4$ ،  $D_8$  یا  $Q_8$  یکریخت باشد،

(ب)  $G$  یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد  $G'$  و متمم فروبنیوس دوری از مرتبه ۴ باشد،

(پ)  $G \cong F \times \mathbb{Z}_3$ ، که در آن  $F$  یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد  $G'$  و متمم از مرتبه ۲ است.

در این مقاله، از نمادهای استاندارد استفاده شده است. منظور از  $\text{F}(G)$  (زیرگروه فیتینگ  $G$ ) زیرگروه تولید شده توسط تمام زیرگروه‌های نرمال پوچتوان  $G$  است و  $O_{2'}(G)$  بزرگترین زیرگروه نرمال  $G$  از مرتبه فرد است. بعلاوه،  $k_G(A)$  تعداد کلاس‌های تزویج  $G$  مشمول در  $A$  و  $cl_G(x)$  کلاس تزویج شامل  $x$  در  $G$  را نمایش می‌دهند.

## ۱. لم‌ها و قضایای پیش‌نیاز

در این بخش، نتایجی را مطرح می‌کنیم که در اثبات قضیه اصلی مقاله ما را کمک می‌کنند. نتایج زیر، گروه‌هایی را مشخص می‌کنند که شامل یک زیرگروه از مرتبه ۴ هستند که مرکزسازش برابر با خودش است.

قضیه ۱,۱ [۱۰، قضیه ۱]: فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی با یک زیرگروه غیردوری از مرتبه ۴ که مرکزسازش در  $G$  برابر با خودش است. در اینصورت  $G/O_2'(G)$  با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:

$$PSL(3,3), M_{11}, GL(2,3), H(q), PGL(2, q), PSL(2, q) \left( q \text{ فرد} \right), A_7, D_{2^n}, SD_{2^n}$$

□

قضیه ۲,۱ [۱۰، قضیه ۲]: فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی با یک زیرگروه دوری از مرتبه ۴ که مرکزسازش در  $G$  برابر با خودش است. در اینصورت  $G/O_2'(G)$  با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:

$$SL(2,3), SL(2,5), PSL(2,7), PSL(2,9), PGL(2,3), PGL(2,5), H(9), J, A_7, D_8, SD_{2^n}, Q_{2^n}, \mathbb{Z}_4.$$

این بخش را با نتایج زیر درباره اعضای صفرشو و صفرنشو در گروه‌های متناهی به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۳,۱ [۴، قضیه B]: فرض کنید  $G$  یک گروه پوچتوان متناهی باشد. در اینصورت هر عضو صفرنشوی  $G$  یک عضو مرکزی است.

لم ۴,۱ [۲,۶]: فرض کنید  $G$  یک گروه حل‌پذیر و  $N$  یک زیرگروه نرمال  $G$  باشد. اگر  $(N/F(N))$  آبلی باشد، در اینصورت

$$N \setminus F(N) \subseteq \text{Van}(G)$$

لم ۵,۱ [۶، قضیه ۸]: فرض کنید  $N$  یک زیرگروه حل‌پذیر گروه  $G$  باشد به‌طوری‌که  $|G:N| = 2$ . اگر  $N = \emptyset$  در اینصورت  $N$  آبلی و  $G$  دارای یک ۲-متهم نرمال آبلی است.

لم ۶,۱. فرض کنید  $G$  یک گروه حل‌پذیر متناهی باشد. در اینصورت زیرگروه نرمال و سره  $N$  از  $G$  شامل  $G'$  وجود دارد بطوریکه

$$G \setminus N \subseteq \text{Van}(G)$$

اثبات. چون  $G$  حل‌پذیر است، در اینصورت سرشت خطی غیربدیهی  $\lambda$  در  $G'$  و سرشت تحويلناپذیر  $\chi$  در  $G$  وجود دارند بطوریکه

$$[\chi_{G'}, \lambda] = [\chi, \lambda^G] \neq 0.$$

بعلاوه می‌دانیم تحدید هر سرشت خطی  $G'$  به  $G'$  برابر با سرشت بدیهی  $G'$  است. از این رو  $\lambda \neq \chi_{G'}$  غیرخطی و تحويل‌پذیر است. حال، چون  $G/G'$  آبلی است، بنا به قضیه ۲۲.۶ و تعریف ۲۱.۶ از کتاب [۳]، زیرگروه نرمال و سره  $N$  از  $G$  شامل  $G'$  و  $\psi \in \text{Irr}(N)$  وجود دارند بطوریکه  $\psi = \chi_{G'} \in \text{Irr}(G')$ . بنابراین بنا به تعریف  $\psi$ ، به ازای هر  $g \in G \setminus N$  داریم  $\chi(g) = 0$  و حکم برقرار است.  $\square$

