



Kharazmi University

# Modules Whose Lattice of Radical Submodules Is Noetherian

H. Fazaeli Moghimi<sup>1</sup> , M. Hakimi Ghalesafa<sup>2</sup> 

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran. ✉ E-mail: [hfazaeli@birjand.ac.ir](mailto:hfazaeli@birjand.ac.ir)
2. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran. E-mail: [milad.hakimi@birjand.ac.ir](mailto:milad.hakimi@birjand.ac.ir)

## Article Info

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received: 17 February 2022

Received in revised form:

23 June 2022

Accepted: 15 May 2024

Published online:

10 July 2024

### Keywords:

Radical submodule,

Radical Noetherian module,

Radical Noetherian ring,

Multiplication module.

## ABSTRACT

### Introduction

Throughout, this paper all rings are commutative with identity and all modules are unitary. Let  $R$  be a ring and  $M$  be an  $R$ -module. For any submodule  $N$  of  $M$  by  $(N:M)$ , we mean that the ideal  $\{r \in R : rM \subseteq N\}$  of  $R$ . A proper submodule  $P$  of  $M$  is called a prime submodule if for each  $r \in R$  and  $m \in M$ ,  $rm \in P$  implies that  $r \in (P:M)$  or  $m \in P$  (for more study about prime submodules see [10], [12], [18]). The intersection of all prime submodules of  $M$  containing  $N$  is called the radical of  $N$ , and denoted  $radN$ . In the case that there are no prime submodules containing  $N$ , we write  $radN = M$ . If  $I$  is an ideal of  $R$ , then the radical of  $R$  is denoted by  $\sqrt{I}$ . The submodule  $N$  of  $M$  is called a radical submodule, if  $radN = N$ . Also, an ideal  $I$  of  $R$  is called a radical ideal if it is a radical submodule of  $R$ . The set of all radical submodules of  $M$ , denoted by  $RAD(M)$ , together with inclusion is a complete lattice. Indeed, for any subset  $\mathcal{A} = \{N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  of  $RAD(M)$  we have;

$$\text{Inf}\mathcal{A} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \quad , \text{ and } \quad \text{Sup}\mathcal{A} = \text{rad}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda\right).$$

This lattice has been studied from different point of views (see for example [8], [16], and [17]). We know that a lattice  $R$  is Noetherian if every increasing chain  $a_1 \leq a_2 \leq \dots$  of elements of  $R$  is stationary. Here, we say that any  $R$ -module  $M$  is radical Noetherian if  $RAD(M)$  is a Noetherian lattice. Also, a ring  $R$  is called radical Noetherian if it is a radical Noetherian  $R$ -module. It is evident that every Noetherian module is radical Noetherian, but the module of rational numbers  $\mathbb{Q}$  over the ring of integers  $\mathbb{Z}$  is an example of a radical Noetherian module which is not Noetherian. Moreover, in [9], there are several examples (for instance Example 5.16) of non-Noetherian local domains with finite Krull dimension which are radical Noetherian. Therefore, the collection of radical Noetherian rings (modules) strictly contains the collection of Noetherian rings (modules). It is interesting to know that every Artinian module is also radical Noetherian [16, Proposition 18], but the converse is not true. Indeed,  $\mathbb{Z}$  is a well-known example of an Artinian  $\mathbb{Z}$ -module which is radical Noetherian. Thus the collection of radical Noetherian modules strictly contains the collection of Artinian modules.

There is a well-known result in the context of Noetherian modules which says that “an  $R$ -module  $M$  is Noetherian if and only if every submodule of  $M$  is finitely generated”. The analog of this theorem in radical Noetherian modules, given in [14, Theorem 16] and [15, Theorem 6.1], states that “An  $R$ -module  $M$  is radical Noetherian if and only if every its radical submodule is the radical

---

---

of a finitely generated submodule.” This was our motivation to study radical Noetherian modules and explore the analogs of some well-known results in the context of Noetherian modules. Moreover, we investigate the stability of radical Noetherian modules with respect to various module-theoretic constructions such as factor modules, direct sum and idealization.

### Main Results

Among other things, the following results are shown in this paper.

- 1) The set of minimal prime submodules of a radical Noetherian module  $M$  is finite. As shown in [19, p.231], the converse of this result is not true in general.
- 2) A ring  $R$  is radical Noetherian if and only if every ascending chain of its prime ideals is stationary.
- 3) Every quotient of a radical Noetherian module is radical Noetherian.
- 4) A finitely generated multiplication  $R$ -module  $M$  is radical Noetherian if and only if  $R/Ann(M)$  is a radical Noetherian ring.
- 5) If  $M$  is a radical Noetherian faithful multiplication  $R$ -module, then the module of fractions  $M_S$  (with respect to a multiplicatively closed subset  $S$  of  $R$ ) is a radical Noetherian  $R_S$ -module. In particular,  $R_S$  is a radical Noetherian ring.
- 6) If the direct sum  $M = M_1 \oplus M_2$  of  $R$ -modules  $M_1$  and  $M_2$  is radical Noetherian, then so are  $M_1$  and  $M_2$ . The converse is true if  $M_1$  and  $M_2$  are radical Noetherian multiplication  $R$ -modules such that  $Ann(M_1) \oplus Ann(M_2) = R$ .
- 7) If  $M_1$  and  $M_2$  are radical Noetherian faithful multiplication  $R$ -modules, then so is their tensor product  $M_1 \otimes M_2$ .
- 8) (Cohen’s Theorem)  $R$  is a radical Noetherian ring if and only if every its prime ideal is the radical of a finitely generated ideal.
- 9) (A generalization of Cohen’s Theorem for modules) A finitely generated faithful multiplication module  $M$  is radical Noetherian if and only if every its prime submodule is the radical of a finitely generated submodule of  $M$ .
- 10) (Hilbert basis Theorem) If  $R$  is a radical Noetherian ring, then the polynomial ring  $R[X]$  is radical Noetherian.
- 11) Let  $M$  be any  $R$  module. Then  $R$  is a radical Noetherian ring if and only if the idealization  $R(+)M$  is a radical Noetherian ring if and only if  $(R(+)M)[X]$  is a radical Noetherian ring.
- 12) Let  $M$  be a radical Noetherian  $R$ -module and  $M[X]$  be the usual  $R[X]$ -module. If  $M[X]$  is a multiplication  $R$ -module (obtained by the restriction of scalars), then  $M[X]$  is a radical Noetherian  $R[X]$ -module.

