



Kharazmi University

Study of Weak Associated Primes Ore Extensions

M. Zahiri¹  , S. Zahiri² 

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of science, Higher Education Center of Eghlid, Eghlid, Iran. E-mail: m.zahiri86@gmail.com, m.zahiri@eghlid.ac.ir
2. Department of Mathematics, Faculty of science, Higher Education Center of Eghlid, Eghlid, Iran. E-mail: saeede.zahiri@yahoo.com, s.zahiri@eghlid.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 4 October 2021
 Accepted: 27 August 2023
 Published online:
 10 July 2024

Keywords:

nil δ -weakly rigid rings,
 Weak associated primes,
 Differential polynomial rings,
 Quasi IFP-rings.

ABSTRACT

Introduction

Throughout this article, R denotes an associative ring with unity. A derivation over R is an additive map $\delta : R \rightarrow R$ such that $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$, for each $a, b \in R$. We denote by $R[x; \delta]$ the ring of differential polynomial ring, whose elements are the polynomials over R , the addition is defined as usual, and the multiplication subject to the relation $xa = ax + \delta(a)$, for each $a \in R$. The set of all nilpotent elements of R is denoted by $nil(R)$. Recall that a ring R is called *reduced* if $nil(R) = 0$. A ring R is called *reversible* if $ab = 0$ implies $ba = 0$, for all $a, b \in R$; a ring R has IFP (or is *semicommutative*) if $ab = 0$ implies $aRb = 0$, for all $a, b \in R$. A ring R is called *2-primal* provided $P(R) = nil(R)$, where $P(R)$ is the prime radical of R . According to Kim *et al.* [7], a ring R has *quasi-IFP* provided that $\sum_{i=0}^n Ra_iR$ is nilpotent whenever $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ is nilpotent. They showed that, a ring R has quasi-IFP if and only if $N_0(R) = nil(R)$, where $N_0(R)$ is the Wedderburn radical of R . They also obtained that every ring with quasi-IFP is 2-primal, and rings with IFP have quasi-IFP property. In general, each of these implications is irreversible.

$$\text{reversible rings} \Rightarrow \text{semicommutative rings} \Rightarrow \text{rings with quasi-IFP} \Rightarrow \text{2-primal rings.}$$

According to Krempa [8], an endomorphism α of a ring R is called *rigid* if $\alpha\alpha(a) = 0$ implies $a = 0$ for $a \in R$. A ring R is α -*rigid* if there exists a rigid endomorphism α of R . Note that any rigid endomorphism of a ring is a monomorphism and α -rigid rings are reduced. Hashemi and the Moussavi [8], generalized α -rigid rings to α -*compatible rings*. According to [6], ring R is said to be α -*compatible* if for each $a, b \in R, ab = 0 \Leftrightarrow \alpha a(b) = 0$. Moreover, R is called δ -*compatible* if for each $a, b \in R, ab = 0 \Rightarrow a\delta(b) = 0$. If R is both α -compatible and δ -compatible, then R is said to be (α, δ) -*compatible*. By [6], a ring R is α -rigid if and only if R is (α, δ) -compatible and reduced.

For a ring R and a right R -module M_R , denoted $r_R(M) = \{R \in R \mid mR = 0\}$ the set of right annihilators of M_R . A module M_R is said to be prime if $M_R \neq 0$ and $r_R(M) = r_R(N)$, for every non-zero submodule N of M . If M_R is a right R -module, an ideal P of R is called an associated prime of M_R if there exists a prime submodule N of M such that $P = r_R(N)$. The set of associated primes of M_R is denoted by $Ass(M_R)$. It is shown that for a

commutative ring R , the associated primes ideals of the polynomial ring $R[x]$ are $P[x]$, where $P \in \text{Ass}(R)$. Annin [1], extended the result above to the noncommutative setting of Ore extensions.

By Ouyang [14], for a subset X of a ring R , $Nl_R(X) = \{a \in R \mid ax \in \text{nil}(R), \text{ for all } x \in X\}$ and $Nr_R(X) = \{a \in R \mid xa \in \text{nil}(R), \text{ for all } x \in X\}$ are called *the left weak annihilator* and *the right weak annihilator* of X in R , respectively. By Ouyang et al. [14], a right ideal I of a non-zero ring R , is called a right weak-prime ideal if $I \not\subseteq \text{nil}(R)$ and $Nr_R(I) = Nr_R(J)$ for every right ideal $J \subseteq I$ and $J \not\subseteq \text{nil}(R)$. An ideal P of R is called a weak associated prime of R if there exists a right weak-prime ideal I such that $P = Nr_R(I)$. The set weak associated primes of R is denoted by $N\text{Ass}(R)$. They described all weak associated primes of the skew polynomial ring $R[x; \alpha, \delta]$ in terms of the weak associated primes of R . In fact they proved that, *if R is a reversible and δ -compatible ring, then $N\text{Ass}(R[x; \delta]) = \{P[x; \delta] \mid P \in N\text{Ass}(R)\}$.*

In this paper we introduce the notion of nil δ -weakly rigid rings which is a generalization of reduced rings and δ -compatible rings. We extend the results of [14] to the more general situation. The main result of the present paper says that when R is nil δ -weakly rigid and quasi-IFP, the $N\text{Ass}(R[x; \delta]) = \{P[x; \delta] \mid P \in N\text{Ass}(R)\}$. Note that the notions nil δ -weakly rigid and quasi-IFP can be transfer to $T_n(R)$ but this is not true for δ -compatibility and reversibility property.

How to cite: Zahiri. M., Zahiri. S. (2024). Study of Weak Associated Primes Ore Extensions, *Mathematical Researches*, **10** (2), 34 – 50.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

مطالعه ایده‌آل‌های وابسته ضعیف حلقه‌های چندجمله‌ای اریب

معصومه ظهیری^۱✉، سعیده ظهیری^۲

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضیات و کاربردها، مرکز آموزش عالی اقلید، اقلید، ایران m.zahiri86@gmail.com, m.zahiri@eghlid.ac.ir
۲. گروه ریاضیات و کاربردها، مرکز آموزش عالی اقلید، اقلید، ایران saede.zahiri@yahoo.com, s.zahiri@eghlid.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۶/۵ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۴/۱۰	در این مقاله مفهوم حلقه‌های پوچ δ -صلب ضعیف را معرفی می‌کنیم که تعمیم حلقه‌های کاهشی و δ -سازگار هستند. اویانگ ^۱ در [۱۴] مفهوم ایده‌آل‌های اول وابسته ضعیف را تعریف و ثابت کرد وقتی که حلقه R برگشت پذیر و δ -سازگار باشد آنگاه تناظر یک به یکی بین ایده‌آل‌های وابسته ضعیف حلقه‌های R و $R[x; \delta]$ وجود دارد. در این مقاله نشان می‌دهیم این تناظر وقتی که حلقه R شبه نیم‌جابجایی و پوچ δ -صلب ضعیف باشد نیز برقرار است. این تعمیم از این جهت اهمیت دارد که خاصیت شبه نیم‌جابجایی و پوچ δ -صلب ضعیف حلقه‌ها، هر دو به حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی منتقل می‌شوند که این خاصیت در مورد حلقه‌های برگشت پذیر و δ -سازگار برقرار نیست.
واژه‌های کلیدی: حلقه پوچ δ -صلب ضعیف، حلقه وابسته ضعیف اول؛ حلقه چندجمله‌ای دیفرانسیلی، حلقه شبه نیم‌جابجایی.	

