Kharazmi University
Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Groups Whose Set of Vanishing Elements Is the Union of Exactly Three Conjugacy Classes

Sajjad Mahmood Robati [1]

1. Department of Pure Mathematics, Faculty of Sciences, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran
E-mail: mahmoodrobati@sci.ikiu.ac.ir, sajjad.robati@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 15 August 2021
Received in revised form: 7 October 2022
Accepted: 10 January 2023
Published online: 29 February 2024

Keywords:
Conjugacy class,
Irreducible character,
Solvable group,
Frobenius group.

ABSTRACT

Introduction

Let G be a finite group and let $\mathrm{Irr}(G)$ be the set of irreducible characters of G. We say that an element g in G is a vanishing element if there exists some $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ such that $\chi(g) = 0$. In this paper, we investigate the influence of the number of the columns containing some zeros in character table of G on the algebraic structure of G.

Material and Methods

Let Van(G) be the set of all vanishing elements, in other words,

$$\mathrm{Van}(G) = \{g \in G \,|\, \exists \chi \in \mathrm{Irr}(G) \;\; \chi(g) = 0\}.$$

We can easily check that $\mathrm{Van}(G)$ is the union of some conjugacy classes. Burnside show that $\mathrm{Van}(G) = \emptyset$ if and only if G is an abelian group. We know that finite groups whose set of vanishing elements is the union of at most three conjugacy classes are solvable. Using this result, we provide a relatively short proof for the main theorem.

Results and discussion

In this paper, we classify finite groups whose set of vanishing elements is the union of exactly three conjugacy classes.

Conclusion

If the set of vanishing elements of a finite group G is the union of exactly three conjugacy classes then one of the following ,situations:occurs

- G is isomorphic to D_8, Q_8, or S_4.
- G is a Frobenius group with abelian kernel of odd order and cyclic complement of order 4.
- $G \cong F \times \mathbb{Z}_3$, in which F is a Frobenius group with abelian kernel of odd order and complement of order 2.

How to cite: Mahmood Robati, Sajjad. (2023). Groups Whose Set of Vanishing Elements Is the Union of Exactly Three Conjugacy Classes. *Mathematical Researches*, 9 (4), 70 – 79.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴٦-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵٤-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

گروه‌هایی که مجموعه‌ی اعضای صفرشوی آنها اجتماع دقیقا سه کلاس تزویج است

سجاد محمود رباطی[۱] ✉

۱. گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران. رایانامه: mahmoodrobati@sci.ikiu.ac.ir, sajjad.robati@gmail.com

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	فرض کنیم G یک گروه متناهی و $\mathrm{Irr}(G)$ مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G باشند. گوییم عضو g در G یک عضو صفرشو در G است اگر سرشت $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ موجود باشد بطوریکه $\chi(g) = 0$. در این مقاله، یک اثبات نسبتاً کوتاه برای رده‌بندی گروه‌های متناهی‌ای ارائه می‌دهیم که مجموعه اعضای صفرشوی آنها دقیقا اجتماع سه کلاس تزویج است.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۲۴ **تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۱/۷/۱۵ **تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۱/۱۰/۲۰ **تاریخ انتشار:** ۱۴۰۲/۱۲/۱۰	
واژه‌های کلیدی: کلاس تزویج، سرشت تحویلناپذیر، گروه حلپذیر، گروه فروبنیوس.	

استناد: محمود رباطی، سجاد (۱۴۰۲). گروه‌هایی که مجموعه‌ی اعضای صفرشوی آنها اجتماع دقیقا سه کلاس تزویج است. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۷۰ – ۷۹.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

فرض کنیم G یک گروه متناهی و $\mathrm{Irr}(G)$ مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G باشند. گوییم عضو g در G یک عضو صفرشو در G است هرگاه سرشت $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ موجود باشد بطوریکه $\chi(g) = 0$، در غیر اینصورت g را یک عضو صفرنشوی G گوییم، به عبارت دیگر g یک عضو صفرنشوی در G است هرگاه به ازای هر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ داشته باشیم $\chi(g) \neq 0$.