---

---

**How to cite:** Fazaeli Moghimi, H. & Hakimi Ghalesafa, M. (2024). Modules whose lattice of radical submodules is noetherian. *Mathematical Researches*, **10** (2), 66 – 81.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

---

## مدول‌هایی که مشبکه زیرمدول‌های رادیکال آن‌ها نوتری است

حسین فضائلی مقیمی<sup>۱</sup>✉، میلاد حکیمی قلعه صفا<sup>۲</sup>

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران. رایانامه: [hfazaeli@birjand.ac.ir](mailto:hfazaeli@birjand.ac.ir)  
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران. رایانامه: [milad.hakimi@birjand.ac.ir](mailto:milad.hakimi@birjand.ac.ir)

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۸ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۴/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۲/۲۶ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۴/۲۰	در این مقاله، به بررسی گردایه‌ای از مدول‌ها می‌پردازیم که مشبکه زیرمدول‌های رادیکال آن‌ها نوتری است. این گردایه از مدول‌ها که هر عضو آن رادیکال نوتری نامیده می‌شود به طور اکید شامل گردایه مدول‌های نوتری و مدول‌های آرتینی است. نشان خواهیم داد که همانند مدول‌های نوتری، مجموعه زیرمدول‌های اول کمین یک مدول رادیکال نوتری، متناهی است. همچنین حلقه $R$ را رادیکال نوتری گوئیم، اگر $R$ به عنوان $R$ -مدول رادیکال نوتری باشد. اثبات خواهیم کرد که $R$ -مدول ضربی $M$ رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر $R/Ann(M)$ یک حلقه رادیکال نوتری باشد. به‌علاوه قضیه‌های کوهن و پایه هیلبرت را برای حلقه‌های رادیکال نوتری بیان و اثبات می‌نماییم.

### واژه‌های کلیدی:

زیرمدول رادیکال،  
مدول رادیکال نوتری،  
حلقه رادیکال نوتری،  
مدول ضربی.

استناد: فضائلی مقیمی، حسین و حکیمی قلعه صفا، میلاد (۱۴۰۳). مدول‌هایی که مشبکه زیرمدول‌های رادیکال آن‌ها نوتری است. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۲)، ۶۶-۸۱.



## مقدمه

در سرتاسر این مقاله همه حلقه‌ها جابجایی و یک‌دار و همه مدول‌ها یکانی هستند. فرض کنید  $R$  یک حلقه و  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. برای زیرمدول  $N$  از  $M$ ، منظور از  $(N: M)$  ایده‌آل  $\{r \in R: rM \subseteq N\}$  از  $R$  می‌باشد. زیرمدول سره  $P$  از  $M$  را اول گوئیم هرگاه برای هر  $r \in R$  و  $m \in M$ ، عبارت  $rm \in P$  ایجاب کند که  $m \in P$  یا  $r \in (P: M)$  (برای مطالعه بیشتر درباره زیرمدول‌های اول می‌توان به [۱۰]، [۱۲] و [۱۸] رجوع کرد). اشتراک همه زیرمدول‌های اول از  $M$  شامل زیرمدول  $N$  را رادیکال  $N$  می‌نامیم و با  $radN$  نشان می‌دهیم. در صورتی که هیچ زیرمدول اولی شامل  $N$  موجود نباشد، قرارداد می‌کنیم که  $radN = M$ . در حالتی که  $I$  ایده‌آلی از حلقه  $R$  باشد، رادیکال  $I$  را با  $\sqrt{I}$  نشان می‌دهیم. زیرمدول  $N$  از  $M$  را زیرمدول رادیکال می‌نامیم هرگاه  $radN = N$ . همچنین ایده‌آل  $I$  از  $R$  را ایده‌آل رادیکال گوئیم هرگاه  $R - I$  زیرمدول رادیکال از  $R$  باشد. مجموعه همه زیرمدول‌های رادیکال  $M$  را با  $RAD(M)$  نشان می‌دهیم. می‌دانیم که یک مجموعه به طور جزئی مرتب  $(L, \leq)$ ، مشبکه (مشبکه کامل) است هرگاه هر زیرمجموعه دو عضوی (زیرمجموعه دلخواه) از آن نسبت به رابطه ترتیب جزئی  $\leq$ ، دارای سوپریموم و اینفیموم باشد. به راحتی دیده می‌شود که مجموعه  $RAD(M)$  همراه با رابطه شمول  $\subseteq$  تشکیل یک مشبکه کامل می‌دهد، که در آن برای هر خانواده  $\mathcal{A} = \{N_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$  از عضوهای  $RAD(M)$

$$\text{Inf } \mathcal{A} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \quad \text{و} \quad \text{Sup } \mathcal{A} = \text{rad} \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \right).$$

این مشبکه از دیدگاه‌های مختلف در [۸]، [۱۶] و [۱۷] مطالعه شده است.

یک مشبکه  $(L, \leq)$  را نوتری گوئیم هرگاه برای هر زنجیر افزایشی  $a_1 \leq a_2 \leq \dots$  از عضوهای  $L$  یک عدد صحیح مثبت  $n$  موجود باشد به طوری که برای هر  $i \geq n$  داشته باشیم  $a_i = a_n$ .

در این مقاله بنا داریم که نوتری بودن مشبکه  $RAD(M)$  از زیرمدول‌های رادیکال مدول  $M$  را بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا به یادآوری قضیه زیر می‌پردازیم که در [۱۴]، [۱۵]، [۱۶] آمده است و در [۱۵]، [۱۶] نیز بازگو شده است.

**قضیه ۱.**  $R$ -مدول  $M$  در شرط زنجیر افزایشی روی زیرمدول‌های رادیکال صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول  $N$  از  $M$ ، زیر مدول متناهی مولد  $L$  از  $N$  موجود باشد به طوری که  $radL = radN$ .

به عبارت دیگر  $RAD(M)$  نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول رادیکال  $M$  رادیکال یک زیرمدول متناهی مولد از آن باشد. شباهت قضیه ۱ به قضیه مشهوری در مبحث مدول‌های نوتری که بیان می‌دارد " $R$ -مدول  $M$  نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول از آن متناهی مولد باشد"، ما را بر آن داشت تا در جستجوی جایگزین‌های برخی نتایج رایج دیگر در مبحث مدول‌های نوتری باشیم. از این به بعد برای راحتی،  $R$ -مدول  $M$  را رادیکال نوتری می‌گوئیم هرگاه مشبکه  $RAD(M)$  نوتری باشد. همچنین حلقه  $R$  را رادیکال نوتری گوئیم هرگاه به عنوان  $R$ -مدول رادیکال نوتری باشد. آشکار است که هر مدول

نوتری، رادیکال نوتری است ولی عکس آن صحیح نیست. در زیر مثالی از مدول‌های رادیکال نوتری غیر نوتری ارائه شده است. از این رو گردایه مدول‌های رادیکال نوتری به‌طور اکید شامل گردایه مدول‌های نوتری است.

**مثال ۱.۱** مطابق معمول  $\mathbb{Z}$  را حلقه اعداد صحیح و  $\mathbb{Q}$  را گروه آبدی اعداد گویا در نظر می‌گیریم. می‌دانیم  $\mathbb{Z}$ -مدول  $\mathbb{Q}$  غیرنوتری است. بنا به [۴، مثال ۱.۳]،  $(0)$  تنها زیرمدول اول از  $\mathbb{Z}$ -مدول  $\mathbb{Q}$  است و از این رو  $\text{RAD}(\mathbb{Q}) = \{(0), \mathbb{Q}\}$  که نشان می‌دهد  $\mathbb{Z}$ -مدول  $\mathbb{Q}$  رادیکال نوتری است. لازم به ذکر است که  $(0) = \text{rad}(0)$  و  $\mathbb{Q} = \text{rad}\mathbb{Z}$ .

