Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Reduce Douglas Metric by Using the Concept of Special Cartan Curvature

Sina Hedayatian[1]✉, **Neda Izadian**[2], **Mohamad Yar Ahmadi**[3]

1. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. ✉E-mail: hedayatian@scu.ac.ir
2. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. E-mail: n-izadian@stu.scu.ac.ir
3. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. E-mail: m.yarahmadi@scu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 3 February 2022
Accepted: 5 December 2022
Published online:
29 February 2024

Keywords:
Cartan curvature,
Douglas metric,
Weakly and generalized Landsberg metrics.

ABSTRACT

Introduction

For a Finsler metric the geodesics curves are characterized by the system of second order ordinary differential equations. A Finsler metric is called a Berwald metric if the spray coefficients are quadratic in term of directions. It can be shown that Berwald manifolds are modeled on a single norm space, i.e., all tangent spaces are linearly isometric to each other.

Cartan, Landsberg, Mean Cartan and mean Landsberg tensors, respectively C, L, I and J, are four important tensors and play an important role in Finsler geometry. It is natural to study L /C as the relative rate of change of L along geodesics, leading to a study of general relative isotropic Landsberg metrics. Studying J/ I is also natural as the relative rate of change of J along geodesics, which leads to a study of general relative isotropic mean Landsberg metrics.

The notion of Douglas curvature was proposed by Bacso and Matsumoto as a generalization of Berwald curvature. The Douglas curvature always vanishes for Riemannian metrics and is a non-Riemannian projective invariant.

Material and Methods

Douglas tensor is one of non-Riemannian curvature defined as $\boldsymbol{D}_y(u,v,w) := D^i_{jkl}(y)u^j v^k w^l \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$, where $D^i_{jkl} := \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\left(G^i - \frac{1}{n+1}\frac{\partial G^m}{\partial y^m} y^i\right)$, we call $D := \{\boldsymbol{D}_y\}$, $y \in TM_0$ the Douglas curvature. A Finsler metric with D = 0 is called a Douglas metric. Here we consider a Douglas metric with special form of Cartan curvature:

$$\boldsymbol{C_{jkl}} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{F(n+1)}}\{\boldsymbol{E_{jk}y_l + E_{jl}y_k + E_{kl}y_j + E_{jk,l}F^2}\}.$$

Results and discussion

In this manuscript, we reduce the Douglas metric to a relatively isotropic Landsberg metric by using a special form of Cartan curvature. We show that the desired manifold becomes Riemannian by considering the topological bounded assumption of the Cartan tensor. Finally, we also prove that the concepts of Landsberg metric, weak Landsberg metric and generalized Landsberg metric are equivalent on Finsler manifolds with such a special Cartan curvature

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- Every Douglas metric with special form of bounded Cartan curvature is a Riemannian metric.
- Every Douglas metric with special form of Cartan curvature is a relatively isotropic constant Landsberg metric.
- With special form of Cartan curvature the Landsberg metric, weak Landsberg metric and generalized Landsberg metric are equivalent on Finsler manifolds.

How to cite: Hedayatian, S., Izadian, N., Yar Ahmadi, M. (2023). Reduce Douglas metric by using the concept of special Cartan curvature. *Mathematical Researches*, 9 (4), 240 – 255.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

تقلیل متر داگلاس با استفاده از مفهوم انحنای خاص کارتان

سینا هدایتیان[1]✉، ندا ایزدیان[2]، محمد یاراحمدی[3]

۱. نویسنده مسئول، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر،دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. رایانامه: hedayatian@scu.ac.ir
۲. دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر،دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. رایانامه: n-izadian@stu.scu.ac.ir
۳. دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر،دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. رایانامه: m.yarahmadi@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۱۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
انحنای کارتان،
متر داگلاس،
متر ضعیف و تعمیم‌یافته
لندسبرگ.

چکیده

در این مقاله با استفاده از یک شکل خاصی از انحنای کارتان، متر داگلاس را به یک متر به‌طور نسبی ایزوتروپیک لندسبرگ کاهش می‌دهیم. نشان می‌دهیم که اگر فرض توپولوژیکی کراندار بودن تانسور کارتان را به شروطمان اضافه کنیم، منیفلد مورد نظر ریمانی خواهد شد. در انتها نشان می‌دهیم بر روی منیفلدهای فینسلری با چنین تاب کارتان خاصی، مفاهیم متر لندسبرگ، متر لندسبرگ ضعیف و متر لندسبرگ تعمیم‌یافته معادل‌اند.

استناد: هدایتیان، سینا؛ ایزدیان، ندا؛ و نیاراحمدی، محمد (۱۴۰۲). تقلیل متر داگلاس با استفاده ار مفهوم انحنای کارتان. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۴)، ۲۴۰ – ۲۵۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

بروالد[1] کلاسی از مترهای فینسلری را معرفی کرد که در آن‌ها مشابه حالت ریمانی ، ژئودزیک‌ها توسط معادلات دیفرانسیل معمولی از درجه دو تعیین می‌شدند. این‌گونه مترهای فینسلری را متر بروالد نامیدند. در واقع منیفلدهای بروالدی فضاهایی نرم‌داراند که در آن‌ها تمام فضاهای مماس T_xM با یکدیگر یکریخت هستند [12].