استناد: ظهیری، معصومه؛ ظهیری، سعیده (۱۴۰۳). مطالعه ایده‌آل‌های وابسته ضعیف حلقه‌های چندجمله‌ای اریب، پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۲)، ۳۴-۵۰.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

¹ Ouyang

مقدمه

در سراسر این مقاله R را حلقه‌ای شرکت‌پذیر و یک‌دار فرض می‌کنیم. نگاشت جمعی $\delta: R \rightarrow R$ را یک عملگر مشتق روی R گوییم هرگاه برای هر $a, b \in R$ در خاصیت $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ صدق کند. چندجمله‌ای مشتق روی حلقه R را با نماد $R[x, \delta]$ نمایش می‌دهیم که عناصر آن به صورت چندجمله‌ای‌هایی روی R است که از جمع معمولی و قانون ضرب $xa = ax + \delta(a)$ تبعیت می‌کند. مجموعه عناصر پوچتوان حلقه R را با نماد $nil(R)$ نشان می‌دهیم. حلقه R را کاهشی گوییم هرگاه $nil(R) = 0$. در سال ۱۹۹۹، کوهن^۱ [۴]، تعمیمی از حلقه‌های جابجایی و حلقه‌های کاهشی معرفی کرد. او حلقه R را برگشت‌پذیر نامید هرگاه برای هر $a, b \in R$ اگر $ab = 0$ آنگاه $ba = 0$. در سال ۱۹۸۲، ناربن^۲ [۱۳]، تعمیمی از حلقه‌های جابجایی معرفی کرد. او حلقه R را نیم‌جابجایی نامید هرگاه برای هر $a, b \in R$ اگر $ab = 0$ آنگاه $aRb = 0$. در سال ۲۰۰۹، کیم و همکارانش^۳ [۸]، حلقه‌های جدیدی که تعمیم حلقه‌های نیم‌جابجایی بودند را معرفی کردند. آنها حلقه R را شبه نیم‌جابجایی نامیدند هرگاه برای هر چندجمله‌ای $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in nil(R[x])$ عدد طبیعی $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $(Ra_0R + \dots + Ra_nR)^k = 0$. در سال ۱۹۹۳، بیرکنمیر و هیتزلی^۴ [۲]، حلقه R را ۲-اولیه نامیدند هرگاه $P(R) = nil(R)$ ، که $P(R)$ برابر اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول در نظر گرفته می‌شود. در حالت کلی رابطه زیر بین حلقه‌های بیان شده وجود دارد:

۲-اولیه \rightarrow شبه نیم‌جابجایی \rightarrow نیم‌جابجایی \rightarrow برگشت‌پذیر \rightarrow کاهشی

در سال ۲۰۰۰، هاشمی و موسوی [۷]، مفهوم حلقه‌های δ -سازگار را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\forall a, b \in R, ab = 0 \rightarrow a\delta(b) = 0$$

آنها نشان دادند که هر حلقه α -صلب، δ -سازگار می‌باشد و با ارایه مثال‌هایی نشان دادند که عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. لذا حلقه‌های δ -سازگار تعمیمی از حلقه‌های α -صلب هستند. برای هر مدول M ، زیرمجموعه $X \subseteq M_R$ پوچساز راست X از R را با نماد $r_R(X)$ نشان می‌دهیم که $r_R(X) = \{r \in R: Xr = 0\}$. فیث^۵ در سال ۲۰۰۰، نشان داد در حلقه‌های جابجایی تناظری یک به یک بین ایده‌آل‌های اول وابسته حلقه R و حلقه چندجمله‌ای‌های آن وجود دارد. آنین^۶ مفهوم مدول‌های اول روی حلقه‌های جابجایی را به مدول‌های اول روی هر حلقه دلخواه تعمیم داد. او مدول N را اول نامید هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر N' از N داشته باشیم $Sr_R(N) = r_R(N')$. وی همچنین مفهوم ایده‌آل‌های اول وابسته روی هر حلقه دلخواه را تعریف کرد و مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته R را با نماد $Ass(R)$ نشان داد و ثابت کرد که تحت شرایطی $Ass(R[x; \alpha, \delta]) = \{P[x; \alpha, \delta]: P \in Ass(R)\}$

¹ Cohn

² Narbone

³ Kim and etal.

⁴ Birkenmeier and Heatherly

⁵ Faith

⁶ Annin

اویانگ^۱ [۱۴] در سال ۲۰۱۲، برای هر زیرمجموعه X از R مفهوم پوچساز ضعیف X در R را به صورت $N_R(X) = \{a \in R: Xa \subseteq \text{nil}(R)\}$ تعریف کرد. با استفاده از این تعریف، مفاهیم ایده‌آل‌های راست اول ضعیف و ایده‌آل‌های اول ضعیف وابسته را تعریف و مطالعه کرد. اویانگ ثابت کرد اگر R برگشت‌پذیر و δ -سازگار باشد آنگاه $N\text{Ass}(R[x, \delta]) = \{P[x, \delta]: P \in N\text{Ass}(R)\}$

در این مقاله ما مفهوم حلقه‌های پوچ δ -صلب ضعیف را که تعمیمی از حلقه‌های کاهشی و حلقه‌های δ -سازگار هستند تعریف کرده و خواصی از آن را بیان می‌کنیم. همچنین مثال‌هایی ارائه می‌دهیم که پوچ δ -صلب ضعیف هستند ولی δ -سازگار یا کاهشی نیستند. در ادامه نشان می‌دهیم اگر حلقه R شبه نیم‌جابجایی و پوچ δ -صلب ضعیف باشد، آنگاه $N\text{Ass}(R[x, \delta]) = \{P[x, \delta]: P \in N\text{Ass}(R)\}$. یکی از مهمترین نتایج این مقاله بیان می‌کند که برای هر حلقه کاهشی و برای هر مشتق δ روی آن، تناظری یک به یک روی ایده‌آل‌های وابسته اول حلقه R و حلقه چندجمله‌های دیفرانسیلی $R[x, \delta]$ وجود دارد. به عبارت دیگر برای حلقه کاهشی R و هر مشتق دلخواه δ روی حلقه R ، همواره داریم: $\text{Ass}(R[x, \delta]) = \{P[x, \delta]: P \in \text{Ass}(R)\}$

۱. حلقه‌های پوچ δ -صلب ضعیف

تعریف ۱. حلقه R را پوچ δ -صلب ضعیف نامیم هرگاه برای هر $a, b \in \text{nil}(R)$ نتیجه دهد $aRb = 0$ نتیجه دهد $aR\delta(b) = 0$. به‌وضوح حلقه‌های کاهشی و δ -سازگار و حلقه‌های اول، پوچ δ -صلب ضعیف هستند در ادامه با ارایه مثال‌هایی نشان می‌دهیم عکس آن برقرار نمی‌باشد.