(۲) فرض کنید  $\mathbb{Z}_p$  گروه آبدی دوری از مرتبه عدد اول  $p$  باشد. در این صورت بنا به [۱۳، مثال ۶.۲]، تنها زیرمدول‌های اول  $\mathbb{Z}$ -مدول غیرنوتری  $M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$  عبارتند از  $(0) \oplus \mathbb{Z}_p$  و  $\mathbb{Q} \oplus (0)$ . از این رو  $M$  یک مدول رادیکال نوتری است، زیرا  $\text{RAD}(M) = \{(0) \oplus (0), \mathbb{Q} \oplus (0), (0) \oplus \mathbb{Z}_p, M\}$ .

(۳) هر مدول  $M$  بدون زیرمدول اول رادیکال نوتری است، زیرا  $\text{RAD}(M) = \{M\}$ . بنا به [۱۳، لم ۳.۱]،  $\mathbb{Z}(p^\infty)$  یک  $\mathbb{Z}$ -مدول بدون زیرمدول اول می‌باشد و در نتیجه رادیکال نوتری است. این مدول مثال شناخته شده‌ای از مدول‌های آرتینی غیرنوتری است (برای مثال [۵، صفحه ۷۴] را ببینید).

چنان‌که در تبصره (۱) اشاره خواهد شد، گردایه حلقه‌های رادیکال نوتری نیز به‌طور اکید شامل گردایه حلقه‌های نوتری می‌باشد. جالب است که بدانیم بنا به [۱۴، گزاره ۱۸]، هر مدول آرتینی نیز رادیکال نوتری است ولی حلقه اعداد صحیح  $\mathbb{Z}$  مثال شناخته شده‌ای از حلقه نوتری (و بنابراین رادیکال نوتری) است که آرتینی نیست. (برای مثال [۵، صفحه ۷۴]، را ببینید). از این رو گردایه مدول‌های رادیکال نوتری به‌طور اکید شامل گردایه مدول‌های آرتینی نیز هست.

یکی از نتایج شناخته شده در مبحث حلقه‌های نوتری قضیه کوهن است. ما ضمن ارائه نسخه جایگزین این قضیه برای حلقه‌های رادیکال نوتری، تعمیمی از آن را برای مدول‌های رادیکال نوتری ارائه می‌کنیم. در واقع نشان می‌دهیم حلقه  $R$  رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل اول از آن رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد باشد (نتیجه ۱۶،۱). سپس نتیجه می‌گیریم که  $R$ -مدول ضربی متناهی‌مولد  $M$  رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول اول از  $M$  رادیکال یک زیرمدول متناهی‌مولد از آن باشد (نتیجه ۱۷،۱). به‌علاوه نسخه جایگزین قضیه پایه هیلبرت برای حلقه‌های رادیکال نوتری را ارائه می‌کنیم که بیان می‌دارد "اگر  $R$  یک حلقه رادیکال نوتری باشد، آنگاه حلقه چندجمله‌ای  $R[X]$  رادیکال نوتری است" (قضیه ۱۹،۱). علاوه بر این موارد، پایایی رادیکال نوتری بودن یک مدول نسبت به برخی ساختارهای مدولی مانند خارج قسمت، جمع مستقیم و ایده‌آل‌سازی را بررسی خواهیم کرد.

## ۱. مدول‌های رادیکال نوتری

به غیر از شرط معادل داده شده برای رادیکال نوتری بودن یک مدول در قضیه ۱، شرایط معادل دیگری نیز وجود دارند که بلافاصله از نوتری بودن یک شبکه به‌دست می‌آیند. ما این بخش را با ارائه آن‌ها آغاز می‌کنیم.

لم ۱.۱. برای یک  $R$ -مدول  $M$  شرایط زیر معادل هستند:

(۱)  $M$  رادیکال نوتری است؛

(۲) هر زیرمجموعه ناتهی از  $rad(M)$  دارای عضو بیشین است؛

(۳) برای هر زیرمجموعه ناتهی  $\mathcal{A}$  از  $rad(M)$  یک زیرمجموعه متناهی  $\mathfrak{B}$  از  $\mathcal{A}$  وجود دارد به طوری که

$$rad(\sum_{N \in \mathcal{A}} N) = rad(\sum_{N \in \mathfrak{B}} N).$$

برهان. (۱)  $\Leftrightarrow$  (۲). از [۵، گزاره ۱.۶] به دست می‌آید.

(۲)  $\Leftrightarrow$  (۳). از [۶، گزاره ۳.۱] به دست می‌آید.  $\square$

قضیه‌ای در مبحث مدول‌های نوتری بیان می‌دارد که برای مدول نوتری  $M$  مجموعه  $Min(M)$  متشکل از زیرمدول‌های اول کمین  $M$  یک مجموعه متناهی است ([۱۸، لم ۱۰.۳ را ببینید]). اکنون نشان می‌دهیم این مطلب برای مدول‌های رادیکال نوتری نیز برقرار است.

قضیه ۲.۱. فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول رادیکال نوتری باشد. در این صورت  $Min(M)$  متناهی است.

برهان. اگر  $rad(0) = M$  آن‌گاه  $Min(M) = \emptyset$ . فرض می‌کنیم  $rad(0) \neq M$  و حکم درست نباشد. مجموعه  $S$  متشکل از زیرمدول‌های رادیکال سره  $N$  از  $M$  را در نظر می‌گیریم که  $Min(M/N)$  نامتناهی باشد. واضح است که  $rad(0) \in S$  و از این رو  $S$  ناتهی است. در این صورت بنا به (۱)  $\Leftrightarrow$  (۲) از لم ۱،  $S$  دارای عضو بیشینی مانند  $K$  است. آشکار است که  $K$  زیرمدول اولی از  $M$  نیست، زیرا در غیر این صورت  $Min(M/K) = \{(0)\}$  که در تناقض با عضویت  $K$  در  $S$  است. بنابراین عضوهای  $r \in R \setminus (K:M)$  و  $x \in M \setminus K$  وجود دارند به طوری که  $rx \in K$  در این صورت با در نظر گرفتن  $I = Rr$  و  $L = K + Rx$  درمی‌یابیم که  $IL \subseteq K$  و  $K \subset L$ ،  $K \subset L$  و  $K \subset K + IM$  حال فرض می‌کنیم  $P$  زیرمدولی از  $M$  شامل  $K$  باشد به طوری که  $P/K$  زیرمدول اول کمین  $M/K$  باشد. در این صورت  $IL \subseteq K \subseteq P$  ایجاب می‌کند  $L \subseteq P$  یا  $IM \subseteq P$  در نتیجه

$$P/radL \in Min(M/radL) \quad \text{یا} \quad P/rad(K + IM) \in Min(M/rad(K + IM))$$

حال با توجه به این که  $K \subset radL$  و  $K \subset rad(K + IM)$ ، مجموعه‌های  $Min(M/rad(K + IM))$  و  $Min(M/radL)$  متناهی هستند که نشان می‌دهد تعداد متناهی انتخاب برای  $P$  و سپس  $P/K$  وجود دارد. این در تناقض با عضویت  $K$  در  $S$  است و بنابراین  $M$  تعداد متناهی زیرمدول اول کمین دارد.  $\square$

مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی عکس قضیه ۲.۱ درست نیست.