متر لندسبرگ[2] حالت ضعیف‌تری از متر بروالد است که توسط کمیتی غیرریمانی به‌صورت

$$\boldsymbol{L}= L_{ijk}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

معرفی می‌شود، که در آن

$$L_{ijk} := -\frac{1}{2}F\, F_{y^m}[G^m]_{y^iy^jy^k}.$$

به‌وضوح هر متر بروالد یک متر لندسبرگ است.

با استفاده از قضیه گوس-بنت[3] می‌توان ثابت کرد که در منیفلدهای لندسبرگ، عنصر حجمی $Vol(x)$ برای کره مماس S_xM مقداری ثابت است [2]. که این مقدار ثابت وابسته به کمیت غیرریمانی $\boldsymbol{J}= J_k\, dx^k$ است که در آن

$$J_i := g^{jk}L_{ijk}.$$

مترهای فینسلری با $\boldsymbol{J}= 0$ را مترهای لندسبرگ ضعیف می‌نامند. به‌وضوح در حالت ۲-بعدی هر متر لندسبرگ ضعیف یک متر لندسبرگ است [7]. متر لندسبرگ ضعیف در بسیاری از مسائل مربوط به نظریه صلبیت کاربرد دارد. به‌عنوان مثال منیفلدهای با انحنای پرچمی نامثبت، به‌طور لندسبرگ ضعیف هستند اگر دارای $\boldsymbol{S}$-انحنای[4] ثابت باشند [10]. سپس بجانکو-فران[5] مترهای لندسبرگ تعمیم‌یافته را به‌عنوان تعمیمی از مترهای لندسبرگ ارائه نمودند [4].

تانسورهای کارتان $\boldsymbol{C}$، لندسبرگ $\boldsymbol{L}$، میانگین کارتان $\boldsymbol{I}$ و میانگین لندسبرگ $\boldsymbol{J}$ نقش مهمی در هندسه فینسلر ایفا می‌کنند. $\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{C}}$ به‌طور طبیعی آهنگ تغییرات $\boldsymbol{L}$ را در طول ژئودزیک‌ها نشان می‌دهد که مقدمه‌ای برای مطالعه مترهای لندسبرگ تعمیم‌یافته به‌طور نسبی ایزوتروپیک است. هم‌چنین $\frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{I}}$ به‌طور طبیعی آهنگ تغییرات $\boldsymbol{J}$ را در طول ژئودزیک‌ها نشان می‌دهد که مقدمه‌ای برای مطالعه مترهای میانگین لندسبرگ تعمیم‌یافته به‌طور نسبی ایزوتروپیک است.

متر داگلاس[6] به‌عنوان تعمیمی از متر بروالد توسط باکچو[7] و ماتسوموتو[8] مورد مطالعه قرار گرفته است [1]. در واقع متر داگلاس یک متر غیرریمانی برخاسته از متر بروالد است[6] که در فضاهای ریمانی صفر می‌باشد و بنابراین خارج از دنیای ریمانی نقش ایفا می‌کند.

[1] Berwald
[2] Landsberg
[3] Gauss-Bonnet
[4] S-Curvature
[5] A. Bejancu-H. Farran
[6] J. Douglas
[7] S. Bácsó
[8] M. Matsumoto

در این مقاله متر داگلاس را با انحنای خاص کارتان:

$$C_{jkl}=\frac{2}{F(n+1)}\{E_{jk}y_l+E_{jl}y_k+E_{kl}y_j+E_{jk,l}F^2\}.$$

مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

۲. تعاریف و مقدمات

تعریف۱: فرض کنید M یک منیفلد n- بعدی C^∞، T_xM فضای مماس بر M در نقطه $x\in M$ ، $TM=\bigcup_{x\in M}T_xM$ کلاف مماس بر منیفلد M و $TM_0:=TM\backslash\{0\}$ کلاف مماس سفته[1] باشد. منظور از یک ساختار فینسلری روی M ، یک تابع $F:TM\to[0,+\infty)$ است که خواص زیر را داراست:

۱- F روی TM_0 نگاشتی C^∞ است.

۲- F روی تارهای کلاف مماس TM، همگن مثبت از درجه ۱است.

۳- برای هر $y\in T_xM$، فرم g_y که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، مثبت-معین است:

$$\mathrm{g_y(u,v)}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}[\mathrm{F}^2(\mathrm{y+su+tv})]_{\mathrm{s,t=0}},\qquad \mathrm{u,v\in T_xM}.$$

تعریف2: برای هر منیفلد فینسلری (M,F)، یک میدان برداری سرتاسری G روی TM_0 توسط F تولید می‌شود که در مختصات موضعی (x^i,y^i) برای TM_0 به‌صورت زیر می‌تواند بیان شود و آن را اسپری[2] حاصل از F می‌نامیم: [5]

$$G(y)=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

که در آن G^iها توابعی موضعی روی TM_0 هستند که به‌صورت زیر می‌توانند نمایش داده شوند:

$$G^i(x,y):=\frac{g^{il}}{4}\left\{\frac{\partial^2F^2}{\partial x^k\partial y^l}y^k-\frac{\partial F^2}{\partial x^l}\right\}.$$