فرض کنیم $\mathrm{Van}(G)$ مجموعه تمام اعضای صفرشوی G باشد، یعنی

$$\mathrm{Van}(G) = \{g \in G | \, \exists \chi \in \mathrm{Irr}(G) \;\; \chi(g) = 0 \}.$$

براحتی می‌توان نشان داد که مجموعه اعضای صفرشوی G اجتماعی از کلاس‌های تزویج G است. برنساید نشان داد که $\mathrm{Van}(G) = \emptyset$ اگر و فقط اگر G یک گروه آبلی باشد (به قضیه ۳,۱۵ از کتاب [۳] رجوع کنید). در مقاله [۷] با استفاده از رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی ثابت کرده‌ایم که اگر $\mathrm{Van}(G)$ اجتماع حداکثر سه کلاس تزویج G باشد، در اینصورت G حل‌پذیر است. سپس، در مقاله [۸]، گروه‌هایی را رده‌بندی کرده‌ایم که مجموعه اعضای صفرشوی آنها دقیقا یک کلاس تزویج است. از طرف دیگر، در مقاله [۹] نشان داده‌ایم که اگر $\mathrm{Van}(G)$ اجتماع حداکثر شش کلاس تزویج G باشد، در اینصورت G یا حل‌پذیر یا تقریبا ساده است و بعلاوه در آن مقاله گروه های غیرحل‌پذیر با چنین خاصیتی را رده‌بندی کرده‌ایم.

حال، در این مقاله می خواهیم با ارائه یک اثبات نسبتا کوتاه و ساده، گروه های متناهی را رده‌بندی کنیم که مجموعه اعضای صفرشوی آنها اجتماع دقیقا سه کلاس تزویج است. به عبارت دقیق‌تر، در این مقاله قضیه زیر را ثابت خواهیم کرد.

قضیه اصلی. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در اینصورت مجموعه تمام اعضای صفرشوی G اجتماع دقیقا سه کلاس تزویج G است اگر وفقط اگر یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد.

آ) G با یکی از گروه‌های Q_8 ، D_8 یا S_4 یکریخت باشد،

ب) G یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد G' و متمم فروبنیوس دوری از مرتبه ۴ باشد،

پ) $G \cong F \times \mathbb{Z}_3$، که در آن F یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد G' و متمّم از مرتبه ۲ است.

در این مقاله، از نمادهای استاندارد استفاده شده است. منظور از $\mathrm{F}(G)$ (زیرگروه فیتینگ G) زیرگروه تولید شده توسط تمام زیرگروهای نرمال پوچتوان G است و $O_{2'}(G)$ بزرگترین زیرگروه نرمال G از مرتبه فرد است. بعلاوه، $k_G(A)$ تعداد کلاس‌های تزویج G مشمول در A و $cl_G(x)$ کلاس تزویج شامل x در G را نمایش می‌دهند.

۱. لم‌ها و قضایای پیش‌نیاز

در این بخش، نتایجی را مطرح می‌کنیم که در اثبات قضیه اصلی مقاله ما را کمک می‌کنند. نتایج زیر، گروه‌هایی را مشخص می‌کنند که شامل یک زیرگروه از مرتبه ۴ هستند که مرکزسازش برابر با خودش است.