مثال ۳.۱. فضاهای برداری با بعد نامتناهی رادیکال نوتری نیستند، زیرا هر زیرفضای سره از یک فضای برداری زیرمدول اولی از آن است. به‌ویژه زیرمدول  $(0)$  تنها زیرمدول اول کمین از هر فضای برداری ناصفر است.

(۲) [۱۹، صفحه ۲۳۱] فرض کنید  $R = K[X_1, X_2, X_3, \dots]$  حلقه با شمارای نامتناهی متغیر روی میدان  $K$  باشد و  $p_2 = (X_2, X_3, \dots)$  و  $p_1 = (X_1)$ ،  $I = (X_1X_2, X_1X_3, \dots)$ .

به آسانی دیده می‌شود که  $\text{Min}(R/I) = \{p_1/I, p_2/I\}$  و  $p_2/I$  رادیکال هیچ ایده‌آل متناهی مولد از  $R/I$  نیست. از این رو بنا به قضیه ۱،  $R/I$  یک حلقه رادیکال نوتری نیست ولی دارای تعداد متناهی ایده‌آل اول کمین است.

$R$ -مدول  $M$  ضربی نامیده می‌شود اگر به ازای هر زیرمدول  $N$  از  $M$ ، ایده‌آل  $I$  از  $R$  موجود باشد به طوری که  $N = IM$ . به راحتی دیده می‌شود که  $M$  ضربی است اگر و تنها اگر به ازای هر زیرمدول  $N$  از  $M$ ،  $N = (N:M)M$ . همچنین حلقه  $R$  را ضربی گویند، هرگاه هر ایده‌آل از آن یک  $R$ -مدول ضربی باشد.

**نتیجه ۴،۱.** گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱) هر مدول ضربی رادیکال نوتری، متناهی مولد است.

(۲) هرمدول ضربی روی یک حلقه رادیکال نوتری، متناهی مولد است.

**برهان.** (۱) بنابه [۷، قضیه ۷.۳]، هر مدول ضربی با تعداد متناهی زیرمدول اول کمین، یک مدول متناهی مولد است. در نتیجه حکم از قضیه ۲،۱ به دست می‌آید.

(۲) بنا به [۷، نتیجه ۹.۳] واضح است.  $\square$

**نتیجه ۵،۱.** حلقه ضربی  $R$  نوتری است اگر و تنها اگر رادیکال نوتری باشد.

**برهان.**  $\Leftarrow$  واضح است.

$\Rightarrow$  بنا به [۷، قضیه ۱۱.۳]، هر حلقه ضربی با تعداد متناهی ایده‌آل اول کمین، نوتری است. در نتیجه حکم از قضیه ۲،۱، به دست می‌آید.  $\square$

**قضیه ۶،۱.** حلقه  $R$  رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های اول  $R$  ایستا بوده و هر ایده‌آل رادیکال از  $R$  اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل اول از  $R$  باشد.

**برهان.**  $\Leftarrow$  واضح است که هر زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های اول حلقه رادیکال نوتری  $R$  ایستا است. برای اثبات قسمت دوم فرض کنید  $S$  مجموعه ایده‌آل‌های رادیکال  $R$  باشد که اشتراکی متناهی از ایده‌آل‌های اول  $R$  نیستند. اگر  $S \neq \emptyset$ ، آن‌گاه بنا به لم ۱،۱،  $S$  دارای عضو بیشینی مانند  $I$  است که ایده‌آل اولی از  $R$  نیست. بنابراین عضوهای  $a, b \in R \setminus I$  وجود دارند به طوری که  $ab \in I$ . بنا به بیشین بودن  $I$  در  $S$  و این که  $I \subset \sqrt{Ra + I}$  و  $I \subset \sqrt{Rb + I}$ ، ایده‌آل‌های  $\sqrt{Ra + I}$  و  $\sqrt{Rb + I}$  اشتراکی متناهی از ایده‌آل‌های اول  $R$  می‌باشند. از طرفی

$$I \subseteq \sqrt{Ra + I} \cap \sqrt{Rb + I} = \sqrt{(Ra + I)(Rb + I)} = \sqrt{Rab + RaI + RbI + I^2} \subseteq \sqrt{I} = I$$

که نشان می‌دهد  $I = \sqrt{Ra + I} \cap \sqrt{Rb + I}$  و در نتیجه  $I$  اشتراکی متناهی از ایده‌آل‌های اول  $R$  خواهد بود. این در تناقض با عضویت  $I$  در  $S$  است و بنابراین  $S = \emptyset$ . در نتیجه هر ایده‌آل رادیکال از  $R$  اشتراکی متناهی از ایده‌آل‌های اول  $R$  است.

( $\Rightarrow$ ) فرض کنید  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  یک زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های رادیکال  $R$  باشد که ایستا نیست. بنا به فرض، ایده‌آل‌های اول  $p_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) وجود دارند به طوری که  $I_1 = p_1 \cap \dots \cap p_r$  برای هر  $1 \leq i \leq r$ .

$$p_i = \sqrt{I_1 + p_i} \subseteq \sqrt{I_2 + p_i} \subseteq \dots \quad (*)$$

فرض کنید این زنجیرها در  $n$ -امین جمله متوقف شوند و  $n = \max\{n_i \mid 1 \leq i \leq r\}$  در این صورت

$$I_{n+1} \subseteq \sqrt{I_n + p_1} \cap \dots \cap \sqrt{I_n + p_r} = \sqrt{(I_n + p_1) \cdots (I_n + p_r)} \subseteq \sqrt{I_n} = I_n.$$

این در تناقض با ایستا نبودن زنجیر  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  است. بنابراین حداقل یکی از زنجیرهای (\*), ایستا نیست. این زنجیر به شکل  $\dots \subset J_3 \subset J_2 \subset p'_1$  می‌باشد که جملاتش ایده‌آل‌های رادیکال هستند و اولین آن‌ها یعنی  $p'_1$  ایده‌آل اولی از  $R$  و شامل  $I_1$  است. با ادامه این فرایند و در نظر گرفتن  $J_2$  به جای  $I_1$  در مرحله قبل، به زنجیر  $\dots \subset p'_2 \subset p'_1$  از ایده‌آل‌های اول دست می‌یابیم که ایستا نیست.  $\square$

فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. منظور از ایده‌آل‌سازی  $R(+M)$  حلقه‌ای با مجموعه زمینه  $R \times M$  است که عمل جمع آن مولفه‌وار و عمل ضرب به صورت  $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$  می‌باشد. لازم به ذکر است که بنا به قسمت (۲) از [۳، قضیه ۲.۳] هر ایده‌آل اول از حلقه  $R(+M)$  به شکل  $p(+M)$  است که در آن  $p$  یک ایده‌آل اول از  $R$  است. همچنین بنا به قسمت (۳) از همین قضیه، ایده‌آل‌های رادیکال از  $R(+M)$  به شکل  $I(+M)$  هستند که  $I$  یک ایده‌آل رادیکال از  $R$  است. به ویژه اگر  $I$  یک ایده‌آل از  $R$  و  $N$  زیرمدولی از  $M$  باشد، آن‌گاه  $\sqrt{I(+N)} = \sqrt{I}(+M)$ .