## ۲. نتایج اصلی

به راحتی می‌توان بررسی کرد که اگر گروه متناهی  $G$  دارای حداقل  $n$  کلاس تزویج صفرشو باشد و  $N \trianglelefteq G$ ، در اینصورت نیز  $G/N$  دارای حداقل  $n$  کلاس تزویج صفرشو است. در انتهای این فصل، گروه‌های متناهی را رده‌بندی خواهیم کرد که مجموعه اعضای صفرشوی آنها اجتماع دقیقاً سه کلاس تزویج است. در لم زیر، گروه‌های پوچتوان با حداقل سه کلاس تزویج صفرشو مشخص می‌کنیم.

لم ۱.۲. فرض کنید  $G$  یک گروه پوچتوان متناهی باشد. در اینصورت مجموعه تمام اعضای صفرشوی  $G$  اجتماع حداقل سه کلاس تزویج  $G$  است اگر و فقط اگر  $G$  یکی از گروه‌های  $D_8$  یا  $Q_8$  باشد.

اثبات. مشاهده می‌کنیم که بنا به قضیه ۱.۳، هر عضو غیرمرکزی  $G$  عضو صفرشوی  $G$  است. اگر  $G$  نآبلی باشد، کلاس‌های تزویج غیرمرکزی  $C_1, C_2$  و  $C_3$  (که الزاماً متمایز نیستند) در  $G$  وجود دارند بطوریکه  $\text{Van}(G) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ . با استفاده از معادله کلاسی می‌توانیم بنویسیم

$$p^n = |G| \leq |Z(G)| + |C_1| + |C_2| + |C_3| \leq p^k + 3p^{n-k-1} = p^k(1 + 3p^{n-2k-1})$$

که در آن  $p^k = |Z(G)| = p^k$  و  $n \geq 3$ . حال دو طرف  $p^k$  بر  $k$  تقسیم داریم:

$$4 \leq p^2 \leq p^{n-k} \leq 1 + 3p^{n-2k-1}$$

در نتیجه  $0 \leq -2k - 1 \leq n - 2k - 1$ . حال دو طرف معادله بالا را بر  $p^{n-2k-1}$  تقسیم می‌کنیم.

$$4 \leq p^{k+1} \leq 3 + \frac{1}{p^{n-2k-1}} \leq 4$$

از این رو برای  $n = 3, p = 2$  و  $k = 1$  بنا براین حکم نتیجه می‌شود.

لم ۲.۲: فرض کنیم  $G$  یک گروه فروبنیوس با هسته  $N$  باشد. اگر  $N$  یک گروه پوچتوان از رده ۲ باشد، در اینصورت

$$N \setminus Z(N) \subseteq \text{Van}(G).$$

ثبات. گیریم  $x \in N \setminus Z(N)$ ، پس سرشت تحویلناپذیری مانند  $\theta$  در  $N$  وجود دارد بطوریکه  $x \in N \setminus Z(\theta)$  چون  $N/Z(\theta) \subseteq Z(N)$  آبلی است. از این رو بنا به نتیجه ۳۰.۲ و قضیه ۳۱.۲ کتاب [۳]،  $\theta$  روی  $N \setminus Z(\theta)$  صفر می‌شود. چون  $N \setminus Z(\theta)$  در  $G$  نرمال است از این رو برای هر  $g \in G$  داریم  $\theta(x^g) = 0$ .

ز طرف دیگر اگر  $\chi \in \text{Irr}(G)$  بطوریکه  $\chi[\chi_N, \theta] \neq 0$  و  $N \not\subseteq \ker \chi$ ، پس بنا به قضیه کلیفورد و قضیه ۳۴.۶ کتاب [۲]، عناصر  $g_1, \dots, g_n$  در  $G$  وجود دارند بطوریکه

$$\chi(x) = \chi_N(x) = \sum_{i=1}^n \theta(x^{g_i}) = 0.$$

□ و بدین ترتیب حکم ثابت می شود.

حال آماده‌ایم اثبات قضیه اصلی را بیان نماییم.

اثبات قضیه اصلی.