قضیه ۱٫۱ [۱۰، قضیه ۱]: فرض کنید G یک گروه متناهی با یک زیرگروه غیردوری از مرتبه ۴ که مرکزسازش در G برابر با خودش است. در اینصورت $G/O_{2'}(G)$ با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:

$$PSL(3,3), M_{11}, GL(2,3), H(q), PGL(2,q), PSL(2,q)\ \left(q \text{ فرد}\right), A_7, D_{2^n}, SD_{2^n}$$

□

قضیه ۲٫۱ [۱۰، قضیه ۲]: فرض کنید G یک گروه متناهی با یک زیرگروه دوری از مرتبه ۴ که مرکزسازش در G برابر با خودش است. در اینصورت $G/O_{2'}(G)$ با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:

$$SL(2,3), SL(2,5), PSL(2,7), PSL(2,9), PGL(2,3), PGL(2,5), H(9), J, A_7, D_8, SD_{2^n}, Q_{2^n}, \mathbb{Z}_4.$$

این بخش را با نتایج زیر درباره اعضای صفرشو و صفرنشو در گروه‌های متناهی به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۳٫۱ [۴، قضیه B]: فرض کنید G یک گروه پوچتوان متناهی باشد. در اینصورت هر عضو صفرنشوی G یک عضو مرکزی است.

لم ۴٫۱ [۱، لم ۲٫۶]: فرض کنید G یک گروه حل‌پذیر و N یک زیرگروه نرمال G باشد. اگر $N/\mathrm{F}(N)$ آبلی باشد، در اینصورت

$$N\backslash \mathrm{F}(N) \subseteq \mathrm{Van}(G).$$

لم ۵٫۱ [۶، قضیه ۸]: فرض کنید N یک زیرگروه حلپذیر گروه G باشد به‌طوری‌که $|G:N| = 2$. اگر $\mathrm{Van}(G) \cap N = \emptyset$، در اینصورت N آبلی و G دارای یک ۲-متمم نرمال آبلی است.

لم ۶٫۱. فرض کنید G یک گروه حل‌پذیر متناهی باشد. در اینصورت زیرگروه نرمال و سره N از G شامل G' وجود دارد بطوریکه

$$G \setminus N \subseteq \mathrm{Van}(G)$$

اثبات. چون G حل‌پذیر است، در اینصورت سرشت خطی غیربدیهی λ در G' و سرشت تحویل‌ناپذیر χ در G وجود دارند بطوریکه

$$[\chi_{G'}, \lambda] = [\chi, \lambda^{G}] \neq 0.$$

بعلاوه می‌دانیم تحدید هر سرشت خطی G به G' برابر با سرشت بدیهی G' است. از این رو $\chi_{G'} \neq \lambda$ غیرخطی و تحویل‌پذیر است. حال، چون G/G' آبلی است، بنا به قضیه ۲۲،۶ و تعریف ۲۱،۶ از کتاب [۳]، زیرگروه نرمال و سره N از G شامل G' و $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$ وجود دارند بطوریکه $\chi = \psi^G$ و $\psi_{G'} \in \mathrm{Irr}(G')$. بنابراین بنا به تعریف ψ^G، به ازای هر $g \in G \backslash N$ داریم $\chi(g) = 0$ و حکم برقرار است. $\square$

۲. نتایج اصلی

به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که اگر گروه متناهی G دارای حداکثر n کلاس تزویج صفرشو باشد و $N \trianglelefteq G$ ، در اینصورت نیز G/N نیز دارای حداکثر n کلاس تزویج صفرشو است. در انتهای این فصل، گروه های متناهی را رده‌بندی خواهیم کرد که مجموعه اعضای صفرشوی آنها اجتماع دقیقا سه کلاس تزویج است. در لم زیر، گروه‌های پوچتوان با حداکثر سه کلاس تزویج صفرشو مشخص می‌کنیم.

لم ۱،۲. فرض کنید G یک گروه پوچتوان متناهی باشد. در اینصورت مجموعه تمام اعضای صفرشوی G اجتماع حداکثر سه کلاس تزویج G است اگر و فقط اگر G یکی از گروه‌های D_8 یا Q_8 باشد.