**نتیجه ۷.۱.** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در این صورت  $R$  رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر حلقه  $R(+M)$  رادیکال نوتری باشد.

**برهان.** با توجه به مطالب بالا و قضیه ۶.۱ حکم واضح است.  $\square$

**تبصره ۸.۱.** لازم به ذکر است حلقه  $R$  در قسمت (۲) مثال ۲ نیز رادیکال نوتری نیست، زیرا به راحتی دیده می‌شود که ایده‌آل بیشین  $m = (x_1, x_2, \dots)$  از  $R$  رادیکال هیچ ایده‌آل متناهی مولد نیست. به علاوه چون  $R$  را می‌توان در میدان کسرها نشان داد، نتیجه می‌شود که زیرحلقه یک حلقه رادیکال نوتری لزوماً رادیکال نوتری نیست. هم‌چنین برخلاف مدول‌های نوتری که هر زیرمدول از آنها نوتری است، الزامی نیست که زیرمدول یک مدول رادیکال نوتری، رادیکال نوتری باشد. برای تایید این مطلب، در [۹، مثال ۱۶.۵] یک دامنه صحیح غیر نوتری موضعی چهاربعدی  $(C, m_C)$  معرفی شده است که



بنا به قضیه ۳ رادیکال نوتری است. (در ضمن این نشان می‌دهد که گردایه حلقه‌های رادیکال نوتری به طور اکید شامل گردایه حلقه‌های نوتری است.) بنا به قسمت‌های ۴ و ۶ این مثال، ایده‌آل‌های اول ناصفر غیربیشین  $p$  از  $C$  نمی‌توانند رادیکال هیچ  $C$ -زیرمدول متناهی‌مولد از  $m_C$  باشند. بنابراین  $m_C$  یک  $C$ -زیرمدول از حلقه رادیکال نوتری  $C$  می‌باشد که رادیکال نوتری نیست. همچنین بنا به قسمت ۲ از همان مثال،  $m_C$  یک ایده‌آل اصلی از  $C$  بوده و در نتیجه یک  $C$ -مدول ضربی نیز می‌باشد. این بیان می‌کند که در حالت کلی یک مدول ضربی متناهی‌مولد، رادیکال نوتری نیست.

**قضیه ۹،۱.** هر خارج قسمت از یک مدول رادیکال نوتری، رادیکال نوتری است.

**برهان.** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول رادیکال نوتری و  $N$  زیرمدولی از آن باشد. به‌علاوه فرض کنید  $L/N$  یک زیرمدول رادیکال از  $M/N$  باشد. در این صورت بنا به [۲۰، لم ۷]،  $L/N = \text{rad}_{M/N} L/N = \text{rad} L/N$  (که در آن  $\text{rad}_{M/N} L/N$  رادیکال زیرمدول  $L/N$  از  $M/N$  است). از این رو  $L = \text{rad} L$ . در نتیجه بنا به قضیه ۱، زیر مدول متناهی‌مولد  $T = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$  از  $M$  وجود دارد به‌طوری‌که  $L = \text{rad} T$  در نتیجه

$$L/N = (\text{rad} T)/N = \text{rad}((T + N)/N) = \text{rad}(R(x_1 + N) + \dots + R(x_n + N))$$

که نشان می‌دهد  $M/N$  رادیکال نوتری است.  $\square$

**لم ۱۰،۱.** [۱۰، گزاره ۸] فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول متناهی‌مولد و  $I$  یک ایده‌آل رادیکال از  $R$  باشد. در این صورت  $\text{Ann}(M) \subseteq I$  اگر و تنها اگر  $(IM : M) = I$ .

**قضیه ۵.** فرض کنید  $M$  یک مدول ضربی روی حلقه  $R$  باشد. در این صورت  $M$  رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر  $R/\text{Ann}(M)$  یک حلقه رادیکال نوتری باشد.

**برهان.**  $(\Rightarrow)$  فرض کنید  $R/\text{Ann}(M)$  یک حلقه رادیکال نوتری و  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی باشد. علاوه بر این فرض کنید  $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$  یک زنجیر از زیرمدول‌های رادیکال  $M$  باشد. در این صورت چون  $M$  یک  $R/\text{Ann}(M)$ -مدول ضربی نیز هست، بنا به نتیجه ۱، (۲)  $M$  یک  $R/\text{Ann}(M)$ -مدول متناهی‌مولد بوده و از این رو  $M$  یک  $R$ -مدول متناهی‌مولد است. بنابراین از [۱۱، نتیجه ۴.۵] نتیجه می‌شود که به ازای هر  $i \geq 1$

$$(N_i : M) = (\text{rad} N_i : M) = \sqrt{(N_i : M)}$$

در نتیجه  $(N_1 : M) \subseteq (N_2 : M) \subseteq \dots$  یک زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های رادیکال حلقه  $R$  و شامل  $\text{Ann}(M)$  می‌باشد که بنا به فرض ایستا است؛ یعنی  $n \in \mathbb{N}$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $i \geq n$ ،  $(N_i : M) = (N_n : M)$ . حال از ضربی بودن  $M$  به دست می‌آید که به ازای هر  $i \geq n$ ،  $N_i = N_n$ . در نتیجه  $M$  رادیکال نوتری است.

( $\Leftarrow$ ) فرض کنید  $M$  رادیکال نوتری بوده و  $I_1/Ann(M) \subseteq I_2/Ann(M) \subseteq \dots$  یک زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های رادیکال حلقه  $R/Ann(M)$  باشد. بنابراین به ازای هر  $i \geq 1$  ایده‌آل‌های  $I_i$  رادیکال هستند. در این صورت چون بنا به نتیجه ۱۰،۱(۱)،  $M$  متناهی مولد است، از لم ۱۰،۱ به دست می‌آید که

$$rad(I_i M) = \sqrt{(I_i M : M)} M = \sqrt{I_i} M = I_i M.$$

این نشان می‌دهد  $I_1 M \subseteq I_2 M \subseteq \dots$  یک زنجیر افزایشی از زیرمدول‌های رادیکال  $M$  است. حال چون  $M$  رادیکال نوتری است،  $n \in \mathbb{N}$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $i \geq n$ ،  $I_i M = I_n M$  در نتیجه به ازای هر  $i \geq n$

$$I_i = (I_i M : M) = (I_n M : M) = I_n.$$

بنابراین  $R/Ann(M)$  رادیکال نوتری است.  $\square$

نتیجه ۱۱،۱. فرض کنید  $M$  یک مدول ضربی روی حلقه  $R$  باشد به طوری که هر زنجیر از زیرمدول‌های اول از  $M$  ایستا است. اگر  $M$  متناهی مولد و وفادار بوده و هر زیرمدول رادیکال، اشتراک تعداد متناهی زیرمدول اول باشد، آن‌گاه  $M$  رادیکال نوتری است.