بنابراین  $G$  حل پذیر است. از طرف دیگر لم ۱، نتیجه می‌دهد که کلاس‌های تزویج  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  در  $G$  وجود دارند بطوریکه  $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = G$  و  $\text{Van}(G) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup N = G$ . که در آن  $N$  یک زیرگروه نرمال و سرمه  $G'$  شامل است. از طرفی چون به ازای هر  $i$ ،  $|C_i| \leq |G'| \leq |N|$  و با توجه به اینکه همدسته‌های  $N$  در  $G$  را افزار می‌کنند، یکی از پنج حالت زیر رخ می‌دهد:

حالات اول:  $|G:N| = 4$  و  $N = G'$

در این حالت می بینیم که  $|C_1| = |C_2| = |C_3| = |G'|$  و  $\text{Van}(G) \subseteq G \setminus N$ . بنابراین برای هر  $x \in C_i$  داریم  $|C_G(x)| = 4$ . پس، فرض قضیه و قضایای ۱.۱ و ۲.۱ نتیجه می‌دهند که

$$\frac{G}{O_{2'}(G)} \cong \mathbb{Z}_4, D_8 \wr Q_8$$

در اینصورت اگر  $1 \neq O_2'(G)$  باشد،  $G$  یک گروه فربنیوس با هسته آبلی  $(G)' = O_2$  است. اگر  $O_8$  یا متمم فربنیوس برای گروه  $G$  باشد، بنا به قضیه ۱۳.۸ از کتاب [۲]،  $G$  چهار کلاس تزویج صفرشو دارد که خلاف فرض است. بنابراین در این حالت،  $G$  یک گروه فربنیوس با هسته آبلی و فرد  $G'$  و متمم  $\mathbb{Z}_4$  است. حال، اگر  $1 = O_2'(G)$  باشد، در اینصورت  $G$  با یکی از گروههای  $D_8$  یا  $Q_8$  یکریخت است.

حالت دوم:  $|G:N| = 3$  و  $N = G'$

در این حالت یا (۱)  $\text{Van}(G) \cap N = C_3$  (۲)  $|C_1| + |C_2| + |C_3| = 2|G'|$  و  $\text{Van}(G) \subseteq G \setminus N$  داریم. اگر (۱) برقرار باشد، سایر عضویت‌ها را باید اثبات کرد.

حداصل یک  $i$  داریم  $|G:N| = 3$  و از این رو برای هر  $x$  در  $C_i$  داریم  $|C_G(x)| \leq 9/2$ . از آنجاییکه  $3$  است، بنابراین  $|C_G(x)| = 3$ . در نتیجه در هر دو وضعیت (۱) و (۲)،  $x$  ای در  $G \setminus N$  وجود دارد بطوریکه  $C_G(x)$  از مرتبه  $3$  است و از این رو  $G'$  یک گروه فروبنیوس با هسته  $\mathbb{Z}_3$  است و (۱) اتفاق نمی‌افتد. از طرفی بنا به قضیه  $3$  از مقاله [۱۱].  $G'$  یک گروه پوچتوان از رده  $2$  است و در نتیجه بنا به لم  $2,2$ .  $C_3 = N \setminus Z(N) \subseteq \text{Van}(G)$  چون  $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_3$  بدون نقطه ثابت بر  $N$  عمل می‌کند، در اینصورت

$$N - Z(N) = C_3 = cl_G(h) = cl_N(h) \cup cl_N(h^g) \cup cl_N(h^{g^2}),$$

که در آن  $C_3$  کلاس تزویج  $h$  از  $G$  مشمول در  $N$  است. از این رو  $N$  شامل دقیقا  $3$  کلاس تزویج غیرمرکزی است. می‌توانیم فرض کنیم  $N$  یک  $p$ -گروه است و مانند اثبات لم  $1,2$ ، می‌توانیم ثابت کنیم که  $N$  از مرتبه  $8$  است که این ممکن نیست زیرا  $1 \nmid 8 - 3$ .

**حالت سوم:**  $|G:N| = 2$  و  $N = G'$

در این حالت یا (۱)  $|C_1| + |C_2| + |C_3| = |G'|$  و  $\text{Van}(G) \subseteq G \setminus N$  و  $\text{Van}(G) \cap N = C_3$  یا (۲)  $|C_1| = |G'|$  و  $\text{Van}(G) \cap N = C_2 \cup C_3$  یا (۳)  $|C_1| + |C_2| = |G'|$

در حالت (۱) برای حداقل یک  $i$  داریم  $|C_G(x)| \geq |G'|/3$ ، از این رو برای هر  $x$  در  $C_i$  داریم  $6 \leq |C_G(x)|$ ، در حالت (۲)، برای حداقل یک  $i$  داریم  $|C_i| \geq |G'|/2$  و  $C_i \subseteq G - N$ ، پس برای هر  $x$  در  $C_i$  داریم  $4 \leq |C_G(x)|$  و در حالت (۳) برای هر  $x$  در  $C_1$  داریم  $|C_G(x)| = 2$ .