اثبات. مشاهده می‌کنیم که بنا به قضیه ۳،۱، هر عضو غیرمرکزی G عضو صفرشوی G است. اگر G نـاآبلی باشد، کلاس‌های تزویج غیرمرکزی C_1 ، C_2 و C_3 (که الزاما متمایز نیستند) در G وجود دارند بطوریکه $\mathrm{Van}(G) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. با استفاده از معادله کلاسی می توانیم بنویسیم

$$p^n = |G| \leq |Z(G)| + |C_1| + |C_2| + |C_3| \leq p^k + 3p^{n-k-1} = p^k(1 + 3p^{n-2k-1})$$

که در آن $|Z(G)| = p^k$، $n \geq 3$ و $k \geq 1$. با تقسیم دو طرف بر p^k داریم:

$$4 \leq p^2 \leq p^{n-k} \leq 1 + 3p^{n-2k-1}$$

در نتیجه $n - 2k - 1 \geq 0$. حال دو طرف معادله بالا را بر p^{n-2k-1} تقسیم می‌کنیم.

$$4 \leq p^{k+1} \leq 3 + \frac{1}{p^{n-2k-1}} \leq 4$$

از این رو براحتی می توان محاسبه کرد که $p = 2$، $n = 3$ و $k = 1$ و بنابراین حکم نتیجه می‌شود.

لم ۲،۲ : فرض کنیم G یک گروه فروبنیوس با هسته N باشد. اگر N یک گروه پوچتوان از رده ۲ باشد، در اینصورت

$$N \backslash \mathrm{Z}(N) \subseteq \mathrm{Van}(G).$$

اثبات. گیریم $x \in N\backslash Z(N)$، پس سرشت تحویلناپذیری مانند θ در N وجود دارد بطوریکه $x \in N\backslash Z(\theta)$. چون $N' \subseteq Z(N) \subseteq Z(\theta)$ ، در نتیجه $N/Z(\theta)$ آبلی است. از این رو بنا به نتیجه ۳۰,۲ و قضیه ۳۱,۲ کتاب [۳]، θ روی عناصر $N\backslash Z(\theta)$ صفر می‌شود. چون $Z(\theta)$ در G نرمال است از این رو برای هر $g \in G$ داریم $\theta(x^g) = 0$.

از طرف دیگر اگر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ بطوریکه $[\chi_N, \theta] \neq 0$ و $N \nsubseteq \ker\chi$، پس بنا به قضیه کلیفورد و قضیه ۳۴,۶ کتاب [۳]، عناصر $g_1, \dots, g_n$ در G وجود دارند بطوریکه

$$\chi(x) = \chi_N(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta(x^{g_i}) = 0.$$

و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود. □

حال آماده‌ایم اثبات قضیه اصلی را بیان نماییم.

اثبات قضیه اصلی.

بنا به [۷، قضیه ۸,۲]، G حل‌پذیر است. از طرف دیگر لم ۶,۱، نتیجه می دهد که کلاس های تزویج C_1 ، C_2 و C_3 در G وجود دارند بطوریکه $\mathrm{Van}(G) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ و $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup N = G$، که در آن N یک زیرگروه نرمال و سره G شامل G' است. از طرفی چون به ازای هر i ، $|C_i| \leq |G'| \leq |N|$ و با توجه به اینکه همدسته‌های N در G، گروه G را افراز می‌کنند، یکی از پنج حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: $N = G'$ و $|G:N| = 4$.

در این حالت می بینیم که $\mathrm{Van}(G) \subseteq G\backslash N$ و $|C_1| = |C_2| = |C_3| = |G'|$. بنابراین برای هر $x \in C_i$ داریم $|C_G(x)| = 4$. پس فرض قضیه و قضایای ۱,۱ و۲,۱ نتیجه می دهند که

$$\frac{G}{O_{2'}(G)} \cong \mathbb{Z}_4, D_8 \text{ یا } Q_8$$

در اینصورت اگر $O_{2'}(G) \neq 1$ باشد، G یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی $O_{2'}(G)$ است. اگر Q_8 یا D_8 متمّم فروبنیوس برای گروه G باشد، بنا به قضیه ۱۳,۸ از کتاب [۲]، G چهار کلاس تزویج صفرشو دارد که خلاف فرض است. بنابراین در این حالت، G یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد G' و متمّم $\mathbb{Z}_4$ است. حال، اگر $O_{2'}(G) = 1$ باشد، در اینصورت G با یکی از گروه‌های D_8 یا Q_8 یکریخت است.