گزاره ۲. اگر δ یک عملگر مشتق ناصفر و حلقه R ، δ -صلب باشد، عملگر مشتق $\bar{\delta}$ را روی $T_3(R)$ به صورت $\bar{\delta}((a)_{ij}) = (\delta(a))_{ij}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $T_3(R)$ ، پوچ $\bar{\delta}$ -صلب ضعیف است ولی $\bar{\delta}$ -سازگار یا کاهشی نیست.

اثبات: چون حلقه R کاهشی است:

$$\text{nil}(T_3(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

حال فرض کنیم $AT_3(R)B = 0$ ، به‌طوریکه

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{nil}(T_3(R))$$

¹ Ouyang

از $AT_3(R)B = 0$ نتیجه می‌شود $a_{12}Rb_{23} = 0$. چون حلقه R ، δ -صلب است لذا $a_{12}R\delta(b_{23}) = 0$ به راحتی می‌توان نشان داد $AR\bar{\delta}(B) = 0$. بنابراین $T_3(R)$ ، پوچ $\bar{\delta}$ -صلب ضعیف است.

چون δ یک عملگر مشتق ناصفراست، عضوی مانند $c \in R$ وجود دارد که $\delta(c) \neq 0$.

با فرض $A = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ داریم $AB = 0$ ولی $A\bar{\delta}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(c) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ ، که نشان می‌دهد $T_3(R)$ ، $\bar{\delta}$ -سازگار نیست. به‌وضوح حلقه‌ای اول و کاهشی نیست. ■

برای حلقه R ، $K(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in R \right\}$$

مثال ۳. اگر δ یک عملگر مشتق ناصفر و حلقه R ، δ -صلب باشد در این صورت عملگر مشتق $\bar{\delta}$ را روی $K(R)$ به صورت $\bar{\delta}((a)_{ij}) = (\delta(a))_{ij}$ تعریف می‌کنیم در این صورت $K(R)$ ، پوچ $\bar{\delta}$ -صلب ضعیف است ولی $\bar{\delta}$ -سازگار یا کاهشی نیست.

برهان: چون δ یک عملگر مشتق ناصفر است عضوی مانند $a \in R$ وجود دارد که $\delta(a) \neq 0$. در اینصورت با فرض

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

داریم $AB = 0$ ولی $A\bar{\delta}(B) \neq 0$. بنابراین $K(R)$ ، $\bar{\delta}$ -سازگار نیست. به‌وضوح $K(R)$ کاهشی نیست.

حال نشان می‌دهیم $K(R)$ ، پوچ $\bar{\delta}$ -صلب ضعیف است برای این منظور فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{nil}(R)$$

و همچنین داشته باشیم $AK(R)B = 0$. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} a_{12}Rb_{23} = 0 \\ a_{12}Rb_{24} + a_{12}Rb_{23} + a_{13}Rb_{23} = 0 \\ a_{23}Rb_{23} = 0 \end{cases}$$

چون حلقه R ، α -صلب است لذا کاهشی بوده و از $a_{12}Rb_{23} = 0$ نتیجه می‌شود $b_{23}a_{12} = 0$. حال اگر معادله

$a_{12}Rb_{24} + a_{12}Rb_{23} + a_{13}Rb_{23} = 0$ را از سمت چپ در b_{23} ضرب کنیم، داریم $b_{23}a_{13}Rb_{23} = 0$. پس

$a_{13}Rb_{23}a_{13}Rb_{23} = 0$. چون حلقه R کاهشی است لذا $a_{13}Rb_{23} = 0$ و در نتیجه $a_{13}R\delta(b_{23}) = 0$. حال

چون $a_{12}Rb_{24} + a_{12}Rb_{23} + a_{13}Rb_{23} = 0$ و $a_{13}Rb_{23} = 0$ و $a_{12}Rb_{23} = 0$ نتیجه می‌شود
 $a_{12}Rb_{24} = 0$ و لذا $a_{12}R\delta(b_{24}) = 0$. همچنین از $a_{12}Rb_{23} = 0$ و $a_{23}Rb_{23} = 0$ نتیجه می‌شود
 $a_{12}R\delta(b_{23}) = 0$ و $a_{23}R\delta(b_{23}) = 0$ با استفاده از این روابط، داریم:

$$\begin{cases} a_{12}R\delta(b_{23}) = 0 \\ a_{12}R\delta(b_{24}) + a_{12}R\delta(b_{23}) + a_{13}R\delta(b_{23}) = 0 \\ a_{23}R\delta(b_{23}) = 0 \end{cases}$$

بنابراین $AR\bar{\delta}(B) = 0$ که نشان می‌دهد $K(R)$ پوچ $\bar{\delta}$ -صلب ضعیف است. ■

در زیر مثالی از حلقه‌ای ارائه می‌دهیم که پوچ $\bar{\delta}$ -صلب ضعیف نیست.

مثال ۴. فرض کنیم δ عملگر مشتق روی $R = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2 \rangle}$ با تعریف $\delta(a_0 + a_1x) = a_1$ باشد در این صورت $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2 \rangle}$ پوچ
 $\bar{\delta}$ -صلب ضعیف نیست، زیرا $ax = \text{nil}\left(\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2 \rangle}\right)$ حال با فرض $f = x, g = x$ داریم $fRg = 0$ ولی $fR\delta(g) =$
 $xR \neq 0$ ■

تعریف ۵. حلقه R را شبه-نیم-جابجایی نامیم هرگاه $\sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x]$ پوچ توان باشد، آن‌گاه $\sum_{i=0}^n Ra_i R$ نیز پوچ توان باشد.

قضیه ۶. فرض کنیم R شبه-نیم-جابجایی باشد در این صورت $\text{nil}(R)$ ایده‌آلی از R است.

لم ۷. فرض کنیم حلقه R پوچ $\bar{\delta}$ -صلب ضعیف و شبه-نیم-جابجایی باشد، آنگاه $\delta(\text{nil}(R)) \subseteq \text{nil}(R)$

برهان: فرض کنیم a عضو پوچ‌توانی از حلقه R باشد. چون R شبه-نیم-جابجایی است عددی مانند k وجود دارد که
 $(aR)^k = 0$. چون $(aR)^{k-1}a = 0$ با استفاده از پوچ $\bar{\delta}$ -صلب سازگاری داریم:

$$(aR)^{k-1}\delta(a) (aR)^{k-2}aR\delta(a) = 0 \quad (1)$$

حال با اعمال خاصیت پوچ $\bar{\delta}$ -صلب ضعیف روی $(aR)^{k-2}aRa = 0$ داریم:

$$(aR)^{k-2}\delta(aRa) = (aR)^{k-2}\delta(a)Ra + (aR)^{k-2}a\delta(R)a + (aR)^{k-2}aR\delta(a) = 0, \quad (2)$$

چون $(aR)^{k-1}a = 0$ از رابطه (۲) نتیجه می‌شود:

$$(aR)^{k-2}\delta(a)Ra + (aR)^{k-2}aR\delta(a) = 0, \quad (3)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$(aR)^{k-2}\delta(a)Ra = 0, \quad (۴)$$

حال چون R حلقه‌ای پوچ δ -صلب ضعیف است و $(aR)^{k-3}aRaRa = 0$ داریم:

(۵)

$$\begin{aligned} (aR)^{k-3}\delta(aRaRa) \\ = (aR)^{k-3}\delta(a)RaRa + (aR)^{k-3}a\delta(R)aRa + (aR)^{k-2}\delta(a)Ra \\ + (aR)^{k-2}a\delta(R)a + (aR)^{k-1}\delta(a) = 0 \end{aligned}$$