**برهان.** فرض کنید  $p_1 \subseteq p_2 \subseteq \dots$  یک زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های اول حلقه  $R$  باشد. چون  $M$  متناهی مولد است، بنا به [۱۲، قضیه ۳.۳]، زیرمدول‌های اول  $P_i$  ( $i \geq 1$ ) از  $M$  وجود دارند به طوری که  $p_i = (P_i : M)$  چون  $M$  ضربی است زنجیر افزایشی  $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$  از زیرمدول‌های اول را خواهیم داشت که بنا به فرض ایستا است. این ایجاب می‌کند که زنجیر  $p_1 \subseteq p_2 \subseteq \dots$  نیز ایستا باشد. به علاوه اگر  $I$  یک ایده‌آل رادیکال از  $R$  باشد، آنگاه بنا به لم ۱۰،۱ و فرض، زیرمدول‌های اول  $P_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) وجود دارند به طوری که

$$I = \sqrt{I} = \sqrt{(IM : M)} = (rad(IM) : M) = (\cap_{i=1}^n P_i : M) = \cap_{i=1}^n (P_i : M).$$

از این رو بنا به قضیه ۳، حلقه  $R$  رادیکال نوتری است. در نتیجه بنا به قضیه ۵،  $M$  رادیکال نوتری است.  $\square$

فرض کنید  $S$  یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه  $R$  و  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در [۱۸، قضیه ۴.۳]، نشان داده شده است که  $P \mapsto P_S$  یک تناظر یک به یک بین مجموعه زیرمدول‌های اول  $P$  از  $R$ -مدول  $M$  که  $(P : M) \cap S = \emptyset$  و مجموعه  $R_S$ -زیرمدول‌های اول مدول کسرهای  $M_S$  می‌باشد. این مطلب نتیجه زیر را ایجاب می‌کند:

نتیجه ۱۲،۱. فرض کنید  $S$  یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه  $R$  و  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی وفادار باشد. در این صورت اگر  $M$  یک  $R$ -مدول رادیکال نوتری باشد، آن‌گاه  $M_S$  یک  $R_S$ -مدول رادیکال نوتری است. به ویژه  $R_S$  یک حلقه رادیکال نوتری است.

**برهان.** بنا به آن چه پیش‌تر گفته شد، هر زیرمدول اول از  $R_S$ -مدول  $M_S$  به شکل  $P_S$  می‌باشد که در آن  $P$  یک زیرمدول اول از  $R$  است و  $(P : M) \cap S = \emptyset$ . حال اگر  $P_{1S} \subseteq P_{2S} \subseteq \dots$  یک زنجیر از زیرمدول‌های اول  $R_S$ -مدول  $M_S$  باشد،

آن‌گاه  $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$  یک زنجیر از زیرمدول‌های اول  $M$  است که ایستا می‌باشد و این ایجاب می‌کند که زنجیر اولیه  $P_{1S} \subseteq P_{2S} \subseteq \dots$  نیز ایستا است. از طرفی بنا به نتیجه (۱)۴،۱،  $M$  متناهی‌مولد است و بنابراین  $R_S$ -مدول  $M_S$  ضربی و متناهی‌مولد و وفادار است. از این رو بنا به نتیجه (۱)۱،۱،  $M_S$  یک  $R_S$ -مدول رادیکال نوتری است. قسمت "به‌ویژه" نیز از این حقیقت بدیهی نتیجه می‌شود که  $R$  یک  $R$ -مدول ضربی است.  $\square$

در [۷، نتیجه ۳.۲]، نشان داده شده است که برای  $R$ -مدول‌های متناهی‌مولد  $M_1$  و  $M_2$ ،  $M = M_1 \oplus M_2$  یک  $R$ -مدول ضربی است اگر و تنها اگر  $M_1$  و  $M_2$  ضربی باشند و  $Ann(M_1) \oplus Ann(M_2) = R$ . از این مطلب در قسمت (۳) نتیجه زیر استفاده شده است.

نتیجه ۱۳،۱. گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱)  $R_1$  و  $R_2$  حلقه‌های رادیکال نوتری هستند اگر و تنها اگر جمع مستقیم  $R = R_1 \oplus R_2$  یک حلقه رادیکال نوتری باشد.

(۲) اگر جمع مستقیم  $M = M_1 \oplus M_2$  از  $R$ -مدول‌های  $M_1$  و  $M_2$  یک  $R$ -مدول رادیکال نوتری باشد، آن‌گاه  $M_1$  و  $M_2$  نیز  $R$ -مدول‌های رادیکال نوتری هستند.

(۳) اگر  $M_1$  و  $M_2$ ،  $R$ -مدول‌های ضربی رادیکال نوتری باشند به طوری که  $Ann(M_1) \oplus Ann(M_2) = R$  آن‌گاه  $M = M_1 \oplus M_2$  یک  $R$ -مدول ضربی متناهی‌مولد رادیکال نوتری است.

برهان. (۱) واضح است که  $I$  یک ایده‌آل رادیکال از  $R$  است اگر و تنها اگر ایده‌آل‌های رادیکال  $I_1$  از  $R_1$  و  $I_2$  از  $R_2$  موجود باشند به طوری که  $I = I_1 \oplus I_2$ . حال حکم از قضیه ۱ به دست می‌آید.

(۲) نتیجه مستقیم قضیه ۹،۱ است.

(۳) چون  $M_1$  و  $M_2$  دو  $R$ -مدول ضربی رادیکال نوتری هستند، بنا به قضیه ۵ حلقه‌های  $R/Ann(M_1)$  و  $R/Ann(M_2)$  رادیکال نوتری هستند. از این رو بنا به قضیه باقیمانده چینی،

$$R/Ann(M) \cong R/(Ann(M_1) \cap Ann(M_2)) \cong R/Ann(M_1) \oplus R/Ann(M_2)$$

که بنا به قسمت (۱)، یک حلقه رادیکال نوتری است. از طرف دیگر بنا به نتیجه (۱)۴،۱ و [۷، نتیجه ۳.۲]،  $R$ -مدول  $M = M_1 \oplus M_2$  ضربی است. حال دوباره از قضیه ۵ نتیجه می‌شود که  $M$  یک  $R$ -مدول رادیکال نوتری است.  $\square$

نتیجه ۱۴،۱. فرض کنید  $M_1$  و  $M_2$ ،  $R$ -مدول‌های ضربی وفادار رادیکال نوتری باشند. در این صورت حاصل ضرب تانسوری  $M_1 \otimes M_2$  یک  $R$ -مدول ضربی وفادار رادیکال نوتری است.

برهان. چون  $M_1$  و  $M_2$ ،  $R$ -مدول‌های ضربی وفادار رادیکال نوتری هستند، بنا به قضیه ۵،  $R$  یک حلقه رادیکال نوتری است. از طرفی بنا به [۱، قضیه ۲]،  $M_1 \otimes M_2$  یک  $R$ -مدول ضربی وفادار است. از این رو دوباره بنا به قضیه ۵،  $R$ -مدول  $M_1 \otimes M_2$  رادیکال نوتری است.  $\square$

قضیه ۱۵،۱. فرض کنید  $S$  مجموعه ناتهی متشکل از تمام ایده‌آل‌های رادیکال یک حلقه  $R$  باشد که رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد نیستند. در این صورت  $S$  دارای عضو بیشین است و هر چنین عضوی یک ایده‌آل اول از  $R$  است.