حالت دوم: $N = G'$ و $|G:N| = 3$.

در این حالت یا (۱) $\mathrm{Van}(G) \subseteq G\backslash N$ و $|C_1| + |C_2| + |C_3| = 2|G'|$، یا (۲) $\mathrm{Van}(G) \cap N = C_3$ و $|C_1| = |C_2| = |G'|$. اگر (۲) برقرار باشد، برای هر x در $G\backslash N$ داریم $|C_G(x)| = 3$. اگر (۱) برقرار باشد، برای

حداقل یک i داریم $|C_i| \geq \frac{2}{3}|G'|$ و از این رو برای هر x در C_i داریم $|C_G(x)| \leq 9/2$. از آنجاییکه $|G:N| = 3$ است، بنابراین $|C_G(x)| = 3$. در نتیجه در هر دو وضعیت (۱) و (۲)، x ای در $G\backslash N$ وجود دارد بطوریکه $C_G(x) = \langle x\rangle$ از مرتبه ۳ است و از این رو G یک گروه فروبنیوس با هسته G' و متمّم $\mathbb{Z}_3$ است و (۱) اتفاق نمی‌افتد. از طرفی بنا به قضیه ۳ از مقاله [۱۱]، G' یک گروه پوچتوان از رده ۲ است و در نتیجه بنا به لم ۲،۲، $C_3 = N\backslash \mathrm{Z}(N) \subseteq \mathrm{Van}(G)$. چون $\langle x\rangle \cong \mathbb{Z}_3$ بدون نقطه ثابت بر N عمل می‌کند، در اینصورت

$$N - \mathrm{Z}(N) = C_3 = cl_G(h) = cl_N(h) \cup cl_N(h^g) \cup cl_N\left(h^{g^2}\right),$$

که در آن C_3 کلاس تزویج h از G مشمول در N است. از این رو N شامل دقیقا ۳ کلاس تزویج غیرمرکزی است. می توانیم فرض کنیم N یک p-گروه است و مانند اثبات لم ۱،۲، می توانیم ثابت کنیم که N از مرتبه ۸ است که این ممکن نیست زیرا $3 \nmid 8 - 1$.

حالت سوم: $N = G'$ و $|G:N| = 2$.

در این حالت یا (۱) $\mathrm{Van}(G) \subseteq G\backslash N$ و $|C_1| + |C_2| + |C_3| = |G'|$، یا (۲) $\mathrm{Van}(G) \cap N = C_3$ و $|C_1| + |C_2| = |G'|$، یا (۳) $\mathrm{Van}(G) \cap N = C_2 \cup C_3$ و $|C_1| = |G'|$.

در حالت (۱) برای حداقل یک i داریم $|C_i| \geq |G'|/3$، از این رو برای هر x در C_i داریم $|C_G(x)| \leq 6$، در حالت (۲)، برای حداقل یک i داریم $C_i \subseteq G - N$ و $|C_i| \geq |G'|/2$، پس برای هر x در C_i داریم $|C_G(x)| \leq 4$ و در حالت (۳) برای هر x در C_1 داریم $|C_G(x)| = 2$.

اگر برای xای در $G\backslash N$، $|C_G(x)| = p$ یک عدد اول باشد، در اینصورت $\langle x\rangle$ یک p-زیرگروه سیلوی G از مرتبه p است. بنابراین p باید برابر با ۲ باشد و بنابراین G یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد G' و متمّم $\mathbb{Z}_2$ است و در نتیجه G دارای دقیقا یک کلاس تزویج صفرشو است که این با فرض قضیه تناقض دارد و همچنین (۳) اتفاق نمی‌افتد.