چون

$$(aR)^{k-3}a\delta(R)aRa + (aR)^{k-2}a\delta(R)a \subseteq (aR)^{k-1}a = 0$$

از رابطه (۵) نتیجه می‌شود:

$$(aR)^{k-3}\delta(a)RaRa + (aR)^{k-2}\delta(a)Ra + (aR)^{k-1}\delta(a) = 0, \quad (۶)$$

با مقایسه روابط (۱)، (۴) و (۶) نتیجه می‌شود $(aR)^{k-3}\delta(a)RaRa = 0$ و با ادامه این روند داریم:

$$aR\delta(a)(Ra)^{k-2} = 0 \quad (۷)$$

از طرفی چون $nil(R)$ ایده‌آلی از R است لذا $aR\delta(a) \subseteq nil(R)$. با روندی مشابه نتیجه می‌شود:

$$a(R\delta(a))^2(Ra)^{k-3} = a(R\delta(a))^3(Ra)^{k-4} = \dots = a(R\delta(a))^{k-1} = 0$$

چون $a(R\delta(a))^{k-2}Ra = 0$ و از آنجایی که $(R\delta(a))^{k-2}Ra \subseteq nil(R)$ ، با اعمال خاصیت پوچ δ -صلب ضعیف داریم:

$$a\delta\left((R\delta(a))^{k-2}R\right)a + a(R\delta(a))^{k-1} = 0 \quad (۸)$$

از طرفی چون $a(R\delta(a))^{k-1} = 0$ لذا

$$a\delta\left((R\delta(a))^{k-2}R\right)a = 0, \quad (۹)$$

از طرف دیگر با اعمال مشتق روی عبارت $a(R\delta(a))^{k-2}Ra = 0$ نتیجه می‌شود:

$$(\delta(a)R)^{k-1}a + a\delta\left((R\delta(a))^{k-2}R\right)a + a(R\delta(a))^{k-1} = 0 \quad (۱۰)$$

با داشتن $a(R\delta(a))^{k-1} = 0$ و مقایسه روابط (۹) و (۱۰) داریم:

$$(\delta(a)R)^{k-1}a = 0, \quad (11)$$

حال با اعمال عملگر مشتق روی $a(R\delta(a))^{k-1} = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\delta(a)(R\delta(a))^{k-1} + a\delta\left((R\delta(a))^{k-1}\right) = 0, \quad (12)$$

با ضرب $a\delta\left((R\delta(a))^{k-1}\right)$ از سمت راست در عبارت (۱۲) و سپس استفاده از رابطه (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\left(a\delta\left((R\delta(a))^{k-1}\right)\right)^2 = 0.$$

لذا $a\delta\left((R\delta(a))^{k-1}\right) \subseteq \text{nil}(R)$ و چون $\text{nil}(R)$ ایده‌آلی از R است با استفاده از رابطه (۱۱) نتیجه می‌شود

$$\delta(a)(R\delta(a))^{k-1} \subseteq \text{nil}(R)$$

بنابراین $\delta(a)R \subseteq \text{nil}(R)$ که نشان می‌دهد $\delta(\text{nil}(R)) \subseteq \text{nil}(R)$

۲. ایده‌آل‌های ضعیف وابسته اول در چند جمله‌ای‌های مشتق

لم ۱. در حلقه $R[x; \delta]$ برای هر عدد صحیح و مثبت n و $r \in R$ داریم

$$.x^n r = \delta^n(r) + n\delta^{n-1}(r)x + \dots + \binom{n}{k}\delta^{n-k}(r)x^k + \dots + rx^n$$

گزاره ۲. فرض کنیم حلقه R ، پوچ δ -صلب ضعیف شبه-نیم‌جابجایی باشد در این صورت برای هر $a, b, c \in \text{nil}(R)$ داریم:

$$(۱) \text{ اگر } aRbRc = 0 \text{ آنگاه } aR\delta^s(b)Rc = 0 \text{ و } aRbR\delta^t(c) = 0 \text{ برای اعداد صحیح مثبت } s, t.$$

$$(۲) \text{ اگر } aRbRc = 0 \text{ آنگاه } aR\delta^s(b)R\delta^t(c) = 0 \text{ برای اعداد صحیح مثبت } s, t.$$

$$(۳) \text{ اگر } aRb = 0 \text{ آنگاه } aR\delta^n(b) = 0 \text{ و } \delta^n(a)Rb = 0 \text{ برای اعداد صحیح مثبت } m, n.$$

برهان:

(۱): فرض کنیم $aRbRc = 0$ ، چون بنا به لم ۷ در قسمت ۲، $\delta(\text{nil}(R)) \subseteq \text{nil}(R)$ و لذا نتیجه می‌شود

$$aRbR\delta^t(c) = 0 \text{ با استفاده از خاصیت پوچ } \delta \text{-صلب ضعیف از } aRbRc = 0 \text{ داریم:}$$

$$aR\delta(bRc) = aR\delta(b)Rc + aRb\delta(R)c + aRbR\delta(c) = 0.$$

از اینکه $aRbR\delta^t(c) = 0$ و $aRb\delta(R)c \subseteq aRbRc = 0$ نتیجه می‌شود $aR\delta(b)Rc = 0$ با استفاده مجدد

$$\text{از خاصیت پوچ } \delta \text{-صلب ضعیف داریم } aR\delta(b)R\delta(c) = 0$$

حال از $aR\delta(b)Rc = 0$ و استفاده مجدد از خاصیت پوچ δ -صلب ضعیف و ایده‌آل بودن $\text{nil}(R)$ داریم:

$$0 = aR\delta(\delta(b)Rc) = aR\delta^2(b)Rc + aR\delta(b)\delta(R)c + aR\delta(b)R\delta(c)$$

و چون $aR\delta(b)\delta(R)c = aR\delta(b)R\delta(c) = 0$ لذا $aR\delta^2(b)Rc = 0$ با ادامه این روند نتیجه می‌شود

$$aR\delta^s(b)Rc$$

(۲): با استفاده از لم ۷ در قسمت ۲ و بند (۱) نتیجه می‌شود.

(۳): چون $aRb = 0$ از (۱) داریم $aR\delta^n(b) = 0$ و از طرفی داریم

$$\delta(aRb) = \delta(a)Rb + a\delta(R)b + aR\delta(b) = 0.$$

چون $aR\delta(b) = 0$ و $a\delta(R)b = 0$ لذا $\delta(a)Rb = 0$ و چون $\delta(nil(R)) \subseteq nil(R)$ با استفاده از خاصیت پوچ δ -صلب ضعیف داریم $\delta(a)R\delta(b) = 0$. از طرفی از رابطه $\delta(a)Rb = 0$ نتیجه می‌شود $\delta^2(a)Rb + \delta(a)\delta(R)b + \delta(a)R\delta(b) = 0$ چون $\delta(a)\delta(R)b + \delta(a)R\delta(b) = 0$ لذا $\delta^2(a)Rb = 0$ با ادامه این روند داریم $\delta^n(a)Rb = 0$ ■

لم ۳. فرض کنید حلقه R پوچ δ -صلب ضعیف و شبه جابجایی باشد. آنگاه $a_i \in nil(R)$ برای $0 \leq i \leq n$ ، اگر و

تنها اگر $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in nil(R[x, \delta])$.