برهان. فرض کنید  $C = \{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  یک زیرمجموعه به طور کلی مرتب از  $(S, \subseteq)$  باشد. به راحتی مشاهده می‌شود که  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$  کران بالای  $C$  در  $S$  می‌باشد و از این رو بنا به لم زورن دارای عضو بیشینی مانند  $p$  است. فرض کنید

$a \notin p$  و  $b \notin p$  ولی  $ab \in p$ . بنا به بیشین بودن  $p$ ، عضوهای  $x_1, \dots, x_m$  و  $y_1, \dots, y_n$  از  $R$  وجود دارند به طوری که

$$\sqrt{p + Ra} = \sqrt{Rx_1 + \dots + Rx_m} \quad \text{و} \quad \sqrt{p + Rb} = \sqrt{Ry_1 + \dots + Ry_n}.$$

در این صورت

$$p \subseteq \sqrt{p + Ra} \cap \sqrt{p + Rb} = \sqrt{(p + Ra)(p + Rb)} = \sqrt{p^2 + pa + pb + Rab} \subseteq p$$

که نتیجه می‌دهد

$$p = \sqrt{(p + Ra)(p + Rb)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Rx_i y_j}$$

که به تناقض با عضویت  $p$  در  $S$  می‌انجامد. بنابراین  $p$  ایده‌آل اولی از  $R$  است.  $\square$

اکنون نسخه جایگزین از قضیه کوهن در رده حلقه‌ها و مدول‌های رادیکال نوتری را ارائه می‌کنیم.

نتیجه ۱۶،۱. حلقه رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل اول از  $R$ ، رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد باشد.

برهان.  $(\Leftarrow)$  واضح است.

$(\Rightarrow)$  فرض کنید  $S$  مجموعه تمام ایده‌آل‌های رادیکال  $R$  باشد که رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد نیستند. اگر  $S \neq \emptyset$ ، آن‌گاه بنا به قضیه قبل  $S$  دارای ایده‌آل اولی از  $R$  خواهد بود که این در تناقض با فرض است. بنابراین  $S = \emptyset$  و در نتیجه  $R$  رادیکال نوتری است.  $\square$

نتیجه ۱۷،۱. فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول ضربی متناهی‌مولد وفادار باشد. در این صورت  $M$  رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول اول از  $M$  رادیکال یک زیرمدول متناهی‌مولد باشد.

برهان.  $\Leftarrow$ ) بنا به تعریف واضح است.

$\Rightarrow$ ) فرض کنید  $p$  یک ایده‌آل اول از حلقه  $R$  باشد. در این صورت بنا به [۱۲، قضیه ۳.۳]، یک زیرمدول اول  $P$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $p = (P:M)$ . از طرفی بنا به فرض زیرمدول متناهی‌مولد  $N$  از  $M$  موجود است به طوری که  $P = radN$  و بنابراین  $p = (radN:M) = \sqrt{(N:M)}$ . [۲، گزاره ۲.۲]،  $(N:M)$  یک ایده‌آل متناهی‌مولد از  $R$  است و از این رو بنا به نتیجه ۱۶،۱،  $R$  یک حلقه رادیکال نوتری است. در نتیجه بنا به قضیه ۵،  $M$  یک مدول رادیکال نوتری است.  $\square$

لم ۱۸،۱. فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل رادیکال از حلقه  $R$  باشد که رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد از  $R$  است. در این صورت زیر مجموعه متناهی  $C$  از  $I$  وجود دارد به طوری که  $I = \sqrt{RC}$

برهان. بنا به فرض عضوهای  $x_1, \dots, x_n$  از  $R$  وجود دارند به طوری که

$$I = \sqrt{Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n}.$$

در این صورت برای هر  $1 \leq i \leq n$ ، عدد طبیعی  $k_i$  موجود است به طوری که  $x_i^{k_i} \in I$  از این رو

$$I = \sqrt{Rx_1 + \dots + Rx_n} = \sqrt{\sqrt{Rx_1} + \dots + \sqrt{Rx_n}} = \sqrt{Rx_1^{k_1} + \dots + Rx_n^{k_n}} \subseteq I.$$

بنابراین  $I = \sqrt{Rx_1^{k_1} + \dots + Rx_n^{k_n}}$  لذا کافی است قرار دهیم  $C = \{x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n}\}$ .  $\square$

اکنون قضیه پایه هیلبرت برای حلقه‌های رادیکال نوتری را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۹،۱. اگر  $R$  یک حلقه رادیکال نوتری باشد، آن‌گاه حلقه چندجمله‌ای  $R[X]$  رادیکال نوتری است.

برهان. فرض کنید  $R$  رادیکال نوتری و  $R[X]$  رادیکال نوتری نباشد. در این صورت مجموعه  $\mathcal{K}$  متشکل از ایده‌آل‌های رادیکال  $R[X]$  که رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد نیستند، ناتهی است. در نتیجه بنا به لم ۱،۱،  $\mathcal{K}$  دارای یک عضو بیشین  $B$  است. چون  $R$  رادیکال نوتری است، بنا به قضیه ۱ زیرمجموعه متناهی  $C$  از ایده‌آل رادیکال  $B \cap R$  وجود دارد که  $B \cap R = \sqrt{RC}$ . در نظر بگیرید که  $D = (B \cap R)[X]$ . در این صورت  $D = \sqrt{RC[X]}$  که رادیکال ایده‌آل متناهی‌مولد  $RC[X]$  از  $R[X]$  است. بنابراین  $D \neq B$ . فرض کنید  $f(X) \in B \setminus D$  یک چندجمله‌ای با کمترین درجه باشد که جمله پیشرو آن  $aX^n$  است. نشان می‌دهیم که  $a \notin B$ . اگر چنین نباشد، به دست می‌آوریم  $f(X) - aX^n \in B$  که یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از  $n$  است و بنابراین عضوی از  $D$  می‌باشد. از طرف دیگر چون  $aX^n \in (B \cap R)[X] = D$ ،  $a \in B \cap R$  و در نتیجه

$$f(X) = (f(X) - aX^n) + aX^n \in D.$$

که تناقض است. بنابراین  $a \notin B$ ، که ایجاب می‌کند  $B \subseteq \sqrt{B + aR[X]}$ . از این رو بنا به بیشین بودن  $B$  در  $\mathcal{S}$ ، ایده‌آل  $\sqrt{B + aR[X]}$  رادیکال یک ایده‌آل متناهی مولد از  $R[X]$  است. در نتیجه بنا به لم ۱۸،۱، زیرمجموعه متناهی  $E$  از  $B$  وجود دارد به طوری که  $\sqrt{B + aR[X]} = \sqrt{ER[X] + aR[X]}$  نشان خواهیم داد

$$aB \subseteq \sqrt{f(X)R[X] + D}. \quad (*)$$

برای این منظور فرض کنید  $g(X) \in B$  در صورتی که  $g(X) \in D$ ، درست است. فرض کنید  $g(X) \in B \setminus D$  با درجه  $m \geq n$  باشد. در این صورت چندجمله‌ای‌های  $q(X)$  و  $r(X)$  وجود دارند به طوری که  $\deg(r(X)) < n$  و  $a^m g(X) = f(X)q(X) + r(X)$ . حال از آنجا که  $r(X) = a^m g(X) - f(X)q(X)$  بنا به کمینگی درجه  $f(X)$  نتیجه می‌شود که  $r(X) \in D$  از طرف دیگر

$$(ag(X))^m = f(X)q(X)(g(X))^{m-1} + r(X)(g(X))^{m-1} \in f(X)R[X] + D$$

که ایجاب می‌کند

$$ag(X) \in \sqrt{f(X)R[X] + D} = \sqrt{\sqrt{f(X)R[X]} + \sqrt{RC[X]}} = \sqrt{f(X)R[X] + RC[X]}$$