اگر برای هر g در $G - N$، $|C_G(g)| = 6$ باشد، در اینصورت حالت (۱) برقرار است. از این رو بنا به لم ۵،۱، N آبلی است و $G = N \rtimes \langle x\rangle$ که در آن $\langle x\rangle$ یک ۲-زیرگروه سیلوی G از مرتبه ۲ است. از طرفی، می توانیم بنویسیم

$$6 = |C_G(x)| = |G/G'| + \sum_{\chi\in Irr(G)-Lin(G)} |\chi(x)|^2$$

که در آن منظور از $\mathrm{Lin}(G)$ مجموعه تمام سرشت‌های خطی G است. در نتیجه G سرشت تحویلناپذیر غیرخطی‌ای مانند χ دارد که روی x صفر نمی‌شود زیرا $|G/G'| = 2$. از طرف دیگر، چون χ_N یک سرشت تحویلناپذیر N نیست، پس χ روی $G\backslash N$ صفر می‌شود که این با نتیجه خط قبل تناقض دارد.

در آخر فرض کنیم xای در $G\backslash N$ است که $|C_G(x)| = 4$. پس بنا به اینکه $|G:N| = 2$ است و بنا به فـرض قضـیه و قضایای ۱٫۱ و۲٫۱ می‌توانیم بنویسیم

$$\bar{G} = G/O_{2'}(G) \cong A_4, S_4.$$

اگر $\bar{G} \cong A_4$، پس $G' = O_{2'}(G)V_4$ و بنابراین $|G:G'| = 3$ که یک تناقض است. از این رو $\bar{G} \cong S_4$، کـه دارای ۲ سرشت خطی است و بنا به قضیه ۱ از مقاله [۵]، می توانیم بنویسیم:

$$|\mathrm{Irr}(G)\backslash \mathrm{Lin}(G)| \le (2k_G(\mathrm{Van}(G)) + 5)/3 = 11/3$$

که از این رو G حداکثر ۳ سرشت تحویلناپذیر غیرخطی دارد. بنابراین، سرشت‌های تحویلناپذیر G دقیقا همان سرشت‌هـای تحویلناپذیر S_4هستند، که نتیجه می دهد $O_{2'}(G) = 1$ و $G = S_4$.

حالت چهارم: $|N:G'| = 2$ و $|G:N| = 2$.

در این حالت داریـم $\mathrm{Van}(G) \cap N = C_3 = N\backslash G'$ و $|C_1| = |C_2| = |G'|$. بنـابراین بـرای هـر $x \in C_i$ داریـم $|C_G(x)| = 4$. پس بنا به فرض قضیه و قضایای ۱٫۱ و۲٫۱ می‌توانیم بنویسیم

$$G/O_{2'}(G) \cong \mathbb{Z}_4, D_8, Q_8, A_4, S_4, S_3$$

در اینصورت اگر $O_{2'}(G) \neq 1$، H نمی‌تواند یکریخت با S_4, S_3 یا A_4 باشد زیرا $|G:G'| = 4$. در غیر اینصـورت، اگـر ۲-زیرگروه سیلوی S از G با Q_8 یا D_8 یکریخت باشد، G' یکریخت با $Z(S) \ltimes O_{2'}(G)$ است. اگر G' پوچتوان نباشد، $F(G') = O_{2'}(G)$ و بنا به لم ۴٫۱،

$$G'\backslash F(G') \subseteq Van(G)$$

که خلاف فرض قضیه است. از این رو $Z(G) = Z(S) \cong \mathbb{Z}_2$ و

$$\frac{G}{Z(G)} \cong O_{2'}(G) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