برهان: فرض کنیم $a_i \in nil(R)$ ، $0 \leq i \leq n$. چون هر حلقه شبه نیم جابجایی، ۲-اولیه است لذا داریم

$nil(R) = nil_*(R)$ از طرفی برای هر $0 \leq i \leq n$ عدد صحیح مثبتی مانند m_i وجود دارد به طوری که برای هر

$$(a_iR)^{m_i} = 0 ; 0 \leq i \leq n$$

فرض کنیم $k = \sum_{i=0}^n m_i + 1$. در اینصورت برای هر داریم $0 \leq i \leq n$ ، $(a_iR)^k = 0$. حال ادعا می‌کنیم

$$f(x)^k = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)^k = 0$$

به راحتی می‌توان نشان داد ضرایب $(\sum_{i=0}^n a_ix^i)^k$ را می‌توان به صورت تک جمله‌ای‌هایی به طول k از a_i و

$\delta^k(a_j)$ نوشت. چون $a_i, a_j \in \{a_0, \dots, a_n\}$ و $k \geq 0$ عدد صحیح مثبت است، چندجمله‌ای

$\underbrace{a_{i_1}\delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k})}_{k+1}$ که $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \{a_0, \dots, a_n\}$ و $t_j, 1 \leq j \leq k$ اعداد صحیح نامنفی

هستند، را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم $a_{i_1}\delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k}) = 0$ اگر تعداد a_0 در

$a_{i_1}\delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k})$ بیشتر از m_0 باشد، آنگاه چندجمله‌ای $a_{i_1}\delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k})$ را می‌توان به صورت

$$b_1(\delta^{s_1}(a_0))^{j_1} b_2(\delta^{s_2}(a_0))^{j_2} \dots b_v(\delta^{s_v}(a_0))^{j_v} b_{v+1}$$

نوشت که $j_1 + j_2 + \dots + j_v \geq m_0$ و $j_1, j_2, \dots, j_v \geq 1$ برای هر $q = 1, 2, \dots, v + 1$ حاصل ضرب

تعداد متناهی از عناصر انتخاب شده از مجموعه $\{a_{i_1}, \delta^{t_2}(a_{i_2}), \dots, \delta^{t_k}(a_{i_k})\}$ یا یک است. δ^0 را نگاشت همانی در

نظر می‌گیریم. چون $(a_iR)^{m_i} = 0$ بنابراین

$$a_0^{j_1} R a_0^{j_2} \dots R a_0^{j_v} R = \overbrace{a_0 a_0 \dots a_0}^{j_1} R \dots R \overbrace{a_0 a_0 \dots a_0}^{j_v} R = 0$$

بنابه گزاره ۲ داریم

$$(\delta^{s_1}(a_0))^{j_1} R (\delta^{s_2}(a_0))^{j_2} \dots R (\delta^{s_v}(a_0))^{j_v} R = 0$$

و در نتیجه داریم:

$$(\delta^{s_1}(a_0))^{j_1} b_2 (\delta^{s_2}(a_0))^{j_2} \dots b_v (\delta^{s_v}(a_0))^{j_v} b_{v+1} = 0$$

چایکه $a_0 b_q, a_0, a_0 b_q \in a_0 R (q = 1, 2, \dots, v + 1)$ در نتیجه

$$b_1 (\delta^{s_1}(a_0))^{j_1} b_2 (\delta^{s_2}(a_0))^{j_2} \dots b_v (\delta^{s_v}(a_0))^{j_v} b_{v+1} = 0.$$

$$\text{لذا } a_{i_1} \delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k}) = 0$$

اگر تعداد a_i های ظاهر شده در $a_{i_1} \delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k})$ بیشتر از m_i باشد، با استدلالی مشابه داریم

لذا $a_{i_1} \delta^{t_1}(a_{i_2}) \dots \delta^{t_k}(a_{i_k}) = 0$ بنابراین هر تک جمله‌ای ظاهر شده در $(\sum_{i=0}^n a_i x^i)^k$ صفر است. لذا $\sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x, \delta]$ عنصری پوچ توان است.

حال فرض کنیم $f(x) \in \text{nil}(R[x, \delta])$ ، آنگاه عدد صحیح مثبتی مانند k وجود دارد به طوری که

$$f(x)^k = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^k = 0$$

$$0 = (f(x))^k = a_n^{nk} x^{nk} + \text{جملات با درجه کمتر}$$

$$\text{بنابراین } a_n^{nk} = 0 \text{ و در نتیجه } a_n \in \text{nil}(R)$$

حال با استفاده از لم ۷ در بخش ۲ نتیجه می شود $\delta^j(a_n) \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq j$. حال فرض کنید

$$Q = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

در این صورت

$$0 = (f(x))^k = (Q + a_n x^n)^k = (Q + a_n x^n)(Q + a_n x^n) \dots (Q + a_n x^n) =$$

$$(Q^2 + Q a_n x^n + a_n x^n Q + a_n x^n a_n x^n)(Q + a_n x^n) \dots (Q + a_n x^n) = Q^k + \Delta.$$

که Δ عضوی از $R[x, \delta]$ است که ضرایب آن دارای a_n یا $\delta^j(a_n)$ است. چون $\text{nil}(R)$ ایده‌آلی از R می‌باشد لذا

Δ عضوی از $\text{nil}(R)[x, \delta]$ است. بنابراین $Q^k \in \text{nil}(R[x, \delta])$ و در نتیجه مشابه روند بالا نتیجه می شود که

$$\blacksquare a_i \in \text{nil}(R), 0 \leq i \leq n \text{ با ادامه این فرایند نتیجه می‌شود برای هر } a_{n-1} \in \text{nil}(R)$$

قضیه ۴. فرض کنیم حلقه R ، پوچ δ -صلب ضعیف و شبه نیم جابجایی باشد.

$$(۱) \text{ اگر } ab \in \text{nil}(R) \text{ آنگاه } a \delta^j(b) \in \text{nil}(R) \text{ برای هر } 0 \leq j$$

$$(۲) \text{ اگر } ab \in \text{nil}(R) \text{ آنگاه } \delta^i(a)b \in \text{nil}(R) \text{ برای هر } 0 \leq i$$

$$(۳) \text{ اگر } abc \in \text{nil}(R) \text{ آنگاه } a \delta^i(b) \delta^j(c) \in \text{nil}(R) \text{ برای هر } 0 \leq j, i$$

برهان:

(۱): فرض کنید $ab \in \text{nil}(R)$ آنگاه با در نظر گرفتن $f = b, g = ax$ داریم $fg \in \text{nil}(R[x, \delta])$ و بنابراین

$a\delta(b), abx \in nil(R[x, \delta]) = nil(R)[x, \delta]$ بنا به لم ۳، $gf = a\delta(b) + abx \in nil(R[x, \delta])$ حال فرض کنید $f = \delta(b)$ ، $g = ax$ و بنا براین $gf = a\delta^j(b) \in nil(R)$ با ادامه این روند داریم $a\delta^2(b) \in nil(R)$ لذا $a\delta^2(b) + a\delta(b)x \in nil(R[x; \alpha, \delta])$ برای هر $0 \leq j$.