قرار می‌دهیم:

$$G^i{}_j=N^i{}_j=\frac{\partial G^i}{\partial y^j},$$

[1] Slit tangent bundle
[2] Spray

$$G^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}.$$

در این‌صورت N^{i}_{j} را ضرایب التصاق غیرخطی[1] و Γ^{i}_{jk} را نمادهای کریستوفل[2] می‌نامیم. با توجه به این‌که G^i همگن از درجه ۲ می‌باشد، داریم:

$$\Gamma^{i}_{jk} y^k = N^{i}_{j}, \qquad N^{i}_{j} y^j = 2\,G^i.$$

تعریف3: انحنای ریمان $R_y = R^{i}_{k}(y)\, dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}|_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماس است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود: [1]

$$R^{i}_{k} = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial x^j}\frac{\partial G^j}{\partial x^k}. \tag{1}$$

تعریف4: مشتق عمودی و افقی تانسور $\binom{1}{1}$ برای $T = T^{j}_{i} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^{j}_{i,s} = F\frac{\partial T^{j}_{i}}{\partial y^s},$$

$$T^{j}_{i|s} = F\frac{\delta T^{j}_{i}}{\delta y^s} + T^{k}_{i}\Gamma^{\ j}_{ks} - T^{j}_{\ k}\Gamma^{\ k}_{is},$$

که در آن

$$\frac{\delta}{\delta x^s} = \frac{\partial}{\partial x^s} - N^{r}_{s}\frac{\partial}{\partial y^r}.$$

تعریف5: برای $x \in M$ قرار دهید $F_x := F_{|T_xM}$. برای اندازه‌گیری غیر ریمانی بودن F_x تانسور کارتان به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{C}_y : T_xM \times T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{C}_y(\mathrm{u,v,w}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[g_{y+tw}(u,v)]_{t=0} = C_{ijk}(y)u^i v^j w^k, \quad u, v, \mathrm{w} \in T_xM.$$

که در آن $y \in T_xM_0$ و w^k و v^j و u^i مؤلفه‌های u, v, w هستند.

خانواده $\boldsymbol{C} := \{\boldsymbol{C}_y\}_{y\in TM_0}$ را تاب کارتان نامیده و C_{ijk} را مؤلفه‌های تانسور کارتان می‌نامیم که در مختصات موضعی به‌صورت زیر می‌باشند:

[1] Non linear connection
[2] Christoffel Symbols

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}.$$

متر حاصل از ساختار فینسلری F یک متر ریمانی است اگر و تنها اگر $\boldsymbol{C} = 0$ باشد [8].

تانسور میانگین کارتان $I_y: T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$I_y(u) := I_i(y)u^i,$$

که در آن $I_i = g^{jk}C_{ijk}$. واضح است که I_i همگن مثبت از درجه ۱-، نسبت به y است.

برای مترهای مثبت-معین، F ریمانی است اگر و تنها اگر $\mathrm{I} = 0$ باشد [15].

تعریف6: برای بردار مماس $y \in T_xM_0$،

$$\boldsymbol{B}_y: T_xM \times T_xM \times T_xM \to T_xM,$$
$$\boldsymbol{B}_y(u,v,w) = B^i{}_{jkl}(y)u^jv^kw^l\frac{\partial}{\partial x^i}|_x,$$

و

$$\boldsymbol{E}_y: T_xM \times T_xM \to \mathbb{R},$$
$$\boldsymbol{E}_y(u,v) = E_{jk}(y)\, u^jv^k.$$

به‌ترتیب انحنای بروالد و انحنای بروالد ضعیف نامیده می‌شوند که در آن

$$B^i{}_{jkl}(y) := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}(y) \quad \text{و} \quad E_{jk}(y) := \frac{1}{2}B_j{}^m{}_{km}(y)$$

است. متر برخاسته از F را به‌ترتیب متر بروالد و متر بروالد ضعیف گوییم هرگاه $\boldsymbol{B} = 0$ و $\boldsymbol{E} = 0$ باشد[3].

تعریف7: فرض کنید $\pi: E \to M$ یک کلاف برداری روی منیفلد M و $\Gamma(E,M)$ مجموعه همه‌ی برش‌های[1] هموار E باشد. یک التصاق روی E نگاشتی مثل

$$\nabla: \chi(M) \times \Gamma(E,M) \to \Gamma(E,M),$$
$$(X,Y) \mapsto \nabla_X \mathrm{Y}.$$

می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\nabla_X \mathrm{Y}$ روی $C^\infty(M)$ نسبت به X خطی است. یعنی

$$\nabla_{fX+gY}\mathrm{Z} = \mathrm{f}\,\nabla_X \mathrm{Z} + \mathrm{g}\,\nabla_Y \mathrm{Z}.$$

ب) $\nabla_X \mathrm{Y}$ روی $\mathbb{R}$ نسبت به Y خطی است. یعنی

$$\nabla_X(\mathrm{c_1Y_1} + \mathrm{c_2Y_2}) = \mathrm{c_1}\,\nabla_X\mathrm{Y_1} + \mathrm{c_2}\,\nabla_X\mathrm{Y_2}.$$

[1] Section

ج) $\nabla_X \mathrm{Y}$ در قاعده زیر موسوم به قاعده لایپ نیتز[1] صدق کند

$$\nabla_Y \ fX = \mathrm{f}\, \nabla_Y \mathrm{X} + (\mathrm{Y.f})\mathrm{X}.$$

که در آن $f, g \in C^{\infty}(M)$ و $X, Y, Z \in \chi(M)$.

∇ مشتق‌گیری همگرد Y در جهت X می‌گوییم. در واقع ∇_X روی توابع همانند مشتق سویی عمل می‌کند. در نتیجه می‌توان گفت التصاق حالت کلی‌تر از مشتق سویی بوده و میزان تغییرات فرم‌ها[2] را نیز می‌توان با استفاده از آن به‌دست آورد [16].