گیریم $x \in S\backslash Z(S)$ و g عنصری از مرتبه فرد باشد بطوریکه $x^g Z(G) = xZ(G)$. بنـابراین عضـو غیرهمـانی z از $Z(G)$ وجود دارد بطوریکه $x^g = xz$. بعلاوه، براحتی با استقراء می توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی i،

$$x^{g^i} = xz^i$$

اما با قرار دادن $i = o(g)$، داریم

$$x = x^{g^i} = xz^i$$

که نتیجه می دهد $z^i = 1$، که غیرممکن است. از این رو $G/Z(G)$ یک گروه فروبنیوس با هسته $O_{2'}(G)$ و متمّم $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ است که این نیز امکان پذیر نیست، به قضیه ۱۳,۳ از کتاب [۲] رجوع کنید. پس در این حالت، G یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد G' و متمّم $\mathbb{Z}_4$ است. حال اگر $O_{2'}(G) = 1$ باشد، G با یکی از گروه‌های D_8 یا Q_8 یکریخت است.

حالت پنجم: $|N:G'| = 3$ و $|G:N| = 2$.

در این حالت داریم $\mathrm{Van}(G) \cap N = \emptyset$ و $|C_1| = |C_2| = |C_3| = |G'|$. از این رو بنا به لم ۵,۱، N آبلی است و برای هر g در $G - N$ داریم $C_G(g) \cong \mathbb{Z}_6$. بعلاوه از آنجاییکه $G/G' \cong \mathbb{Z}_6$، عضوی از مرتبه ۳ در $N - G'$ مانند x و عضوی از مرتبه ۲ در $G - N$ مانند y وجود دارند بطوریکه

$$C_G(g) = \langle xy \rangle = C_G(y)$$

که نتیجه می‌دهد که $\langle y \rangle$ یک ۲-زیرگروه سیلوی G است. بنابراین، $G = N \rtimes \langle y \rangle$ که در ان $N = G' \rtimes \langle x \rangle$ آبلی از مرتبه فرد است و $G' \rtimes \langle y \rangle$ یک گروه فروبنیوس است. پس نتیجه می‌گیریم $Z(G) = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ و

$$G \cong F \times \mathbb{Z}_3$$

که در آن F یک گروه فروبنیوس با هسته آبلی و فرد G' و متمّم $\mathbb{Z}_2$ است. □

References

1. S. Dolfi, E. Pacifici, L. Sanus and P. Spiga, On the vanishing prime graph of solvable groups, J. Group Theory, **13**(2) (2010), 189-206.

2. L. Dornhoff, Group representation theory. Part A: Ordinary representation theory, Marcel Dekker, New York, 1971.

3. I. M. Isaacs, Character theory of finite groups, New York-San Francisco-London: Academic Press, 1976.

4. I. M. Isaacs, G. Navarro and T. R. Wolf, Finite group elements where no irreducible character vanishes, J. Algebra, **222**(2) (1999), 413-423.

5. G. Qian, Bounding the Fitting height of a solvable group by the number of zeros in a character table Proc. Amer. Math. Soc., **142** (2002), 3171–3176.

6. Y. Ren, X. Liu and J. Zhang, Notes on the restriction and the zeros of an irreducible character of a finite group, Sichuan Daxue Xuebao, **44** (2007), 1183–1188.

7. S. M. Robati, Groups whose set of vanishing elements is the union of at most three conjugacy classes, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stiven, **26**(1) (2019), 85-89.

8. S. M. Robati, Groups whose set of vanishing elements is exactly a conjugacy class, Algebraic Structures and Their Applications, **6**(2) (2019) 9-12.

9. S. M. Robati and M. R. Darafsheh, Finite groups with at most six vanishing conjugacy classes, Journal of Algebra and Its Applications, **21**(4) (2022), 2250076.

10. W. J. Wong, Finite groups with a self-centralizing subgroup of order 4, J. Aust. Math. Soc., **7**(4) (1967), 570-576.

11. A. Kh. Zhurtov, Regular automorphisms of order 3 and Frobenius pairs, Sib. Mat. Zh., **41**(2) (2000), 329-338.