(۲) فرض کنید $ab \in nil(R)$ آنگاه بنا به لم ۷ بخش ۲ داریم

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \in nil(R)$$

چون $nil(R)$ ایده‌آلی از حلقه R است و بنا به (۱)، $a\delta^j(b) \in nil(R)$ برای هر $0 \leq j$ لذا $\delta(a)b \in nil(R)$ دوباره با استفاده از بند (۱)، داریم $\delta(a)\delta(b) \in nil(R)$ بنا به لم ۷ بخش ۲ داریم:

$$\delta(\delta(a)b) = \delta^2(a)b + \delta(a)\delta(b) \in nil(R)$$

چون $nil(R)$ ایده‌آلی از حلقه R است و $\delta(a)\delta(b) \in nil(R)$ نتیجه می‌شود $\delta^2(a)b \in nil(R)$ با ادامه این روند برای هر $i \geq 0$ داریم $\delta^i(a)b \in nil(R)$

(۳) فرض کنید $abc \in nil(R)$ آنگاه بنا به بند (۱) داریم $ab\delta^j(c) \in nil(R)$ و لذا $\delta^j(c)ab \in nil(R)$ برای هر $0 \leq j$ با استفاده از بند (۱) داریم $\delta^j(c)a\delta^i(b) \in nil(R)$ برای هر $0 \leq i, j$ لذا $a\delta^i(b)\delta^j(c) \in nil(R)$ برای هر $0 \leq i, j$ ■

لم ۵. فرض کنیم حلقه R پوچ δ - صلب ضعیف و شبه نیم جابجایی باشد. اگر $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ و $h(x) = \sum_{k=0}^t c_k x^k$ عناصری از $R[x, \delta]$ باشند آنگاه موارد زیر برقرارند:

$$f(x)g(x) \in nil(R[x, \delta]) \text{ اگر و تنها اگر } a_i b_j \in nil(R) \text{ برای هر } 0 \leq i \leq m \text{ و } 0 \leq j \leq n. \quad (۱)$$

$$f(x)g(x)c \in nil(R[x, \delta]) \text{ اگر و تنها اگر } a_i b_j c \in nil(R) \text{ برای هر } 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n, \text{ و } c \in R. \quad (۲)$$

$$f(x)g(x)h(x) \in nil(R[x, \delta]) \text{ اگر و تنها اگر } a_i b_j c_k \in nil(R) \text{ برای هر } 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n, \text{ و } 0 \leq k \leq t. \quad (۳)$$

برهان: (۱) (\leftarrow) فرض کنید $f(x)g(x) \in nil(R[x, \delta])$ آنگاه

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{i=0}^m a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{s+t=k} \left(\sum_{i=s}^m \binom{i}{s} a_i \delta^{i-s}(b_t) \right) \right) x^k$$

جایی که $0 \leq t \leq n$ و $0 \leq s \leq m$ آنگاه با استفاده از لم ۳ داریم:

$$\Delta_{m+n} = a_m b_n \in nil(R) \quad (۱)$$

$$\Delta_{m+n-1} = a_m b_{n-1} + \sum_{i=m-1}^m \binom{i}{m-1} a_i \delta^{i-m+1}(b_n) \in nil(R) \quad (۲)$$

$$\Delta_{m+n-2} = \sum_{i=m-2}^m \binom{i}{m-2} a_i \delta^{i-m+2}(b_n) = \sum_{i=m-1}^m \binom{i}{m-1} a_i \delta^{i-m+1}(b_{n-1}) + a_m b_{n-2} \in \text{nil}(R) \quad (۳)$$

⋮

$$\Delta_k = \sum_{s+t=k} \left(\sum_{i=s}^m \binom{i}{s} a_i \delta^{i-s}(b_t) \right) \in \text{nil}(R) \quad (۴)$$

از رابطه (۱) داریم $a_m b_n \in \text{nil}(R)$ در نتیجه $b_n a_m \in \text{nil}(R)$ حال نشان می‌دهیم برای هر $0 \leq i \leq m$ $a_i b_n \in \text{nil}(R)$ اگر رابطه (۲) را از سمت چپ در b_n ضرب کنیم، آنگاه

$$a_{m-1} b_n = b_n \Delta_{m+n-1} - (b_n a_m b_{n-1} + m b_n a_m \delta(b_n)) \in \text{nil}(R)$$

چون $\text{nil}(R)$ ایده‌آل است، $b_n a_{m-1} b_n \in \text{nil}(R)$ و لذا $b_n a_{m-1} \in \text{nil}(R)$ و $a_{m-1} b_n \in \text{nil}(R)$ اگر رابطه (۳) را از سمت چپ در b_n ضرب کنیم داریم:

$$\begin{aligned} b_n a_{m-2} b_n &= b_n \Delta_{m+n-2} - \binom{m-1}{m-2} b_n a_{m-1} \delta(b_n) - \binom{m}{m-2} b_n a_m \delta^2(b_n) \\ &\quad - b_n a_{m-1} b_{n-1} - \\ &\quad \binom{m}{m-1} b_n a_m \delta(b_{n-1}) - b_n a_m b_{n-2} \\ &= b_n \Delta_{m+n-2} - \binom{m-1}{m-2} (b_n a_{m-1}) \delta(b_n) - \\ &\quad \binom{m}{m-2} (b_n a_m) \delta^2(b_n) - (b_n a_{m-1}) b_{n-1} - \binom{m}{m-1} (b_n a_m) \delta \\ &\quad - (b_n a_m) b_{n-2} \\ &\in \text{nil}(R) \end{aligned}$$

چون $\text{nil}(R)$ یک ایده‌آل از R است بنابراین $a_{m-2} b_n \in \text{nil}(R)$ و $b_n a_{m-2} \in \text{nil}(R)$ با ادامه این روند نتیجه می‌شود برای هر $0 \leq i \leq m$ $a_i b_n \in \text{nil}(R)$ با استفاده از قضیه ۴، $a_i \delta^s(b_n) \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq s$ و $0 \leq i \leq m$ بنابراین داریم

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m)(b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n-1} \left(\sum_{s+t=k} \left(\sum_{i=s}^m \binom{i}{s} a_i \delta^{i-s}(b_t) \right) \right) x^k = \\ &\quad \Delta_0 + \Delta_1 x + \dots + \Delta_{m+n-1} x^{m+n-1} \in \text{nil}(R[x, \delta]) \end{aligned}$$

مشابه روش بالا داریم $a_i b_{n-1} \in \text{nil}(R)$ با ادامه این روند، داریم: $a_i b_j \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$

(→) فرض کنید $a_i b_j \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$. آنگاه بنا بر قضیه ۴، داریم $a_i \delta^t(b_j) \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$ و $0 \leq t$. چون $\text{nil}(R)$ ایده‌آلی از حلقه R است داریم:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{s+t=k} \left(\sum_{i=s}^m \binom{i}{s} a_i \delta^{i-s} (b_t) \right) \right) x^k \in \text{nil}(R)[x, \delta]$$

چون $\text{nil}(R)[x, \delta] = \text{nil}(R[x, \delta])$ نتیجه می‌شود $f(x)g(x) \in \text{nil}(R[x, \delta])$

(۲) (\leftarrow) فرض کنید $f(x)g(x)c \in \text{nil}(R[x, \delta])$. آنگاه $cf(x)g(x) \in \text{nil}(R[x, \delta])$. با استفاده از بند (۱) داریم $ca_i b_j c \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$. لذا $a_i b_j c \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$.