حال فرض کنیم $E = TM$ یک منیفلد هموار باشد. یک التصاق خطی روی M، عملگری به‌صورت زیر است:

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M),$$

که در شرایط سه‌گانه التصاق صدق می‌کند، به التصاق خطی[3]، التصاق آفین نیز می‌گویند.

فرض کنید ∇ یک التصاق خطی روی کلاف برداری E، $\{\mathrm{E}_i\}$ یک پایه‌ی موضعی برای $\Gamma(M, E)$ و $\{\theta^i\}$ دوگان آن یک پایه موضعی برای $\Gamma(M, E^*)$ باشد. مشابه آن‌چه در مورد کنج فرنه در هندسه دیفرانسیل است با مشتق‌گیری همگرد از بردارهای این پایه، فرم‌های التصاق را به‌عنوان ضرایب مشتقات همگرد این پایه تعریف می‌کنیم.

قضیه1: [3] فرض کنید $d\theta = (d\theta^1, \dots, d\theta^n)$ باشد در این‌صورت یک ماتریس یکتا از ۱-فرمی‌هایی مانند $\omega = \omega_j^i$ وجود دارد که در روابط زیر صدق کند:

$$d\theta^i = -{\omega_j}^i \wedge \theta^j,$$
$${\omega_j}^i = -\omega_i^j.$$

تعریف8: فرض کنید ∇ یک التصاق خطی روی کلاف برداری E و $\{\mathrm{E}_i\}$ یک پایه‌ی موضعی برای $\Gamma(M, E)$ باشد. آن‌گاه ∇ را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\nabla \mathrm{E}_i : \chi(M) \to \Gamma(M, E),$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X \mathrm{E}_i := \omega_i^j(X)\mathrm{E}_j.$$

دراین‌صورت $\{\omega_i^j\}$ را فرم التصاق ∇ می‌نامیم. در واقع یک التصاق با فرم‌های التصاق خود دقیقاً مشخص می‌شود.

تعریف9: فرض کنید E یک کلاف برداری روی M، ∇ یک التصاق خطی روی E و $\{\partial_i\}$ یک پایه برای $\Gamma(M, E)$ باشد. در این‌صورت Ω را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{2}$$

[1] Leibniz
[2] Forms
[3] Linear connection

که $X,Y \in \chi(M),\ Z \in \Gamma(M,E)$ و آن را انحنای وابسته به ∇ می‌نامیم.

تعریف10: فرض کنید E یک کلاف برداری روی M، ∇ یک التصاق خطی روی E و $\{\partial_i\}$ یک پایه برای $\Gamma(M,E)$ باشد. در این‌صورت $\Omega_j{}^i \in \Omega^2(M)$ را ۲-فرمی انحنا ∇ می‌نامیم هرگاه داشته باشیم

$$\forall\, X,Y \in \chi(M), \qquad \Omega(X,Y)\,\partial_j = \Omega_j{}^i(X,Y)\,\partial_i,$$

که در آن $\Omega^2(M)$ مجموعه تمام ۲-فرمی‌های روی M است و

$$\Omega_j{}^i := d\omega_j{}^i - \omega_j{}^k \wedge \omega_k{}^i.$$

تعریف11: فرض کنید $\Omega = (\Omega_j{}^i)$ ماتریسی باشد که درایه‌های آن از ۲-فرمی‌هایی به‌صورت زیر تشکیل شده است:

$$\Omega_j{}^i := \frac{1}{2} R^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l,$$

در این‌جا $R^i{}_{jkl}$ مؤلفه‌های تانسور انحنای ریمان است. ماتریس ۲-فرمی $(\Omega_j{}^i)$ را ۲-فرم انحنا می‌نامیم.

تعریف12: فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری n–بعدی باشد. تانسور

$$\boldsymbol{D}_y : T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM,$$

یک تانسور $\binom{1}{3}$ است که در مختصات موضعی به‌صورت:

$$\boldsymbol{D}_y(u,v,w) := D^i_{jkl}(y)u^j v^k w^l \frac{\partial}{\partial x^i}|_x,$$

نوشته می‌شود به‌طوری که در آن:

$$D^i_{jkl} := \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\left(G^i - \frac{1}{n+1}\frac{\partial G^m}{\partial y^m} y^i\right),$$

D_y تانسور انحنای داگلاس نامیده می‌شود و با محاسبه‌ی مستقیم می‌توان نشان داد:

$$D^i_{jkl} := B^i_{jkl} - \frac{2}{n+1}\{ E_{jk}\delta^i_l + E_{jl}\delta^i_k + E_{kl}\delta^i_j + E_{jk,l}y^i\}.$$

متر برخاسته از ساختار فینسلری F را متر داگلاس می‌نامیم اگر که تانسور انحنای آن صفر شود، یعنی $\boldsymbol{D} = 0$ [4]. در این حالت خواهیم داشت:

$$B^i_{jkl} = \frac{2}{n+1}\{ E_{jk}\delta^i_l + E_{jl}\delta^i_k + E_{kl}\delta^i_j + E_{jk,l}y^i\}.$$

نتیجه1: اگر $\boldsymbol{E} = 0$ آن‌گاه $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}$. هم‌چنین روی مترهای داگلاس همواره رابطه‌ی دو شرطی زیر برقرار است:

$$\boldsymbol{B} = 0 \ \Leftrightarrow \boldsymbol{E} = 0,$$

و به‌وضوح هر متر بروالدی داگلاس است.