اگر برای  $x$  در  $G \setminus N$ ،  $|C_G(x)| = p$  یک عدد اول باشد، در اینصورت  $\langle x \rangle$  یک  $p$ -زیرگروه سیلوی  $G$  از مرتبه  $p$  است. بنابراین  $p$  باید برابر با  $2$  باشد و بنابراین  $G$  یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد  $G'$  و متمم  $\mathbb{Z}_2$  است و در نتیجه  $G$  دارای دقیقا یک کلاس تزویج صفرشواست که این با فرض قضیه تناقض دارد و همچنین (۳) اتفاق نمی‌افتد.

اگر برای هر  $g$  در  $G - N$ ،  $|C_G(g)| = 6$  باشد، در اینصورت حالت (۱) برقرار است. از این رو بنا به لم  $5,1$  آبلی  $N$  است و  $\langle x \rangle$  که در آن  $\langle x \rangle$  یک  $2$ -زیرگروه سیلوی  $G$  از مرتبه  $2$  است. از طرفی، می‌توانیم بنویسیم

$$6 = |C_G(x)| = |G/G'| + \sum_{\chi \in Irr(G) - Lin(G)} |\chi(x)|^2$$

که در آن منظور از  $\text{Lin}(G)$  مجموعه تمام سرشناسهای خطی  $G$  است. در نتیجه  $G$  سرشناسه تحويلناپذیر غیرخطی ای مانند  $\chi$  دارد که روی  $x$  صفر نمی‌شود زیرا  $|G/G'| = 2$ . از طرف دیگر، چون  $\chi_N$  یک سرشناسه تحويلناپذیر  $N$  نیست، پس  $\chi$  روی  $G \setminus N$  صفر می‌شود که این با نتیجه خط قبیل تناقض دارد.

در آخر فرض کنیم  $x$  ای در  $G \setminus N$  است که  $|G:N| = 2$ . پس بنا به اینکه قضایای ۱,۱ و ۲,۱ می‌توانیم بنویسیم

$$\bar{G} = G/O_{2'}(G) \cong A_4, S_4.$$

اگر  $\bar{G} \cong A_4$ , پس  $|G:G'| = O_{2'}(G)V_4$  و بنابراین  $\bar{G} \cong S_4$ . که دارای سرشت خطی است و بنا به قضیه ۱ از مقاله [۵], می‌توانیم بنویسیم:

$$|\text{Irr}(G) \setminus \text{Lin}(G)| \leq (2k_G(\text{Van}(G)) + 5)/3 = 11/3$$

که از این رو  $G$  حداقل ۳ سرشت تحویلناپذیر غیرخطی دارد. بنابراین، سرشت‌های تحویلناپذیر  $G$  دقیقاً همان سرشت‌های تحویلناپذیر  $S_4$  هستند، که نتیجه می‌دهد  $O_{2'}(G) = S_4$ .

حالت چهارم:  $|G:N| = 2$  و  $|N:G'| = 2$

در این حالت داریم  $x \in C_i$ . بنابراین برای هر  $x \in C_i$  داریم  $x \in C_1 = |C_1| = |C_2| = |G'|$  و  $\text{Van}(G) \cap N = C_3 = N \setminus G'$  پس بنا به فرض قضیه و قضایای ۱,۱ و ۲,۱ می‌توانیم بنویسیم  $|C_G(x)| = 4$ .

$$G/O_{2'}(G) \cong \mathbb{Z}_4, D_8, Q_8, A_4, S_4, S_3$$

در اینصورت اگر  $O_{2'}(G) \neq 1$  نمی‌تواند یکریخت باشد زیرا  $|G:G'| = 4$ . در غیر اینصورت، اگر  $O_{2'}(G) = 1$  باشد،  $G'$  یکریخت باشد،  $D_8 \rtimes Z(S)$  است. اگر  $G'$  پوچتوان نباشد،  $F(G') = O_{2'}(G)$  و بنا به لم ۴,۱

$$G' \setminus F(G') \subseteq \text{Van}(G)$$

که خلاف فرض قضیه است. از این رو  $Z(G) = Z(S) \cong \mathbb{Z}_2$

$$\frac{G}{Z(G)} \cong O_{2'}(G) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