(۳) (\rightarrow) حال فرض کنید $a_i b_j c \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$. آنگاه $ca_i b_j \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$. بنا به بند (۱) داریم $cf(x)g(x) \in \text{nil}(R[x, \delta])$ و در نتیجه $f(x)g(x)c \in \text{nil}(R[x, \delta])$

(۳) با استفاده از بند های (۱) و (۲) و با روند مشابه نتیجه می‌شود. ■

لم ۶. فرض کنید حلقه R پوچ δ -صلب ضعیف و شبه نیم جابجایی باشد. آنگاه برای هر زیرمجموعه $U \subseteq R$ داریم

$$N_{[x, \delta]}(U[x, \delta]) = N_R(U)[x, \delta]$$

برهان: به وضوح داریم $N_R(U)[x, \delta] \subseteq N_{[x, \delta]}(U[x, \delta])$. بنا به لم ۵، برای هر چندجمله‌ای اریب $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in N_{[x, \delta]}(U[x, \delta])$ و برای هر چندجمله‌ای دلخواه $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ داریم $f(x)g(x) \in \text{nil}(R[x, \delta])$ اگر و تنها اگر $a_i b_j \in \text{nil}(R)$ برای هر $0 \leq i \leq n$ و $0 \leq j \leq m$. بنابراین $a_i \in N_{R_R}(U)$ برای هر $0 \leq i \leq n$. لذا $f(x) \in N_R(U)[x, \delta]$ که نتیجه می‌دهد $N_{[x, \delta]}(U[x, \delta]) \subseteq N_R(U)[x, \delta]$. بنابراین $N_{[x, \delta]}(U[x, \delta]) = N_R(U)[x, \delta]$. ■

تعریف ۷. اگر $m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k + \dots + m_nx^n \notin \text{nil}(R[x, \delta])$ و $Ndeg(m(x)) = k$ آنگاه گوئیم $m(x)$ یک چند جمله ای بطور ضعیف خوب است اگر برای هر $i, i \leq k$ $N_R(m_i) = N_R(m_k)$.

گزاره ۸. فرض کنید حلقه R پوچ δ -صلب ضعیف و شبه نیم جابجایی باشد. آنگاه برای هر چندجمله‌ای $m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k + \dots + m_nx^n \notin \text{nil}(R[x, \delta])$ وجود دارد $r \in R$ مانند r وجود دارد بطوریکه $m(x)r$ یک چند جمله ای بطور ضعیف خوب است.

برهان: با برهان خلف روی $Ndeg$ ، فرض کنید برای هر چند جمله ای مانند $f(x)$ با شرط $Ndeg(f(x)) < k$ عضوی مانند $r \in R$ وجود دارد بطوریکه $f(x)r$ یک چند جمله ای بطور ضعیف خوب است. حال فرض کنید چندجمله ای $m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k + \dots + m_nx^n \notin \text{nil}(R[x, \delta])$ با $Ndeg(m(x)) = k \geq 1$

موجود است بطوریکه برای هر $r \in R$ یک چند جمله‌ای بطور ضعیف خوب نیست. لذا $m(x)r$ نیز یک چند جمله‌ای بطور ضعیف خوب نیست. بنابراین عدد صحیح $i < k$ موجود است که $N_R(m_i) \not\subseteq N_R(m_k)$. بنابراین عضوی مانند $b \in R$ موجود است که $m_i b \notin nil(R)$ اما $m_k b \in nil(R)$. چون $Ndeg(m(x)) = k \geq 1$ لذا برای هر $j \geq k$ داریم $m_j \in nil(R)$ چون $nil(R)$ ایده‌آلی از حلقه R است لذا برای هر $j \geq k$ داریم $m_j b \in nil(R)$. حال با استفاده از قضیه ۴، برای هر $j \geq k$ و برای هر $t \geq 1$ داریم $m_j \delta^t(b) \in nil(R)$ در نتیجه ضریب k -ام چند جمله‌ای $m(x)b$ یعنی $\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} m_i \delta^{i-k}(b)$ متعلق به $nil(R)$ است. از طرفی برای هر $s \geq k+1$ ضریب s -ام چند جمله‌ای $m(x)b$ نیز متعلق به $nil(R)$ است. لذا $m(x)b$ دارای $Ndeg(m(x))$ حداکثر $k-1$ است. چون $m_i b \notin nil(R)$ در نتیجه بنا به لم ۵، $m(x)b \notin nil(R[x, \delta])$ چون $m(x)b$ دارای $Ndeg(m(x))$ حداکثر $k-1$ است طبق فرض عضوی مانند $c \in R$ وجود دارد بطوریکه $m(x)bc$ یک چند جمله‌ای بطور ضعیف خوب است و این تناقض دارد با این فرض که برای هر $r \in R$ یک چند جمله‌ای بطور ضعیف خوب نیست. ■

گزاره ۹. فرض کنید حلقه R پوچ δ -صلب ضعیف و شبه نیم جابجایی باشد. آنگاه

$$NAss(R[x, \delta]) = \{P[x, \delta] \mid P \in NAss(R)\}$$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $NAss(R[x, \delta]) \supseteq \{P[x, \delta] \mid P \in NAss(R)\}$. برای این منظور فرض کنید $P \in NAss(R)$ در اینصورت ایده آل راستی مانند I از R موجود است که $I \not\subseteq Nil(R)$ و $N_R(I) = P$. اگر نشان دهیم $N_{R[x, \delta]}(I[x, \delta]) = P[x, \delta]$ و $I[x, \delta]$ یک ایده‌آل $P[x, \delta]$ -اول است، آنگاه اثبات تمام است. بنا به لم ۶، داریم $N_{R[x, \delta]}(I[x, \delta]) = N_R(I)[x, \delta] = P[x, \delta]$ حال باید نشان دهیم $I[x, \delta]$ یک ایده‌آل $P[x, \delta]$ -اول است. چون I یک ایده‌آل P -اول است لذا $I \not\subseteq Nil(R)$ و در نتیجه بنا به لم ۳، $I[x, \delta] \not\subseteq Nil(R)[x, \delta] = Nil(R[x, \delta])$.