تعریف13: به ازای $y \in T_xM_0$، تانسور لندسبرگ $\boldsymbol{L}_y: T_xM \times T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $\boldsymbol{L}_y(u,v,w) = L_{ijk}(y)u^i v^j w^k$ تعریف می‌کنیم که در آن $L_{ijk} := C_{ijk|s}y^s$ یا $L_{ijk} := -\frac{1}{2} y_m B^m{}_{ijk}$. خانواده $\boldsymbol{L} := \{\boldsymbol{L}_y\}_{y \in \boldsymbol{TM_0}}$ را انحنای لندسبرگ نامیده و به یک متر فینسلر، متر لندسبرگ گفته می‌شود اگر $\boldsymbol{L} = 0$ باشد. هم‌چنین تانسور لندسبرگ ضعیف $\boldsymbol{J}_y: T_xM \to \mathbb{R}$ به‌صورت $\boldsymbol{J}_y(u) = J_i(y)u^i$ تعریف می‌شود، که در آن

$$J_i := g^{jk}L_{ijk}.$$

متر حاصل از ساختار فینسلر F را متر لندسبرگ ضعیف می‌گوییم هرگاه انحنای لندسبرگ ضعیف آن صفر شود [13].

تعریف14: فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری باشد. متر حاصل از ساختار فینسلری F را یک متر لندسبرگ نسبتاً ایزوتروپیک عام[1] می‌نامیم هرگاه برای یک تابع اسکالر λ روی M داشته باشیم $L_{ijk}+\lambda C_{ijk} = 0$.

متر لندسبرگ نسبتاً ایزوتروپیک عام را به اختصار متر لندسبرگ $G.R.I$ می‌گوییم. در حالتی که برای یک تابع اسکالر c روی M، $\lambda = cF$ آن‌گاه متر لندسبرگ $G.R.I$ را متر لندسبرگ نسبتاً ایزوتروپیک می‌نامیم و به اختصار آن را متر لندسبرگ $R.I$ می‌گوییم.

هم‌چنین یک متر فینسلری را متر لندسبرگ ضعیف نسبتاً ایزوتروپیک عام می‌نامیم هرگاه برای یک تابع اسکالر λ روی M داشته باشیم $J_i+\lambda I_i = 0$. متر لندسبرگ ضعیف نسبتاً ایزوتروپیک عام را به اختصار متر لندسبرگ ضعیف $G.R.I$ می‌گوییم در حالتی که برای یک تابع اسکالر c روی M، $\lambda = cF$ آن‌گاه متر لندسبرگ ضعیف $G.R.I$ را متر لندسبرگ ضعیف نسبتاً ایزوتروپیک می‌نامیم و به اختصار آن را متر لندسبرگ ضعیف $R.I$ می‌گوییم. اگر تابع اسکالر c روی M ثابت باشد، آن‌گاه متر فینسلر را متر لندسبرگ $R.I$ ثابت می‌گوییم.

مثال1: انحنای لندسبرگ متر فانک به‌صورت زیر است:

$$L_{ijk} = -\frac{1}{2}FC_{ijk}.$$

بنابراین متر فانک یک متر لندسبرگ $R.I$ ثابت با $c = \frac{1}{2}$ می‌باشد [9].

در سال ۱۹۴۳ چرن التصاقی را برای مترهای فینسلری بیان کرد که به بیان این التصاق می‌پردازیم.

قضیه2: (قضیه چرن **[11]**) فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری n-بعدی باشد. قاب موضعی[2] دلخواه $\{e_i = \partial_i\}_{i=1}^n$ را برای π^*TM (کلاف برگردان[3] فضای مماس تحت نگاشت تصویر) و قاب موضعی دوگان $\{\omega^i = dx^i\}_{i=1}^n$ را برای π^*T^*M در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی یکتایی از ۱-فرمی‌های موضعی ${\omega_j}^i$ روی TM_0 وجود دارد به‌طوری که:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge {\omega_j}^i, \tag{3}$$

[1] General relatively isotropic Landsberg metric
[2] Local frame
[3] Pull back

$$dg_{ij} = g_{kj}\,\omega_i^{\ k} + g_{ik}\,\omega_j^{\ k} + 2C_{ijk}\ \omega^{n+k}, \tag{4}$$

که در آن

$$\omega^{n+i} := dy^i + y^j\,\omega_j^{\ i} = dy^i + N_m^i dx^m,$$

هم‌چنین $C_{ijk} = C(e_i, e_j, e_k)$ و $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

فرم‌های التصاق چرن $\{\omega_j^{\ i}\}$ با توجه به قاب موضعی $\{e_i\}$ برای π^*TM را می‌توان با یک التصاق خطی ∇ روی π^*TM به‌صورت

$$\nabla X := \left\{dx^i + X^j\,\omega_j^{\ i}\right\} \otimes e_i,$$

تعریف کرد که در آن $X = X^i(x,y)e_i \in C^\infty(\pi^*TM)$ ∇ التصاق چرن نامیده می‌شود.