گیریم  $x \in S \setminus Z(S)$  و  $g$  عنصری از مرتبه فرد باشد بطوریکه  $xz^gZ(G) = xZ(G)$  بنابراین عضو غیرهمانی از  $Z(G)$  وجود دارد بطوریکه  $xz^g = xz$ . بعلاوه، براحتی با استقراء می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی  $i$

$$x^{g^i} = xz^i$$

اما با قرار دادن  $i = o(g)$  داریم

$$x = x^{g^i} = xz^i$$

که نتیجه می‌دهد  $z^l = 1$ ، که غیرممکن است. از این رو  $G/Z(G)$  یک گروه فروبنیوس با هسته  $O_{2'}(G)$  و متمم  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  است که این نیز امکان پذیر نیست، به قضیه ۱۳.۳ از کتاب [۲] رجوع کنید. پس در این حالت،  $G$  یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد  $G'$  و متمم  $\mathbb{Z}_4$  است. حال اگر  $O_{2'}(G) = 1$  باشد،  $G$  با یکی از گروه‌های  $Q_8$  یا  $D_8$  یکریخت است.

$$\text{حالت پنجم: } |G:N| = 2 \text{ و } |N:G'| = 3$$

در این حالت داریم  $|C_1| = |C_2| = |C_3| = |G'|$  و  $\text{Van}(G) \cap N = \emptyset$ . از این رو بنا به لم ۵.۱  $N$  آبلی است و برای هر  $g$  در  $G - N$  داریم  $C_G(g) \cong \mathbb{Z}_6$ . عضوی از آنجاییکه  $G/G' \cong \mathbb{Z}_6$  بعلاوه از مرتبه ۳ در  $N - G'$  مانند  $x$  و عضوی از مرتبه ۲ در  $G - N$  مانند  $y$  وجود دارد بطوریکه

$$C_G(g) = \langle xy \rangle = C_G(y)$$

که نتیجه می‌دهد که  $\langle y \rangle$  یک ۲-زیرگروه سیلوی  $G$  است. بنابراین،  $\langle y \rangle \trianglelefteq G = N \trianglelefteq G' \trianglelefteq \langle x \rangle$  که در ان  $\langle y \rangle$  آبلی از مرتبه فرد است و  $\langle y \rangle \trianglelefteq G'$  یک گروه فروبنیوس است. پس نتیجه می‌گیریم  $Z(G) = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_3$

$$G \cong F \times \mathbb{Z}_3$$

$\square$  که در آن  $F$  یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد  $G'$  و متمم  $\mathbb{Z}_2$  است.

## References

1. S. Dolfi, E. Pacifici, L. Sanus and P. Spiga, On the vanishing prime graph of solvable groups, *J. Group Theory*, **13**(2) (2010), 189-206.
2. L. Dornhoff, *Group representation theory. Part A: Ordinary representation theory*, Marcel Dekker, New York, 1971.
3. I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, New York-San Francisco-London: Academic Press, 1976.
4. I. M. Isaacs, G. Navarro and T. R. Wolf, Finite group elements where no irreducible character vanishes, *J. Algebra*, **222**(2) (1999), 413-423.
5. G. Qian, Bounding the Fitting height of a solvable group by the number of zeros in a character table Proc. Amer. Math. Soc., **142** (2002), 3171–3176.
6. Y. Ren, X. Liu and J. Zhang, Notes on the restriction and the zeros of an irreducible character of a finite group, *Sichuan Daxue Xuebao*, **44** (2007), 1183–1188.

7. S. M. Robati, Groups whose set of vanishing elements is the union of at most three conjugacy classes, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **26**(1) (2019), 85-89.
8. S. M. Robati, Groups whose set of vanishing elements is exactly a conjugacy class, *Algebraic Structures and Their Applications*, **6**(2) (2019) 9-12.
9. S. M. Robati and M. R. Darafsheh, Finite groups with at most six vanishing conjugacy classes, *Journal of Algebra and Its Applications*, **21**(4) (2022), 2250076.
10. W. J. Wong, Finite groups with a self-centralizing subgroup of order 4, *J. Aust. Math. Soc.*, **7**(4) (1967), 570-576.
11. A. Kh. Zhurkov, Regular automorphisms of order 3 and Frobenius pairs, *Sib. Mat. Zh.*, **41**(2) (2000), 329-338.