برای اینکه $I[x, \delta]$ یک ایده‌آل $P[x, \delta]$ -اول باشد کفایت نشان دهیم برای هر ایده‌آل راست $\Omega \not\subseteq Nil(R)[x, \delta]$ و $\Omega \subseteq I[x, \delta]$ داریم $N_{R[x, \delta]}(\Omega) = N_{R[x, \delta]}(I[x, \delta])$. بوضوح $N_{R[x, \delta]}(\Omega) \supseteq N_{R[x, \delta]}(I[x, \delta])$ برای اثبات $N_{R[x, \delta]}(\Omega) \subseteq N_{R[x, \delta]}(I[x, \delta])$ فرض کنید $N_{R[x, \delta]}(\Omega) \subseteq N_{R[x, \delta]}(I[x, \delta])$ ، فرض کنید $h(x) = h_0 + h_1 x + \dots + h_k x^k \in N_{R[x, \delta]}(\Omega)$ در اینصورت داریم $\Omega h(x) \subseteq Nil(R[x, \delta])$ و در نتیجه $C_\Omega h_i \in Nil(R[x, \delta])$ برای هر $0 \leq i \leq k$. لذا برای هر $0 \leq i \leq k$ داریم $J h_i \subseteq Nil(R)$ که J ایده‌آل راستی از R تولید شده توسط C_Ω است. چون $C_\Omega \subseteq I$ داریم $J \subseteq I$ و چون $\Omega \not\subseteq Nil(R)[x, \delta]$ بنا به لم ۳، $C_\Omega \not\subseteq Nil(R)$. چون I یک ایده‌آل R -اول است لذا $N_R(C_\Omega) = N_R(I) = P$ که نتیجه می‌دهد $h_i \in P$ برای هر $0 \leq i \leq k$. لذا $h(x) \in P[x, \delta]$ که نتیجه می‌دهد $N_{R[x, \delta]}(\Omega) \subseteq N_{R[x, \delta]}(I[x, \delta])$ حال نشان می‌دهیم $N_{R[x, \delta]}(I[x, \delta]) \subseteq \{P[x, \delta] \mid P \in NAss(R)\}$. برای این منظور فرض کنید $Q \in NAss(R[x, \delta])$ در اینصورت ایده‌آل $R[x, \delta]$ -اولی مانند T موجود است که $N_{R[x, \delta]}(T) = Q$. فرض کنید $m(x)$ عضوی از T باشد بطوریکه

$$m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k + \dots + m_nx^n \notin \text{nil}(R[x, \delta]).$$

در اینصورت می‌توانیم فرض کنیم $m(x)$ یک چند جمله‌ای بطور ضعیف خوب با $\text{Ndeg}(m(x)) = k$ است. فرض

کنید $T_0 = m(x)R[x, \delta]$. آنگاه $T_0 \not\subseteq \text{nil}(R[x, \delta])$ زیرا $m(x) \notin \text{nil}(R[x, \delta])$. بنابراین

$$N_{R[x, \delta]}(T_0) = N_{R[x, \delta]}(T) = Q$$

چون T ایده‌آل راست $R[x, \delta]$ است. به راحتی می‌توان نشان داد که $Q = UR[x, \delta]$ جایی که $N_R(m_kR) = U$.

حال ادعا می‌کنیم که m_kR یک ایده‌آل راست R است. بوضوح $m_kR \not\subseteq \text{Nil}(R)$ زیرا $m_k \notin \text{nil}(R)$. ایده‌آل راست $L \not\subseteq \text{Nil}(R)$ را در نظر می‌گیریم که $L \subseteq m_kR$. ادعا می‌کنیم که $N_R(m_kR) = N_R(L)$. به وضوح

$N_R(m_kR) \subseteq N_R(L)$ برای اثبات $N_R(m_kR) \supseteq N_R(L)$ فرض کنید $W = \{m(x)r \mid r \in L\}$. آنگاه

$m(x)WR[x, \delta] \subseteq R[x, \delta]$ چون $L \not\subseteq \text{Nil}(R)$ و $L \subseteq m_kR$. لذا وجود دارد $a \in R$ بطوریکه $m_k a \notin \text{Nil}(R)$

و $m_k a \in L$ لذا $m_k m_k a \notin \text{Nil}(R)$ و در نتیجه $m(x)m_k a \notin \text{Nil}(R[x, \delta])$. بنابراین داریم

$$WR[x, \delta] \not\subseteq \text{Nil}(R)[x, \delta]$$

چون T ایده‌آل راست $R[x, \delta]$ است $N_{R[x, \delta]}(WR[x, \delta]) = N_{R[x, \delta]}(m(x)R[x, \delta]) = Q$ اگر

$b \in N_R(L)$ آنگاه $lb \in \text{Nil}(R)$ برای هر $l \in L$ و بنابراین برای هر $f(x) \in R[x, \delta]$ داریم $m(x)lf(x)b \in$

$\text{Nil}(R[x, \delta])$. لذا برای هر $\sum m(x)l_i f_i(x)$ داریم $(\sum m(x)l_i f_i(x))b \in \text{Nil}(R[x, \delta])$. بنابراین

$b \in N_{R[x, \delta]}(WR[x, \delta]) = Q$ در نتیجه داریم $b \in N_R(m_kR)$. بنابراین $N_R(m_kR) \supseteq N_R(L)$. لذا

$$N_R(m_kR) = N_R(L) \quad \blacksquare$$

نتیجه ۱۰. فرض کنید حلقه R کاهش‌ی و δ مشتقی دلخواه روی حلقه R باشد. آنگاه

$$\text{Ass}(R[x, \delta]) = \{P[x, \delta] \mid P \in \text{Ass}(R)\}.$$

References

- [1] S. Annin, Associated primes over Ore extension rings, Journal of Algebra and Its Applications, **3**(2) (2004), 193–205.
- [2] J. Brewer and W. Heinzer, 3Associated primes of principal ideals, Duke Math. J. **41** (1974), 1-7.
- [3] P.M. Cohn, Reversible rings, Bull. London Math. Soc., **31** (1999), 641–648.
- [4] C. Faith, Annihilator ideals, associated primes and Kash–McCoy commutative rings, Comm. Algebra., **19**(7) (1991), 1867–1892.
- [5] C. Faith, Associated primes in commutative polynomial ring, Comm. Algebra., **28** (2000), 3903-3986.
- [6] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, Acta Math. Hungar, **151** (2000), 215-226.
- [7] H.K. Kim, N.K. Kim, M.S. Jeong, Y. Lee, S.J. Ryu, and D.E. Yeo, On conditions provided by nilradicals, J. Korean Math. Soc., **46**(5) (2009), 1027–1040.

- [8] J. Krempa, Some examples of reduced, Algebra Coll. **3**(4) (1996), 289–300.
- [9] R. Irving, Prime radical of ore extensions over commutative rings, J. Algebra, **56** (1979), 315-342.
- [10] T.Y. Lam, A. Leroy and J. Mathczuk, Primeness, semiprimeness and prime radical of ore extensions, Comm. Algebra., **25** (1997), 2459-2506.
- [11] R. Mohammadi, A. Moussavi, M. Zahiri, On weak zip skew polynomial rings, Asian- European J. Math., **5**(3) (2012), 1250039 (17 pages).
- [12] L. Motais de Narbonne, Anneaux semi-commutatifs et unis riels anneaux dont les id aux principaux sont idempotents, Proceedings of the 106th National Congress of Learned Societies (Perpignan, 1981), Bib. Nat., Paris, 1982, pp. 71-73.
- [13] A.R. Nasre-Isfahani and A. Moussavi, On weakly rigid rings, Glasgow J. Math., **51**(3) (2009), 425-440.
- [14] L. Ouyang and J. Liu, Weak associated primes over differential polynomial rings, Rocky Mountain J. Math., **42**(5) (2012), 1583-1600
- [15] M. Zahiri, A. Moussavi and R. Mohammadi, Associated primes and primary right ideals of generalized triangular matrix rings, Comm. Algebra, **47**(4) (2019), 1464-1477.