با توجه به قضیه چرن با دیفرانسیل گرفتن از رابطه‌ی (3) اولین اتحاد بیانچی به‌دست می‌آید.

$$\omega^j \wedge \Omega_j^{\ i} = 0.$$

چون $\Omega_j^{\ i}$ها ۲-فرمی هستند لذا می‌توان آن‌ها را به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\Omega_j^{\ i} = \frac{1}{2} R^i_{\ jkl}\omega^k \wedge \omega^l + P^i_{\ jkl}\omega^k \wedge \omega^{n+l},$$

که در آن

$$R^i_{\ jkl} + R^i_{\ jlk} = 0,$$

$$R^i_{\ jkl} + R^i_{\ klj} + R^i_{\ l\,jk} = 0,$$

$$P^i_{\ jkl} = P^i_{\ kjl}.$$

$\tilde{R} := R^i_{\ jkl}\ \omega^j \otimes e_i \otimes \omega^k \otimes \omega^l$ و $\tilde{P} := P^i_{\ jkl}\ \omega^j \otimes e_i \otimes \omega^k \otimes \omega^l$ به‌ترتیب تانسورهای hh-انحنا و hv-انحنا از التصاق چرن نامیده می‌شوند. hv-انحنا یک کمیت غیر ریمانی است یعنی برای متر ریمان صفر است.

حال یک التصاق فینسلری دیگر معرفی خواهیم کرد که بیش از دیگر التصاق‌های فینسلری به حالت ریمانی نزدیک است.

قضیه3: (قضیه بروالد **[11]**) فرض کنید (M, F) یک منیفلد فینسلری n-بعدی باشد. برای یک پایه موضعی دلخواه $\{e_i\}$ برای π^*TM و دوگان آن $\{\omega^i\}$ برای π^*T^*M، یک خانواده یکتا از ۱-فرمی‌های $\{\omega_j^{\ i}\}$ روی TM_0 وجود دارد که:

$$d\,\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^{\ i}, \tag{5}$$

$$dg_{ij} = g_{kj}\,\omega_i^{\ k} + g_{ik}\,\omega_j^{\ k} + 2C_{ijk}\ \omega^{n+k} - 2L_{ijk}\ \omega^k, \tag{6}$$

که در آن

$$\omega^{n+i} := dy^i + y^j\,\omega_j{}^i = dy^i + N^i_m dx^m,$$

فرض کنید $\{\omega_j{}^i\}$ فرم‌های التصاق بروالد و $\{\Omega_j^i\}$، ۲-فرمی‌های انحنای وابسته به التصاق بروالد باشند، آن‌گاه

$$\Omega_j{}^i := d\omega_j{}^i - \omega_j{}^k \wedge \omega_k{}^i$$

است. چون $\Omega_j{}^i$ها ۲-فرمی‌های روی TM_0 و $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ پایه‌ای برای T^*TM_0 می‌باشد، پس می‌توان $\Omega_j{}^i$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\Omega_j{}^i = \frac{1}{2} R^i{}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + P^i{}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^{n+l}.$$

که در آن $R^i{}_{jkl}$ نسبت به اندیس‌های k و l پادمتقارن است، یعنی

$$R^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jlk}.$$

R و P به ترتیب تانسورهای hh-انحنا و hv-انحنا از التصاق بروالد نامیده می‌شوند.

رابطه بین hh-انحنای التصاق چرن $({}^cR)$ و hh-انحنای التصاق بروالد $({}^bR)$ به‌صورت زیر است:

$${}^bR^i{}_{jkl} = {}^cR^i{}_{jkl} + \{L^i{}_{jl|k} - L^i{}_{jk|l} + L^i{}_{hk}L^h{}_{jl} - L^i{}_{hl}L^h{}_{jk}\}.$$

متر برخاسته از ساختار فینسلری F را متر لندسبرگ تعمیم‌یافته گوییم اگر که hh-انحنای التصاق چرن $({}^cR)$ و hh-انحنای التصاق بروالد $({}^bR)$ برهم منطبق باشند [4]. یعنی

$$L^i{}_{jl|k} - L^i{}_{jk|l} + L^i{}_{hk}L^h{}_{jl} - L^i{}_{hl}L^h{}_{jk} = 0.$$

۳. نتایج اصلی

در این مقاله قصد داریم متر داگلاس را با انحنای خاص کارتان

$$C_{jkl} = \frac{2}{F(n+1)}\{E_{jk}y_l + E_{jl}y_k + E_{kl}y_j + E_{jk,l}F^2\}. \tag{7}$$

مورد مطالعه قرار داده و ثابت کنیم که با این انحنای خاص کارتان، هر متر داگلاس یک متر لندسبرگ $R.I$ ثابت و در صورت

کرانداری، ریمانی است و هم‌چنین متر لندسبرگ، متر لندسبرگ ضعیف و متر لندسبرگ تعمیم‌یافته معادل‌اند.

مثال2: ساختار فینسلری

$$F(x, y) := \frac{\sqrt{|y|^2 - |x|^2|y|^2 + <x, y>^2} + <x, y>}{1 - |x|^2}, \qquad y \in T_x\mathbb{B}^n = \mathbb{R}^n$$

که در آن $|.|$ و $<\,,\,>$ به‌ترتیب نشان دهنده ی نرم اقلیدسی و ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ هستند، یک متر فانک و روی گوی واحد $\mathbb{B}^n$ از نوع راندرزی است [8].