بنابراین  $aB \subseteq \sqrt{f(X)R[X] + RC[X]}$ ، که نشان می‌دهد (\*) برقرار است. از این رو

$$\begin{aligned} B^2 &\subseteq B\sqrt{ER[X] + aR[X]} = \sqrt{B(ER[X] + aR[X])} \\ &\subseteq \sqrt{ER[X] + aB} \subseteq \sqrt{ER[X] + \sqrt{f(X)R[X] + RC[X]}} \\ &= \sqrt{ER[X] + f(X)R[X] + RC[X]} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد  $B = \sqrt{ER[X] + f(X)R[X] + RC[X]}$ . به عبارت دیگر  $B$  رادیکال ایده‌آل تولید شده به وسیله مجموعه متناهی  $E \cup \{f(X)\} \cup C$  است که در تناقض با عضویت  $B$  در  $\mathcal{S}$  است. بنابراین رادیکال نوتری است.  $\square$

**نتیجه ۲۰،۱.** اگر  $R$  یک حلقه رادیکال نوتری باشد، آن‌گاه  $R[X_1, \dots, X_n]$  رادیکال نوتری است.

**برهان.** به استقراء روی  $n$  نتیجه می‌شود.  $\square$

نتیجه زیر که بلافاصله از قضیه پایه هیلبرت در حلقه‌های نوتری به دست می‌آید را می‌توان از قضیه قبل نیز به دست آورد.

**نتیجه ۲۱،۱.** اگر  $R$  یک حلقه نوتری باشد، آن‌گاه  $R[X_1, \dots, X_n]$  رادیکال نوتری است.

برهان. بنا به قضیه ۱۹،۱ واضح است. □

**نتیجه ۲۲،۱.** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در این صورت  $R$  یک حلقه رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر  $(R(+M)[X])$  یک حلقه رادیکال نوتری باشد.

برهان. بنا به [۳، نتیجه ۷.۴]،  $(R(+M)[X]) \cong R[X](+M[X])$ . حال حکم از نتیجه ۷،۱ و قضیه ۱۹،۱ به دست می‌آید. □

فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در نتیجه زیر، عمل‌های جمع و ضرب اسکالری  $R[X]$ -مدولی  $M[X]$  همان‌هایی است که به طور معمول از عمل‌های  $R$ -مدول  $M$  به دست می‌آیند (۵، تمرین ۶ ص ۳۲ را ببینید). همچنین  $R$ -مدول  $M[X]$  مدول به دست آمده از تحدید اسکالرها  $R[X]$  به  $R$  در ساختار قبلی است.

**نتیجه ۲۳،۱.** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول رادیکال نوتری و  $R$ -مدول  $M[X]$  ضربی باشد. در این صورت  $R[X]$ -مدول  $M[X]$  رادیکال نوتری است.

برهان. ابتدا واضح است که چون  $M$  نقش همریخت  $M[X]$  است،  $R$ -مدول  $M$  ضربی می‌باشد و از این رو بنا به قضیه ۵،  $R/Ann(M)$  یک حلقه رادیکال نوتری است. در این صورت بنا به قضیه ۱۹،۱،

$$R[X]/Ann(M[X]) = R[X]/Ann(M)[X] \cong (R/Ann(M))[X]$$

یک حلقه رادیکال نوتری است. از طرفی  $M[X]$  یک  $R[X]$ -مدول ضربی نیز هست و در نتیجه بنا به قضیه ۵،  $R[X]$ -مدول  $M[X]$  رادیکال نوتری است.

**سپاس گذاری:** در اینجا مولفین لازم میدانند که مراتب قدردانی و سپاس خود را از داوران محترم به دلیل مطالعه دقیق مقاله و پیشنهادهای ارزنده اعلام نمایند.

## References

1. M. M. Ali, Multiplication modules and tensor product, Beitr. Algebra Geom., **47**(2) (2006), 305-327.
2. M. M. Ali and D. J. Smith, Some remarks on multiplication and projective modules, Comm. Algebra, **32** (2004), 3897-3909.
3. D. D. Anderson and M. Winders, Idealization of a modul, J. Commut. Algebra, **1** (2009), 3-56.
4. H. Ansari-Toroghy and R. Ovlyae-Sarmazdeh, On the prime spectrum of a module and Zariski topologies, Comm. Algebra, **38** (12) (2010) 4461-4475.

5. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1969.
6. G. Călugăreanu, *Lattice Concepts of Module Theory*, Kluwer Texts in the Mathematical Sciences 22, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
7. Z. A. El-Bast and P. F. Smith, Multiplication Modules, *Comm. Algebra*, **16**(4) (1988), 755-799.
8. J. B. Harehdashti and H. F. Moghimi, Complete homomorphisms between the lattices of radical submodules, *Math. Rep.*, **20**(70) (2018), 187-200.
9. W. Heinzer, C. Rotthaus and S. Weigand, Examples of non-Noetherian domains inside power series ring, *J. Commut. Algebra*, **6**(1) (2014), 53-93.
10. C. P. Lu, Prime submodules of modules, *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, **33**(1) (1984), 61-69.
11. C. P. Lu, A module whose prime spectrum has the surjective natural map, *Houston J. Math.*, **33** (2007), 125-143.
12. R. L. McCasland and M. E. Moore, Prime submodules, *Comm. Algebra.*, **20**(6) (1992), 1803-1817.
13. R. L. McCasland, M. E. Moore and P. F. Smith, On the spectrum of a module over a commutative ring", *Comm. Algebra.*, **25** (1997), 79-103.
14. R. L. McCasland, M. E. Moore and P. F. Smith, An introduction to Zariski spaces over Zariski topologies, *Rocky Mountain J. Math.*, **28** (1998), 1357-1369.
15. R. L. McCasland, M. E. Moore and P. F. Smith, Subtractive bases of Zariski spaces, *Houston J. Math.*, **4**(32) (2006), 689-701.
16. R. L. McCasland and P. F. Smith, Zariski Spaces of Modules over Arbitrary Rings, *Comm. Algebra.*, **34** (2007), 3961-3973.
17. H. F. Moghimi and J. B. Harehdashti, Mappings between lattices of radical submodules, *Int. Electr. J. Alg.*, **19** (2016), 35-48.
18. M. E. Moore and S. J. Smith., Prime and radical submodules of modules over commutative rings, *Comm. Algebra.*, **30** (2002), 5037-5064.
19. A. R. Naghipour, A short note on minimal prime ideals, *J. Commut., Algebra* **6**(2) (2014), 231-232.
20. B. Sarac and Y. Tiras, On modules which satisfy the radical formula, *Turk. J. Math.*, **37** (2013), 195-20.