مثال3: بنابر شرط متر داگلاس داریم:

$$B^i_{jkl} = \frac{2}{n+1}\{E_{jk}\delta^i_l + E_{jl}\delta^i_k + E_{kl}\delta^i_j + E_{jk,l}y^i\}.$$

از طرفی انحنای بروالد وابسته به متر فانک به‌صورت زیر است: [14]

$$B^i_{jkl} = C_{jkl}\ell^i + \frac{1}{2F}\{h_{jk}h^i_l + h_{jl}h^i_k + h_{kl}h^i_j\}.$$

بنابراین بعد از انقباض در y_i داریم:

$$C_{jkl} = \lambda\frac{2}{F(n+1)}\{E_{jk}y_l + E_{jl}y_k + E_{kl}y_j + E_{jk,l}F^2\},$$

که در آن $\lambda = \frac{1}{F}$ می‌باشد. پس مترهای فانک مثالی برای مترهای با انحنای خاص کارتان می‌باشند.

مثال4: با توجه به این‌که

$$y_i\,B^{\ i}_{jkl} \coloneqq -2L_{jkl},$$

می‌توان مثال دیگری با $\lambda = \frac{-2}{F}$ ارائه کرد.

قضیه 4: متر داگلاس با انحنای کراندار خاص کارتان، ریمانی است.

اثبات. با توجه به فرض داریم:

$$FC_{jkl} = \frac{2}{(n+1)}\{E_{jk}y_l + E_{jl}y_k + E_{kl}y_j + E_{jk,l}F^2\}. \qquad (8)$$

بر اساس تعریف متر داگلاس

$$B^i_{jkl} = \frac{2}{n+1}\{E_{jk}\delta^i_l + E_{jl}\delta^i_k + E_{kl}\delta^i_j + E_{jk,l}y^i\}. \qquad (9)$$

با انقباض رابطه (9) در y_i و با استفاده از تعریف زیر

$$y_i\,B^{\ i}_{jkl} \coloneqq -2L_{jkl}, \qquad (10)$$

خواهیم داشت:

$$-2L_{jkl} = \frac{2}{(n+1)}\{ E_{jk}y_l + E_{jl}y_k + E_{kl}y_j + E_{jk,l}F^2\}. \qquad (11)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌های (8) و (11) داریم:

$$L_{jkl} + \frac{1}{2} A_{jkl} = 0,$$

که در آن $A_{jkl} := FC_{jkl}$.

اگر p نقطه دلخواهی روی M و $y, u, v, w \in T_pM$ باشند. برای ژئودزی $c: (-\infty, \infty) \to M$ گذرنده از p که $\frac{dc}{dt}(0) = y$، میدان‌های برداری موازی $U(t)$، $V(t)$ و $W(t)$ در طول c را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که $U(0) = u$، $V(0) = v$ و $W(0) = w$ باشند. با قرار دادن

$$A(t) = A\left(U(t), V(t), W(t)\right),$$
$$A'(t) = A'\left(U(t), V(t), W(t)\right).$$

چون $A_{jkl} := FC_{jkl}$ بنابراین $C_{jkl} := \frac{1}{F} A_{jkl}$. از طرفی طبق تعریف متر لندسبرگ $L_{jkl} := C_{jkl|s}y^s$ در نتیجه

$$\begin{aligned} L_{jkl} &= \left(\frac{1}{F}A_{jkl}\right)|s\ y^s \\ &= \left(\frac{1}{F}\right)|s\ A_{jkl}\ y^s + \frac{1}{F}A_{jkl|s}\ y^s \\ &= A_{jkl|s}\ \ell^s := A'_{jkl}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم $L(t) = A'(t)$. لذا معادله دیفرانسیل معمولی زیر را خواهیم داشت:

$$A'(t) + \frac{1}{2}\ A(t) = 0.$$

که این یک معادله خطی مرتبه اول است. پس جواب عمومی آن به‌صورت زیر است:

$$A(t) = A(0)e^{\frac{-t}{2}}.$$

با توجه به کرانداری انحنا داریم $\|A\| < \infty$. با میل دادن t به سمت $-\infty$ به‌وضوح دیده می‌شود که $\lim_{t\to-\infty} A(t) = +\infty$ مگر این‌که داشته باشیم $A(0) = 0$. حال از این‌که $A(t) = A(0)e^{\frac{-t}{2}}$ داریم $\forall t,\ A(t) = 0$ و چون $A = FC$ پس نتیجه می‌شود که $C = 0$ و لذا متر مورد نظر ریمانی است. □

نتیجه2: هر متر لندسبرگ که در رابطه (7) صدق کند، متر ریمانی است.

قضیه5: هر متر داگلاس با انحنای خاص کارتان، متر لندسبرگ $R.I$ ثابت است.

اثبات. براساس رابطه‌های (8)، (9) و (10) خواهیم داشت:

$$L_{jkl} + \frac{1}{2}\ FC_{jkl} = 0.$$

با توجه به تعریف متر لندسبرگ $R.I$ ثابت، $\lambda = cF$ که در این‌جا $c = \frac{1}{2}$ و حکم برقرار است. □

قضیه6: با این انحنای خاص کارتان احکام زیر معادل‌اند:

1) متر لندسبرگ ضعیف است.

2) متر لندسبرگ است.

3) متر لندسبرگ تعمیم‌یافته است.

اثبات 2 ⇔ 1: می‌دانیم هر متر لندسبرگ یک متر لندسبرگ ضعیف است (چون متر لندسبرگ است پس $L = 0$ و طبق تعریف متر لندسبرگ ضعیف داریم $J_i := g^{jk}L_{ijk}$، بنابراین $J_i = 0$ و در نتیجه $J = 0$). کافیست نشان دهیم هر متر لندسبرگ ضعیف (طبق قضیه **5**، شرط متر لندسبرگ $R.I$ ثابت هم برقرار است) متر لندسبرگ است.

طبق فرض متر لندسبرگ ضعیف است پس $J_i = 0$ و طبق تعریف متر لندسبرگ ضعیف $R.I$ ثابت داریم $\lambda = -\frac{J_i}{I_i}$ بنابراین چون $J_i = 0$ پس $\lambda = 0$. اما به دلیل این‌که F یک متر لندسبرگ $R.I$ ثابت است پس $L_{ijk} + c_0FC_{ijk} = 0$ می‌دانیم که برای c_0 ثابت، $\lambda = c_0F$. چون $\lambda = 0$ و $F \neq 0$ است پس $c_0 = 0$ و بنابراین $L_{ijk} = 0$ و در نتیجه F متر لندسبرگ است.

حال به **اثبات 3 ⇔ 2** می‌پردازیم: با توجه به این‌که هر متر لندسبرگ، یک متر لندسبرگ تعمیم‌یافته است (چون متر لندسبرگ است پس $L = 0$ و طبق رابطه متر لندسبرگ تعمیم‌یافته داریم

$$L^i{}_{jl|k} - L^i{}_{jk|l} + L^i{}_{hk}L^h{}_{jl} - L^i{}_{hl}L^h{}_{jk} = 0.$$

بنابراین معادله لندسبرگ تعمیم‌یافته برای متر لندسبرگ برقرار است). لذا کافیست ثابت کنیم هر متر لندسبرگ تعمیم‌یافته که متر لندسبرگ $R.I$ ثابت هم باشد، متر لندسبرگ است. می‌دانیم رابطه بین hh-انحنای التصاق چرن و hh-انحنای التصاق بروالد به‌صورت زیر است:

$${}^bR^i{}_{jkl} = {}^cR^i{}_{jkl} + \{L^i{}_{jl|k} - L^i{}_{jk|l} + L^i{}_{hk}L^h{}_{jl} - L^i{}_{hl}L^h{}_{jk}\}.$$

از سوی دیگر طبق تعریف متر لندسبرگ تعمیم‌یافته، hh-انحنای التصاق چرن و hh-انحنای التصاق بروالد برهم منطبق هستند. بنابراین

$$L^i{}_{jl|k} - L^i{}_{jk|l} + L^i{}_{hk}L^h{}_{jl} - L^i{}_{hl}L^h{}_{jk} = 0.$$

اما چون F متر لندسبرگ $R.I$ ثابت است، لذا $L_{jkl} + c_0FC_{jkl} = 0$. بنابراین

$$-cF\{C^i{}_{jl|k} - C^i{}_{jk|l}\} + c^2F^2\{C^i{}_{hk}C^h{}_{jl} - C^i{}_{hl}C^h{}_{jk}\} = 0.$$

با منقبض کردن رابطه قبل در y^k نتیجه می‌شود که $L_{ijl} = 0$. پس F یک متر لندسبرگ است و اثبات تمام است. □

سپاس‌گزاری: نویسنده اول از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز در انجام این تحقیق در قالب پژوهانه (SCU.MM 1402.650) تشکر و قدردانی می نماید.

References

1. S. Bácsó and M. Matsumoto, On Finsler space of Douglas type, A generalization of Berwald space, Publ. Math. Debrecen. **51** (1997), 385-406.

2. D. Bao and S. Chern, A note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces, Ann. Math. **143** (1996), 233-252.

3. D. Bao and S. Chern and Z. Shen, Introduction to Riemann Finsler geometry, Springer, New York, (2000).

4. A. Bejancu and H. Farran, Generalized Landsberg manifolds of scalar curvature, Bull. Korean Math. Soc. **37** (2000), 543-550.

5. S. Chern and Z. Shen, Riemann-Finsler geometry, World Scientific, New Jersey, 2005.

6. J. Douglas, The general geometry of paths, Ann. of Math. **29** (1927-28), 143-168.

7. B. Najafi and A. Tayebi and M. Rezaei, On general relatively isotropic mean Landsberg metrics, Iranian Journal of Science and Technology, **29** (2005), 497-505.

8. Z. Shen, Differential geometry of Spray and Finsler spaces, Kluwer Academic Publishers, 2001.

9. Z. Shen, Lectures on Finsler geometry, Singapore World Scientific, 2001.

10. Z. Shen, Finsler manifolds with nonpositive flag curvature and constant S-curvature, Math. Z. **249** (2005), 625-639.

11. Z. Shen, Riemann-Finsler geometry with applications to information geometry, Chinese. Annals. Math. **27** (2006), 73-94.

12. Z. Szabó, Positive definite Berwald spaces, (Structure theorems on Berwald Spaces), Tensor, N. S. **35** (1981), 25-39.

13. A. Tayebi, The class of generalized Landsberg manifolds, Period Math Hung **72** (2016), 29-36.

14. A. Tayebi and E. Peyghan , On special Berwald metrics, Symmetry, Inerrability and Geometry: Methods and its Applications (SIGMA), **6** (2010), 008, 9 pages.

۱۵. طیبی اکبر، مقدمه ای بر هندسه ریمان-فینسلر، انتشارات بانیان دانش (۱۳۹۶).

۱۶. بیدآباد بهروز، هندسه منیفلد۲ ، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک) (۱۳۸۹)